

## Seleksi Tim IMC Indonesia 2012

Hari Kedua

Waktu: 4 jam 30 menit

**Soal 1.** Diberikan barisan bilangan real positif  $\{c_n\}_{n \geq 1}^\infty$  dan definisikan

$$x_n = \sqrt[p]{c_1 + \sqrt[p]{c_2 + \sqrt[p]{\cdots + \sqrt[p]{c_n}}}}, \quad \forall n \geq 1.$$

Tunjukkan bahwa barisan  $\{x_n\}_{n \geq 1}^\infty$  konvergen jika dan hanya jika barisan  $\left\{ \frac{1}{p^{n+1}} \ln c_n \right\}_{n \geq 1}^\infty$  terbatas di atas.

**Soal 2.** Misalkan  $h$  merupakan fungsi real yang kontinu pada interval  $[-M, M]$  ( $M \in \mathbb{R}$ ) dan definisikan fungsi kompleks

$$g(z) = 2i\pi \int_{-M}^M \frac{h(x)}{x - z} dx.$$

- (a) Tunjukkan bahwa  $g$  fungsi holomorfik dan  $\lim_{|z| \rightarrow \infty} g(z) = 0$ .  
(b) Tunjukkan bahwa

$$h(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (g(x + i\epsilon) - g(x - i\epsilon)).$$

**Soal 3.** Diberikan sebuah graf sederhana dengan  $n$  verteks. Misalkan  $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$  merupakan matriks ketetanggaan (*adjacency matrix*) demikian sehingga  $a_{ij} = 1$  jika terdapat sisi antara  $i$  dan  $j$  serta  $a_{ij} = 0$  jika tidak ada sisi antara  $i$  dan  $j$ . Untuk setiap bilangan asli  $k$ , definisikan  $a_{ij}^{(k)}$  sebagai elemen baris ke- $i$  dan kolom ke- $j$  pada matriks  $A^k$ .

(a) Tunjukkan bahwa untuk setiap bilangan asli  $k$ ,  $a_{ij}^{(k)}$  menyatakan banyaknya lintasan sepanjang  $k$  antara verteks  $i$  dan  $j$ .

(b) Pada graf lengkap, tunjukkan bahwa banyaknya lintasan sepanjang  $k$  dari suatu titik dan kembali ke titik yang sama adalah  $\frac{(n-1)^k + (n-1)(-1)^k}{n}$  dan panjang lintasan sepanjang  $k$  dari satu titik ke titik lain adalah  $\frac{(n-1)^k + (-1)^{k-1}}{n}$ .

**Soal 4.** Misalkan  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  merupakan fungsi kontinu demikian sehingga  $\int_0^1 f(x) dx = 0$ .

Tunjukkan bahwa untuk setiap  $\alpha \in [0, 1]$ , berlaku

$$\left| \int_0^\alpha f(x) dx \right| \leq \frac{1}{8} \sup_{a \in [0, 1]} |f'(a)|.$$

**Soal 5.** Tunjukkan bahwa sebarang grup dengan order 96 pasti memiliki subgrup normal yang berorder 16 atau berorder 32.

**Soal 6.** (a) Misalkan  $A$  dan  $B$  merupakan matriks real berukuran  $2 \times 2$  yang bukan kelipatan matriks identitas sehingga  $\det(A^2 + B^2)$  bernilai negatif. Tunjukkan bahwa matriks  $A$  dan  $B$  tidak komutatif.

(b) Cari contoh matriks real  $A$  dan  $B$  berukuran  $2 \times 2$  yang bukan merupakan kelipatan matriks identitas sehingga  $\det(A^2 + B^2)$  bernilai negatif.

*typeset by raja oktovin*

*<http://nivotko.wordpress.com/>*

*last revision: 18 june 2012*