

Đề Chính Thức

Bài 1. (2 điểm)

1) Cho x, y là các số không âm. Chứng minh:

$$\sqrt{x + \sqrt[3]{x^2y}} + \sqrt{y + \sqrt[3]{y^2x}} = \left(\sqrt{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y}} \right)^3$$

2) Cho a, b, c là các số phân biệt thoả mãn:
$$\begin{cases} a + \frac{2}{b} = b + \frac{2}{c} = c + \frac{2}{a} \\ abc \neq 0 \end{cases}$$

Chứng minh $|abc| = 2\sqrt{2}$.

Bài 2. (2,5 điểm)

1) Giải phương trình: $x^4 - 5x^3 + 8x^2 - 5x + 1 = 0$.

2) Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} xy - 3x - 2y = 3 \\ x^2 + y^2 - x - 3y = 38 \end{cases}$$

Bài 3. (3 điểm)

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O;R). Các tiếp tuyến của đường tròn tại B, C cắt nhau ở T. Đường thẳng AT cắt đường tròn tại điểm thứ hai là D.

1) Chứng minh $AB \cdot CD = AC \cdot BD$.

2) Gọi M là trung điểm của BC. Chứng minh $\widehat{BAD} = \widehat{CAM}$.

Bài 4. (1,5 điểm)

1) Tìm tất cả các cặp số tự nhiên $(x; y)$ thoả mãn: $(xy + 7)^2 = x^2 + y^2$

2) Tìm n nguyên dương thoả mãn:
$$\frac{4.1}{4.1^4 + 1} + \frac{4.2}{4.2^4 + 1} + \dots + \frac{4n}{4n^4 + 1} = \frac{220}{221}$$

Bài 5. (1 điểm)

Có 2010 người xếp thành một vòng tròn, lúc đầu mỗi người cầm 1 chiếc kẹo. Mỗi bước chọn hai người có kẹo và thực hiện: Mỗi người chuyển 1 chiếc kẹo cho người bên cạnh (về bên trái hoặc phải). Sau hữu hạn bước có thể xảy ra trường hợp tất cả số kẹo chuyển về một người hay không?

— Hết —