

# Phương pháp GIẢI TOÁN TRONG TÂM

**CÁC BÀI GIẢNG LUYỆN THI  
TỐT NGHIỆP - ĐẠI HỌC - CAO ĐẲNG**  
CỦA BỘ GIÁO DỤC & ĐÀO TẠO

maths

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

www.vnmath.com

maths

$$S = \frac{1}{2}ab \sin C = \frac{1}{2}bc \sin A = \frac{1}{2}ca \sin B$$



NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC SƯ PHẠM



## Bài giảng số 1

# THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN

Các bài toán thuộc chủ đề này có trong các đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng ở câu số 4. Hai nội dung chính được hỏi đến là:

- Tính thể tích của một khối đa diện (hình chóp hoặc hình lăng trụ) cho trước nào đó.

- Sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách giữa một điểm đến một mặt phẳng hoặc khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau.

Các nội dung sau đây tuy chưa được đề cập đến trong các đề thi Tuyển sinh Đại học, Cao đẳng từ năm 2002 đến năm 2009, nhưng rất cơ bản và đều nằm trong hạn chế kiến thức về môn Toán áp dụng cho các kì thi tuyển sinh do Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

- Các bài toán về thể tích khối đa diện có kết hợp với việc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất.

- Các bài toán về so sánh thể tích.

Bài giảng này sẽ đề cập đến các nội dung đó.

## § 1. TÍNH THỂ TÍCH CỦA MỘT KHỐI ĐA DIỆN

### 1. Các kiến thức cơ bản cần biết

(Xem sách giáo khoa Hình học 12).

### 2. Các dạng toán thường gặp về tính thể tích

Ta thường gặp hai loại toán chính sau đây:

**Loại 1:** Tính thể tích bằng các sử dụng trực tiếp các công thức toán.

Phương pháp giải các bài toán thuộc loại này được tiến hành như sau:

- Xác định chiều cao của khối đa diện cần tính thể tích.

Trong nhiều trường hợp chiều cao này được xác định ngay từ đầu bài, nhưng cũng có trường hợp việc xác định này phải dựa vào các định lý về quan hệ vuông góc đã học ở lớp 11 (hay dùng nhất là các định lý về ba đường vuông góc, các định lý về điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng...). Việc tính các chiều cao thông thường nhờ vào việc sử dụng định lý Pitago, hoặc nhờ đến phép tính lượng giác.

- Tìm diện tích đáy bằng các công thức quen biết.

Nhìn chung các bài toán thuộc loại này rất cơ bản, chỉ đòi hỏi việc tính toán cẩn thận và chính xác.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thang vuông tại A và D;  $AB = AD = 2a$ ;  $CD = a$ , góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng  $60^\circ$ . Gọi I là trung điểm của cạnh AD. Biết mặt phẳng (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD).

Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

**Giải**

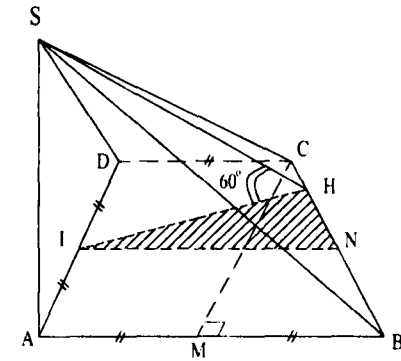
Vì (SBI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy (ABCD), nên giao tuyến  $SI \perp (ABCD)$ .

Kẻ  $IH \perp BC \Rightarrow SH \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc).

Ta có:  $\widehat{SHI} = 60^\circ$  là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD). Trong tam giác vuông SIH, ta có  $SI = IH \tan 60^\circ = IH \cdot \sqrt{3}$ .

Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AB, BC. Vì IN là đường trung bình của hình thang ABCD, nên ta có:

$$IN = \frac{AB + CD}{2} = \frac{2a + a}{2} = \frac{3a}{2}.$$



Ta có:  $IH = IN \cos \widehat{HIN} = IN \cos \widehat{MCB}$  (do  $\widehat{HIN}$  và  $\widehat{MCB}$  là các góc có cạnh tương ứng vuông góc)

$$= \frac{3a}{2} \frac{MC}{BC} = \frac{3a}{2} \frac{2a}{\sqrt{4a^2 + a^2}} = \frac{3a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Vậy } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SI = \frac{1}{3} \frac{(2a + a)2a}{2} \cdot SH \cdot \sqrt{3} = \frac{3a^3 \sqrt{15}}{5} \text{ (dvtt)}.$$

**Thí dụ 2: (Đề tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có cạnh bên  $BB' = a$  và  $BB'$  tạo với mặt phẳng ABC góc  $60^\circ$ . Giả sử ABC là tam giác vuông tại C và  $\widehat{BAC} = 60^\circ$ . Hình chiếu vuông góc  $B'$  lên (ABC) trùng với trọng tâm tam giác ABC. Tính thể tích tứ diện  $A'ABC$

**Giải**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC ta có  $B'G \perp (ABC)$ . Từ đó  $\widehat{B'BG} = 60^\circ$  là góc mà  $BB'$  tạo với mặt phẳng (ABC). Trong tam giác vuông  $BB'G$  ta có ngay:

$$BG = \frac{a}{2}; \quad B'G = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Đặt  $AB = 2x$ , trong tam giác vuông ABC ta có:

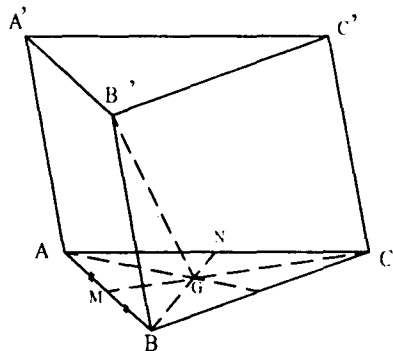
$$AC = x; \quad BC = x\sqrt{3} \text{ (do } \widehat{ABC} = 60^\circ)$$

$$\text{Giả sử } BG \cap AC \text{ thì } BN = \frac{3}{2} BG = \frac{3a}{4}.$$

Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông BNC ta có:

$$BN^2 = NC^2 + BC^2 \Rightarrow \frac{9a^2}{16} = \frac{x^2}{4} + 3x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{9a^2}{52}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } V_{A'.ABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot B'G = \frac{1}{3} \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{12} x \cdot x\sqrt{3} = \frac{ax^2}{4}. \quad (2)$$



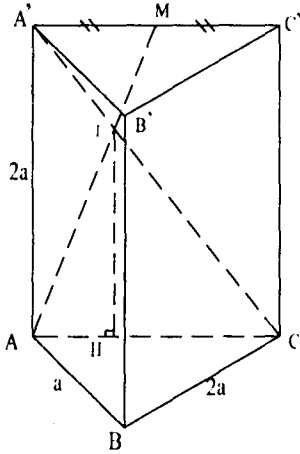
Thay (1) vào (2), ta có:  $V_{A'ABC} = \frac{9a^3}{208}$  (đvtt).

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Cho hình lăng trụ đứng  $A'B'C'ABC$  có đáy là tam giác vuông  $ABC$  tại  $B$ . Giả sử  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ ;  $AC' = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $A'C'$  và  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $A'C$ .

Tính thể tích tứ diện  $IABC$ .

**Giải**



Trong tam giác vuông  $A'AC$  ta có:

$$AC = \sqrt{9a^2 - 4a^2} = a\sqrt{5}.$$

Từ đó trong tam giác vuông  $ABC$ , thì:

$$BC = \sqrt{5a^2 - a^2} = 2a.$$

Do  $(AA'C'C) \perp (ABC)$  nên trong  $(AA'C'C)$  kẻ  $IH \perp AC$  ( $H \in AC$ )  $\Rightarrow IH \perp (ABC)$ .

Theo định lý Talet ta có:  $\frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'}$ .

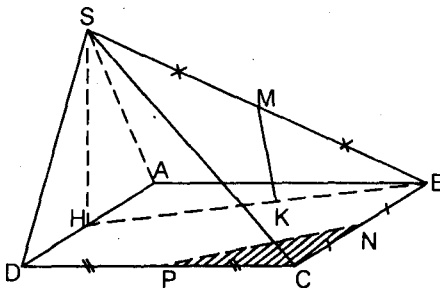
$$\begin{aligned} \text{Vì } \frac{CI}{IA'} = \frac{AC}{A'M} = 2 &\Rightarrow \frac{CI}{IA' + CI} = \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \frac{IH}{AA'} = \frac{CI}{CA'} = \frac{2}{3} &\Rightarrow IH = \frac{2}{3} AA' = \frac{4a}{3}. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } V_{IABC} = \frac{1}{3} S_{ABC} \cdot IH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot IH = \frac{1}{6} a \cdot 2a \cdot \frac{4a}{3} = \frac{4a^3}{9} \text{ (đvtt).}$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2007)**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  đáy là hình vuông  $ABCD$  cạnh  $a$ , mặt bên  $SAD$  là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy  $ABCD$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của  $SB$ ,  $SC$ ,  $SD$ . Tính thể tích tứ diện  $CMNP$ .

**Giải**



Gọi  $H$  là trung điểm của  $AD$ , thì  $SH \perp AD$ .

Do  $(SAD) \perp (ABCD)$  nên suy ra:

$SH \perp (ABCD)$  và  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$  (vì  $ABC$  là tam giác đều cạnh  $a$ ).

Kẻ  $MK \parallel SM$  ( $K \in HB$ )  $\Rightarrow K \perp (ABCD)$  và

$$MK = \frac{SH}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vậy: } V_{MKNP} = \frac{1}{3} S_{MKNP} \cdot MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{8} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4} = \frac{a^3\sqrt{3}}{96} \text{ (đvtt).}$$

**Thí dụ 5: Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Giả sử I là giao điểm của BM và AC. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Tìm thể tích tứ diện ANIB.

**Giải**

Gọi O là tâm của đáy ABCD. Trong tam giác SAC, ta có NO là đường trung bình nên  $NO \parallel SA$ , tức  $NO \perp (ABCD)$  và

$$NO = \frac{a}{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } V_{ANIB} &= V_{N.AIB} = \frac{1}{3} S_{AIB} \cdot NO \\ &= \frac{a}{6} S_{AIB}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ta tính diện tích tam giác AIB:

Xét hình chữ nhật ABCD. Do  $MA = MD$

$$\Rightarrow MA = \frac{1}{2} BD \Rightarrow AI = \frac{1}{2} IC$$

$$\Rightarrow AI = \frac{1}{3} AC \Rightarrow AI^2 = \frac{AC^2}{9} = \frac{2^2 + a^2}{9} = \frac{a^2}{3}.$$

$$\text{Lại có: } BI = \frac{2}{3} BM$$

$$\Rightarrow BI^2 = \frac{4}{9} BM^2 = \frac{4}{9} \left( a^2 + \frac{a^2}{2} \right) = \frac{2a^2}{3}.$$

Do đó  $AI^2 + BI^2 = a^2 = AB^2$ , nên AIB là tam giác vuông đỉnh I.

$$\text{Vậy } S_{AIB} = \frac{1}{2} IA \cdot IB = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^2\sqrt{2}}{6}. \quad (2)$$

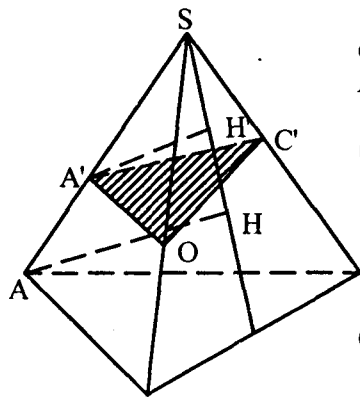
$$\text{Thay (2) vào (1) ta có: } V_{ANIB} = \frac{a^3\sqrt{2}}{36} \text{ (đvtt)}$$

**Loại 2:** Các bài toán tính thể tích khối đa diện dựa vào phân tích khối cần tính thành tổng hoặc hiệu của các khối cơ bản hoặc bằng cách so sánh thể tích với một khối đa diện cơ bản khác.

Trong nhiều bài toán, việc tính trực tiếp thể tích khối đa diện như trong loại 1 có thể gặp khó khăn vì hai lý do: Hoặc là khó xác định và tính được chiều cao, hoặc tính được diện tích đáy nhưng cũng không dễ dàng. Khi đó trong nhiều trường hợp ta có thể làm như sau:

- Phân chia khối cần tính thể tích thành tổng hoặc hiệu các khối cơ bản (hình chóp hoặc hình lăng trụ) mà các khối này dễ tính hơn.

- Hoặc là so sánh thể tích khối cần tính với một khối đa diện khác đã biết trước thể tích.



- Với loại toán này người ta thường có ứng dụng như sau đây.

**Bài toán cơ bản:**

Cho hình chóp S.ABC. Lấy A', B', C' tương ứng trên cạnh SA, SB, SC. Khi đó

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA'}{SA} \cdot \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC}$$

**Chứng minh**

Kẻ A'H' và AH cùng vuông góc mặt phẳng (SBC). Khi đó A'H' // AH và S, H', H thẳng hàng.

Ta có: B

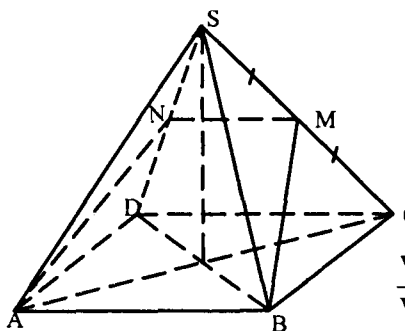
$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}} = \frac{V_{A'.SBC}}{V_{A.SBC}} = \frac{\frac{1}{3} S_{SBC} \cdot A'H'}{\frac{1}{3} S_{SBC} \cdot AH} = \frac{\frac{1}{2} SB' \cdot SC' \cdot \sin \alpha \cdot A'H'}{\frac{1}{2} SB \cdot SC \cdot \sin \alpha \cdot AH} = \frac{SB'}{SB} \cdot \frac{SC'}{SC} \cdot \frac{SA'}{SA} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Ở đây  $\alpha = \widehat{B'SC'} = \widehat{BSC}$

**Chú ý:** Kết quả trên vẫn đúng nếu như trong các điểm A', B', C' có thể có điểm A=A'; B=B'; C=C'.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh bằng  $\sqrt{5}$  cm, đường chéo AC = 4cm. Đoạn thẳng SO =  $2\sqrt{2}$  cm và vuông góc với đáy, ở đây O là giao điểm của hai đường chéo AC và BD. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Giả sử mặt phẳng (ABM) cắt SD tại N. Tìm thể tích hình chóp.



**Giải**

Ta có AB // DC  $\Rightarrow$  AB // (SDC)

$\Rightarrow (SAB) \cap (SDC) = MN // AB$  (N  $\in$  SD).

Vì M là trung điểm của SC nên N là trung điểm của SD.

Ta có:  $V_{S.ABMN} = V_{S.ABN} + V_{S.BMN}$  (1)

Theo bài toán cơ bản ta có:

$$\frac{V_{S.ABN}}{V_{S.ABD}} = \frac{SN}{SD} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{S.ABN} = \frac{1}{2} V_{S.ABD} = \frac{1}{4} V_{S.ABCD}$$

$$\frac{V_{S.BMN}}{V_{S.BCD}} = \frac{SN}{SD} \cdot \frac{SM}{SC} = \frac{1}{4} \Rightarrow V_{S.BMN} = \frac{1}{8} V_{S.ABCD}$$

Từ (1) suy ra:  $V_{S.ABMN} = \frac{3}{8} V_{S.ABCD}$  (2)

$$\text{Để thấy: } V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SO = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot AC \cdot BD \cdot SO = \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = \frac{8\sqrt{2}}{3} \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:  $V_{S.ABCD} = \sqrt{2}$  (đvtt).

**Nhận xét:**

- Hình thang ABMN có thể tính được diện tích (tuy không dễ dàng).
- Việc xác định chiều cao từ S xuống ABMN và tính nó còn phức tạp hơn.
- (Bạn có thể tính toán xem nó để kiểm tra tính phức tạp).
- Cách giải như trên là hợp lí!

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh bằng a. SA = 2a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M, N tương ứng là hình chiếu vuông góc của A trên SB, SC. Tìm thể tích khối chóp A.BMNC.

**Giải**

Ta có:  $V_{A.BMNC} = V_{S.ABC} - V_{S.AMN}$  (1)

Theo bài toán cơ bản thì:

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC}$$

Vì AB = AC  $\Rightarrow$  SB = SC.

Ta có:  $SA^2 = SM \cdot SB = SN \cdot SC \Rightarrow SM = SN$ .

$$\text{Vậy: } \frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM^2}{SB^2} \quad (2)$$

$$\text{Ta có } SA^2 = SM \cdot SB \Rightarrow SM = \frac{SA^2}{SB}$$

Vậy từ (2) có

$$\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SA^4}{SB^4} = \left( \frac{SA^2}{SB^2} \right)^2 = \left( \frac{4a^2}{4a^2 + a^2} \right)^2 = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow V_{S.AMN} = \frac{16}{25} V_{S.ABC} \quad (3)$$

Từ (1) và (3) có:

$$V_{A.BMNC} = \frac{9}{25} V_{S.ABC} = \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot 2a = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50} \text{ (đvtt)}$$

**Nhận xét:** Các bạn hãy so sánh cách giải trên với cách giải bằng “tính toán trực tiếp” (theo phương pháp của loại 1) với thí dụ này.

Gọi E là trung điểm của BC. Ta có  $AE \perp BC$ ,  $SA \perp BC \Rightarrow BC \perp (SEA)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SEA)$

Kẻ  $AH \perp SE$  ( $H \in SE$ )  $\Rightarrow AH \perp (SBC)$ .

Vậy AH là chiều cao của hình chóp A.BMNC.

Trong tam giác vuông SAE, ta có:  $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{AE^2} = \frac{1}{4a^2} + \frac{4}{3a^2}$

$$\Rightarrow AH = 2a \sqrt{\frac{3}{19}}$$

Ta có  $\frac{S_{SMN}}{S_{SBC}} = \frac{SM}{SB} \cdot \frac{SN}{SC} = \left(\frac{SM}{SB}\right)^2 = \frac{SA^4}{SB^4} = \frac{16}{25}$  (xem ở trên)

$$\Rightarrow S_{BMNC} = \frac{9}{25} S_{SBC} = \frac{9}{25} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot SE = \frac{9a}{50} \sqrt{4a^2 + \frac{3a^2}{4}} = \frac{9a^2}{100} \sqrt{19}.$$

Vậy  $V_{A.MNCB} = \frac{1}{3} S_{BMNC} \cdot AH = \frac{1}{3} \cdot \frac{9a^2 \sqrt{19}}{100} \cdot 2a \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{19}} = \frac{3a^3 \sqrt{3}}{50}$  (đvtt)

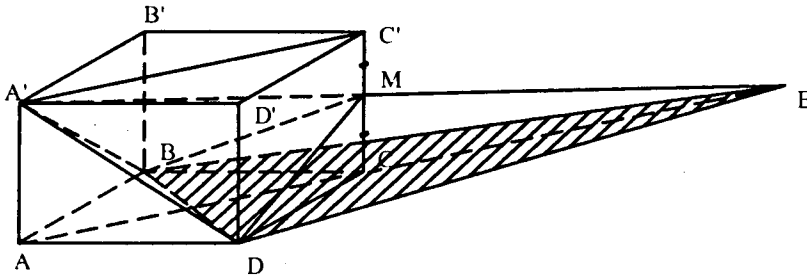
Ta thu lại kết quả trên.

Theo bạn cách giải nào là hợp lý?

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2003)**

Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' đáy là hình vuông cạnh bằng a, chiều cao AA' = b. Gọi M là trung điểm của cạnh CC'. Tìm thể tích tứ diện BDA'M.

**Giải**



Trong (ACC'A'):  $A'M \cap AC = E$ .

Gọi O là tâm của đáy ABCD vì M là trung điểm của CC', nên ta có  $CE = AC = a\sqrt{2}$ .

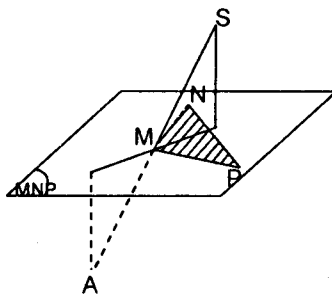
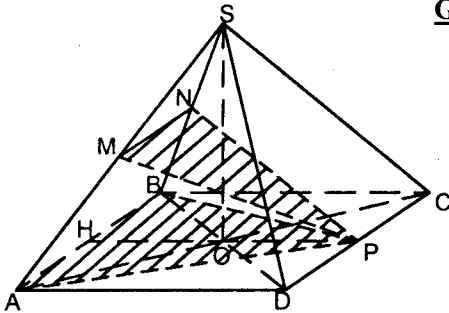
Ta có:  $V_{A'BDM} = V_{A'BDE} - V_{M.BDE} = \frac{1}{3} S_{BDE} \cdot AA' - \frac{1}{3} S_{BDE} \cdot MC = \frac{1}{3} S_{BDE} (AA' - MC)$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BD \cdot EO \left( b - \frac{b}{2} \right) = \frac{1}{6} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{3}{2} a\sqrt{2} \cdot \frac{b}{2} = \frac{a^2 b}{4} \text{ (đvtt)}.$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2009)**

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có cạnh đáy AB = a, cạnh bên SA =  $a\sqrt{2}$ . Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SA, SB, CD. Tìm thể tích tứ diện AMNP.

**Giải**





Do  $MS = MA \Rightarrow d(A, (MNP)) = d(S, (MNP)) (*)$

$$\Rightarrow V_{A.MNP} = V_{S.MNP}$$

Theo bài toán cơ bản, ta có:

$$\frac{V_{S.MNP}}{V_{S.ABP}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SB} = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow V_{S.MNP} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} S_{ABP} \cdot SO = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} AB \cdot HP \cdot SO$$

(O và H tương ứng là tâm của đáy ABCD và trung điểm của AB)

$$= \frac{1}{24} a \cdot a \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{48} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $V_{A.MNP} = \frac{a^3 \sqrt{6}}{48}$  (đvtt).

## §2. SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP THỂ TÍCH ĐỂ TÌM KHOẢNG CÁCH

### Các bài toán tìm khoảng cách:

Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng, trong nhiều trường hợp có thể quy về bài toán thể tích khối đa diện. Việc tính các khoảng cách này dựa vào công thức hiển nhiên sau:

$$h = \frac{3V}{S}$$

ở đây V, S, h lần lượt là thể tích, diện tích đáy và chiều cao của một hình chóp nào

đó (hoặc  $h = \frac{V}{S}$  đối với hình lăng trụ).

Phương pháp này áp dụng được trong trường hợp sau:

Giả sử ta có thể quy bài toán tìm khoảng cách về bài toán tìm chiều cao của một hình chóp (hoặc một lăng trụ) nào đó. Dĩ nhiên các chiều cao này thường là không tính trực tiếp được bằng cách sử dụng các phương pháp thông thường như dùng định lý Pitago, dùng các công thức lượng giác... Tuy nhiên các khối đa diện này lại dễ dàng tính được thể tích và diện tích đáy. Như vậy chiều cao của nó sẽ được xác định bởi các công thức đơn giản trên.

- Lược đồ sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách như sau:

1/ Sử dụng các định lý của hình học không gian sau đây:

+ Nếu  $AB \parallel (P)$  trong đó mặt phẳng (P) chứa CD thì

$$d(AB, CD) = d(AB, (P)).$$

+ Nếu  $(P) \parallel (Q)$ , trong đó các mặt phẳng (P), (Q) lần lượt chứa AB, CD thì

$$d(AB, CD) = d((P), (Q)).$$

Ta quy bài toán tìm khoảng cách theo yêu cầu đầu bài ra về việc tìm chiều cao của một khối chóp (hoặc một khối lăng trụ nào đó).

2/ Giả sử bài toán quy về tìm chiều cao kẻ từ S của lăng trụ) nào đó. Ta tìm thể tích của hình chóp (hoặc lăng trụ) này theo một con đường khác mà không dựa vào đỉnh S này (thí dụ tính thể tích hình chóp ấy với quan niệm nó là hình chóp với đỉnh  $S' \neq S$ ).

Tính diện tích đáy đối diện với đỉnh S. Từ đó ta có chiều cao kẻ từ S cần tìm.

Xét một vài ví dụ minh họa sau đây.

**Thí dụ 1: Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004**

Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thoi ABCD có SO vuông góc với đáy và O là giao điểm của AC và BD. Giả sử  $SO = 2\sqrt{2}$ , đường chéo  $AC = 4$ , cạnh đáy  $AB = \sqrt{5}$ . Gọi M là trung điểm của SC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

**Giải**

Gọi M là trung điểm của SC. Khi đó ta có  $OM \parallel SA \Rightarrow SA \parallel (OMB)$

$$\Rightarrow d(SA, MB) = d(SA, (OMB))$$

$$= d(S, (OMB)) = d(C, (OMB)) \quad (1)$$

(do MS = MC)

$$\text{Ta có: } OB^2 = AB^2 - OA^2 = 1 \Rightarrow OB = 1$$

$$\text{Kẻ } MH \perp (ABCD) \Rightarrow MH = \frac{1}{2}SO = \sqrt{2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } V_{M.OBC} &= \frac{1}{3}S_{OBC} \cdot MH = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OB \cdot OC \cdot MH \\ &= \frac{1}{6} \cdot 1 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Ta có: } OM = \frac{1}{2}SA = \frac{1}{2}\sqrt{8+4} = \sqrt{3}.$$

Gọi h là khoảng cách từ C tới (OMB), ta có:

$$V_{C.MOB} = \frac{1}{3}S_{MOB} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}OB \cdot OM \cdot h = \frac{h\sqrt{3}}{6} \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra } \frac{\sqrt{3}h}{6} = \frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow h = \frac{2\sqrt{6}}{3}. \quad (4)$$

$$\text{Từ (1) và (4) đi đến: } d(SA, MB) = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác ABC vuông tại B. Giả sử  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ ;  $AC = 3a$ . Gọi M là trung điểm của A'C' và I là giao điểm của AM và A'C.

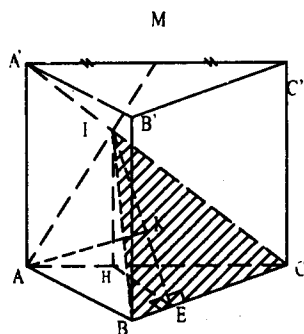
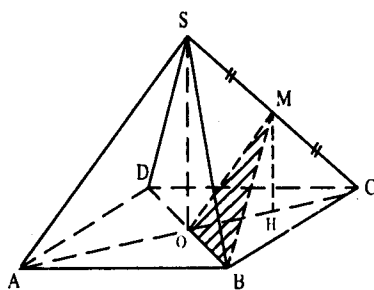
1. Tìm thể tích tứ diện IABC.

2. Tìm khoảng cách từ A tới mặt phẳng IBC.

**Giải**

1. Theo thí dụ 3, loại 1, §1, ta có

$$V_{IABC} = \frac{4a^3}{9}.$$





2. Kẻ  $IH \perp AC \Rightarrow IH \perp (ABC)$

Kẻ  $HE \perp BC \Rightarrow IE \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc)

Ta có:  $\frac{HE}{AB} = \frac{CH}{CA} = \frac{CB'}{CA'} = \frac{2}{3} \Rightarrow HE = \frac{2}{3} AB = \frac{2a}{3}$ .

Do vậy  $IE = \sqrt{IH^2 + HE^2} = \sqrt{\frac{16a^2}{9} + \frac{4a^2}{9}} = \frac{2a\sqrt{5}}{3}$ .

Kẻ  $AK \perp (IBC)$ , ta có  $V_{I,ABC} = V_{A,IBC} = \frac{1}{3} S_{IBC} AK$

Từ câu 1 suy ra:

$$\frac{4a^2}{9} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} a \cdot \frac{2a\sqrt{5}}{3} \cdot AK \Rightarrow AK = d(A, (IBC)) = \frac{2a\sqrt{5}}{5}$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh đại học khối D – 2007)**

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông trong đó  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ ;  $BA = BC = a$ ;  $AD = 2a$ . Giả sử SA vuông góc với đáy ABCD và  $SA = a\sqrt{2}$ . Gọi H là hình chiếu của A trên SB.

1. Chứng minh SCD là tam giác vuông
2. Tính khoảng cách từ A tới mặt phẳng (SCD).

**Giải**

1. Do  $AB \perp BD \Rightarrow SB \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc)

Dựa vào định lý Pitago trong các tam giác vuông SAB, ABC, SAD dễ dàng tính được:

$$SB^2 = 3a^2; SC^2 = 4a^2; SD^2 = 6a^2.$$

$$\text{Từ đó có: } DC^2 = 2a^2.$$

Vậy suy ra:  $SD^2 = SC^2 + DC^2 \Rightarrow SCD$  là tam giác vuông tại C  $\Rightarrow$  đpcm.

2. Kẻ HK và BF cùng vuông góc với mặt phẳng (SCD)  $\Rightarrow HK \parallel BF$  và S, K, F thẳng hàng. Ta

$$\text{có: } \frac{HK}{BF} = \frac{SH}{SB} \quad (1)$$

Trong tam giác vuông SAB có:

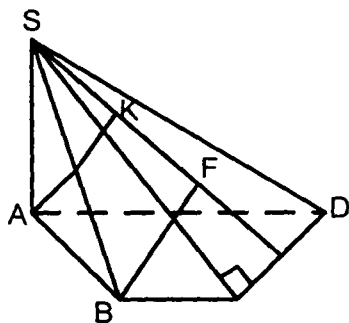
$$SA^2 = SH \cdot SB \Rightarrow SH = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Vậy từ (1) có } \frac{HK}{BF} = \frac{\frac{2a\sqrt{3}}{3}}{a\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \Rightarrow HK = \frac{2}{3} BF \quad (2)$$

Ta có:

$$V_{S,BCD} = \frac{1}{3} S_{BCD} \cdot SA = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot CD \sin 135^\circ \cdot SA = \frac{1}{6} a \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} a\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6}.$$

$$\text{Mặt khác: } V_{S,BCD} = \frac{1}{3} S_{SCD} \cdot BF = \frac{1}{6} SC \cdot CD \cdot BF.$$



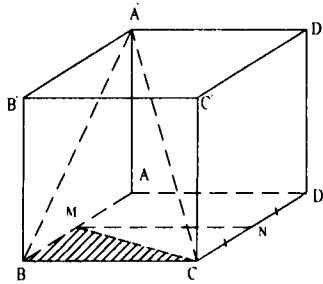
$$\text{Từ đó ta có: } \frac{a^3\sqrt{2}}{6} = \frac{1}{6} 2a \cdot a\sqrt{2} \cdot BF \Rightarrow BF = \frac{a}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Từ (2) và (3) suy ra: } HK = d(H, (SCD)) = \frac{a}{3}.$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**

Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$  có cạnh bằng 1. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A'C$  và  $MN$

**Giải**



$$\text{Ta có } MN \parallel BC \Rightarrow MN \parallel (A'BC) \\ \Rightarrow d(MN, A'C) = d(MN, (A'BC)) = d(M, (A'BC)) \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } V_{A'MBC} = \frac{1}{3} S_{MBC} \cdot A'A = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{12} \quad (1)$$

Vì  $CB \perp (BAA'B) \Rightarrow CB \perp BA' \Rightarrow A'BC$  là tam giác vuông tại  $B$ .

$$\text{Từ đó: } V_{A'MBC} = V_{M.A'BC} = \frac{1}{3} S_{A'BC} \cdot h \quad (2)$$

Từ (1), (2) ta có

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot A'B \cdot BC \cdot h = \frac{1}{6} \sqrt{2} h \Rightarrow h = \frac{\sqrt{2}}{4} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) suy ra: } d(MN, A'C) = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

### §3. CÁC BÀI TOÁN VỀ THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN CÓ KẾT HỢP VỚI VIỆC TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT VÀ NHỎ NHẤT

Đây có thể xem như một bài toán rất cơ bản mặc dù nó chưa một lần xuất hiện trong các bài thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng từ năm 2002 đến nay (cho dù bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất với hàm số hầu như năm nào cũng có mặt trong các đề thi tuyển sinh).

Các bài toán này có nội dung rất cơ bản như sau: Thể tích khối đa diện trong các dạng toán này phụ thuộc một tham số nào đó (tham số có thể là góc, hoặc là độ dài cạnh), bài toán đòi hỏi xác định giá trị của tham số để thể tích nhận giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất.

Với các bài toán này được giải theo các bước sau:

- Bước 1: Chọn tham số, thực chất là chọn ẩn. Ẩn này có thể là góc  $\alpha$  thích hợp trong khối đa diện, hoặc là một yếu tố độ dài nào đấy.

- Bước 2: Với ẩn số được chọn ở bước 1, ta coi đó như là các yếu tố đã cho để tính thể tích  $V$  của khối đa diện theo các phương pháp đã biết.

- Bước 3: Đến đây nhiệm vụ của bài toán hình học xem như đã “kết thúc”. Ta có một hàm số  $f(x)$  với  $x \in D$  mà cần tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của nó. Dùng bất đẳng thức hoặc sử dụng tính đồng biến và nghịch biến của hàm số thông qua việc khảo sát đạo hàm số.



**Thí dụ 1:**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD mà khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (SBC) bằng  $2a$ . Với giá trị nào của  $\alpha$ , với  $\alpha$  là góc giữa mặt phẳng bên và đáy của hình chóp, thì thể tích của khối chóp là nhỏ nhất? Tìm giá trị nhỏ nhất đó.

**Giải**

Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AD, BC.

Ta có  $\widehat{SNM} = \alpha$ .

Do DA//BC  $\Rightarrow$  AD//(SBC)

$\Rightarrow d(A, (SBC)) = d(M, (SBC)) = MH = 2a$ .

ở đây:  $MH \perp SN$  ( $H \in SN$ )

(Chú ý vì  $(MNS) \perp (SBC)$  nên  $MH \perp (SBC)$ ).

Ta có  $MN = \frac{MH}{\sin \alpha} = \frac{2a}{\sin \alpha}$ , từ đó

$$SO = ON \tan \alpha = \frac{a}{\sin \alpha} \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{a}{\cos \alpha}.$$

Do đó

$$V_{S.ABCD} = \frac{1}{3} \left( \frac{2a}{\sin \alpha} \right)^2 \frac{a}{\cos \alpha} = \frac{4a^3}{3 \sin^2 \alpha \cos \alpha} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra  $V_{S.ABCD}$  bé nhất khi và chỉ khi  $\sin^2 \alpha \cos \alpha$  lớn nhất.

Xét biểu thức  $P = \sin^2 \alpha \cos \alpha = \cos(1 - \cos^2 \alpha) = \cos \alpha - \cos^3 \alpha$  (2)

Từ (2) dẫn đến xét hàm số  $y = x - x^3$  với  $0 < x < 1$ .

Ta có  $y' = 1 - 3x^2$  và ta có bảng biến thiên sau:

x	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
y'	0		+	0
y				

$$\text{Từ đó } y_{\max} = y\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Vậy:  $V_{S.ABCD}$  nhận giá trị bé nhất bằng  $\frac{4a^3}{3 \cdot \frac{2\sqrt{3}}{9}} = 2\sqrt{3}a^3$  khi và chỉ khi  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Thí dụ 2:**

Hình chóp S.ABC có đáy là tam giác vuông cân đỉnh C và SA vuông góc với đáy (ABC). Giả sử  $SC = a$ . Hãy tìm góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABD) sao cho thể tích khối chóp là lớn nhất.

**Giải**

Ta thấy ngay  $\widehat{SCA} = \alpha$ ,  $SA = a \sin \alpha$  và  $AC = a \cos \alpha$ .

$$\text{Suy ra: } V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \frac{a^2 \cos^2 \alpha}{2} a \sin \alpha = \frac{a^3}{6} \cos^2 \alpha \sin \alpha \quad (1)$$

Từ (1) suy ra:  $V_{SABC}$  nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi biểu thức

$P = \cos^2 \alpha \sin \alpha$  nhận giá trị lớn nhất. Vì  $\sin \alpha > 0$ , nên  $P_{\max} \Leftrightarrow P_{\max}^2$

$\Leftrightarrow (1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin^2 \alpha$  đạt giá trị lớn nhất.

$$\text{Ta có } (1 - \sin^2 \alpha)^2 \sin^2 \alpha = \frac{(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha)}{2}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, thì

$$(1 - \sin^2 \alpha)(1 - \sin^2 \alpha)(2 \sin^2 \alpha) \leq \left[ \frac{(1 - \sin^2 \alpha) + (1 - \sin^2 \alpha) + 2 \sin^2 \alpha}{3} \right]^3 = \frac{8}{27}.$$

$$\text{Từ đó: } P_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{9} \Leftrightarrow 1 - \sin^2 \alpha = 2 \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$\text{Vậy } V_{SABC} \text{ nhận giá trị lớn nhất bằng } \frac{a\sqrt{3}}{27} \Leftrightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

#### §4. CÁC BÀI TOÁN VỀ SO SÁNH THỂ TÍCH

Các bài toán thuộc loại này thường có dạng sau đây: Cho một khối đa diện và một mặt phẳng (P). Mặt phẳng này cắt khối đa diện theo một thiết diện ( $\alpha$ ) nào đó. Thiết diện ( $\alpha$ ) sẽ chia khối đa diện thành hai phần có thể tích lần lượt là  $V_1$  và  $V_2$ .

Bài toán đòi hỏi tìm tỉ số  $\frac{V_1}{V_2}$  tức là so sánh thể tích hai phần bị chia ra. Nói riêng

nếu  $\frac{V_1}{V_2} = 1$ , ta nói thiết diện ( $\alpha$ ) chia khối đa diện thành hai phần tương đương, tức là có thể tích bằng nhau.

Cần lưu ý rằng mặc dù các bài toán trong kỳ thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng không có dạng trực tiếp như thế, nhưng thực chất nhiều bài toán đều sử dụng đến việc so sánh thể tích này. Thật vậy, trong các thí dụ 1, 2, 4 loại 2 §1, để tính thể tích khối đa diện theo yêu cầu, ta không trực tiếp tính nó mà thông qua một khối trung gian, sau đó tìm tỉ số giữa thể tích khối đa diện cần tính với thể tích khối trung gian này. Từ thể tích khối trung gian (mà việc tính dễ dàng hơn) ta suy ra kết quả cần tính. Như thế *thực chất của các thí dụ này là giải một bài toán về so sánh thể tích*.

Các bài toán về so sánh thể tích có lược đồ chung để giải như sau:

- Xác định thiết diện.
- Chọn một trong hai phần để tìm thể tích.



- Với phần được chọn ra để so sánh thể tích của nó với  $V$  là thể tích của khối đa diện ban đầu. Giả sử ta tính được:

$$V_1 = kV \quad (0 < k < 1)$$

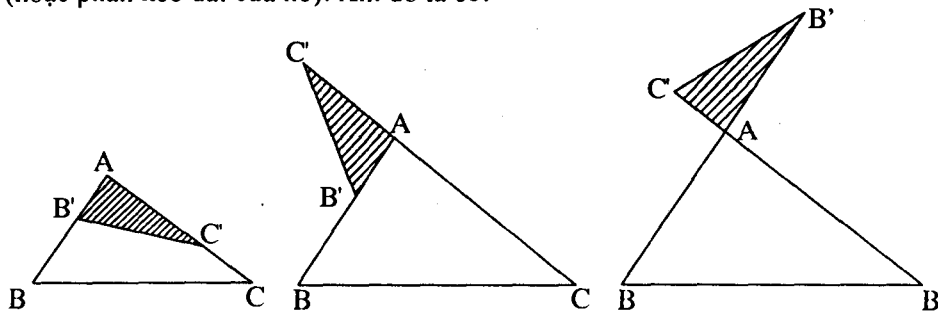
Khi đó tỉ số cần tìm là  $\frac{V_1}{V_2} = \frac{k}{1-k}$ .

Trong mục này ta luôn sử dụng hai kết quả cơ bản hiển nhiên như sau:

1/ Bài toán cơ bản trình bày trong phần mở đầu của loại 2 §1.

2/ Kết quả quen biết sau đây của hình học phẳng.

Cho tam giác  $ABC$ ,  $B'$  và  $C'$  lần lượt là các điểm trên các cạnh  $AB$  và  $AC$  (hoặc phần kéo dài của nó). Khi đó ta có:



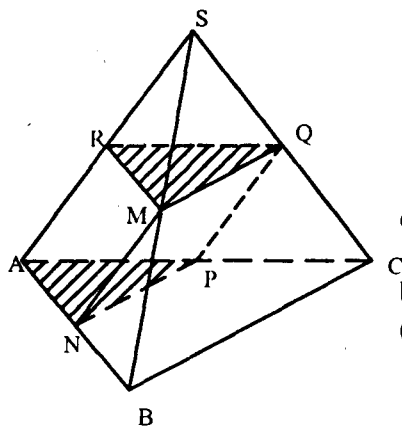
$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{AB'}{AB} \cdot \frac{AC'}{AC}.$$

Để lấy làm ví dụ minh họa cho mục này, có thể sử dụng các thí dụ 1, 2, 4 loại 2 §1. Ở đây xét thêm các ví dụ có dạng “trực tiếp” đòi hỏi so sánh thể tích của hai phần khối đa diện bị chia bởi một thiết diện ( $\alpha$ ) cho trước.

**Thí dụ 1:**

Cho hình chóp  $S.ABC$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $SB$ . Dựng thiết diện với hình chóp qua  $M$ , song song với  $SA$  và song song với  $BC$ . Chứng minh thiết diện chia khối chóp thành hai phần tương đương.

**Giải**



Kẻ  $MN \parallel SA$  ( $N \in AB$ ),  $MQ \parallel BC$  ( $Q \in SC$ )

Kẻ  $NP \parallel BC$  ( $P \in AC$ )  $\Rightarrow QP \parallel SA$ .

Thiết diện là hình bình hành  $MNPQ$ .

Dễ thấy  $M, N, Q, P$  lần lượt là trung điểm của  $SB, AB, AC$  và  $SC$ .

Gọi  $V_1$  là thể tích phần hình chóp nằm bên trái thiết diện  $MNPQ$ . Từ  $M$  kẻ  $MR \parallel AB$  ( $R \in SA$  và có  $RS = RA$ ).

Ta có  $RMQ.ANP$  là hình lăng trụ và có:

$$V_1 = V_{S.RMQ} + V_{RMQ.ANP} \quad (1)$$

(P) qua AC' và song song với BD cắt các cạnh SB, SD của hình chóp lần lượt tại B' D'. Tìm thể tích hình chóp S.AB'C'D'.

Đáp số:  $\frac{a^3\sqrt{3}}{18}$ .

**Bài 7:** Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a. Qua trung điểm I của cạnh AB dựng đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên (d) lấy điểm S sao cho  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ . Tìm khoảng cách từ C đến mặt phẳng (SAD).

Đáp số:  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

**Bài 8:**

Cho hình chóp S.ABC có  $SA = 3a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tam giác ABC có  $AB = BC = 2a$ ;  $\widehat{ABC} = 120^\circ$ . Tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).

Đáp số:  $\frac{3a\sqrt{13}}{13}$ .

**Bài 9:**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh bằng a. Gọi K là trung điểm của DD'. Tìm khoảng cách giữa CK và A'D.

Đáp số:  $\frac{a}{3}$ .

**Giải các bài toán và so sánh thể tích**

**Bài 10:**

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C'. Gọi M là trung điểm của AA'. Chứng minh rằng thiết diện C'MB chia lăng trụ thành hai phần tương đương.

**Bài 11:**

Cho hình chóp tam giác S.ABC. Giả sử M, N, P là ba điểm lần lượt trên SA, BC, AB sao cho M, N tương ứng là trung điểm của SA, BC còn  $\frac{AP}{AB} = \frac{1}{3}$ . Thiết diện với hình chóp S.ABC tạo bởi mặt phẳng (MNP) cắt SC tại Q.

1. Chứng minh:  $\frac{SQ}{SC} = \frac{1}{3}$ .

2. Chứng minh thiết diện chia hình chóp thành hai phần tương đương.

**Bài 12:** Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có các mặt bên tạo với mặt phẳng đáy góc  $60^\circ$ .

1. Vẽ thiết diện qua AC và vuông góc với mặt phẳng (SAD).

2. Thiết diện chia khối chóp thành hai phần có thể tích tương ứng là  $V_1, V_2$ .

Tìm tỉ số:  $\frac{V_1}{V_2}$

Đáp số:  $\frac{1}{4}$ .

## Bài giảng số 2

# QUAN HỆ VUÔNG GÓC TRONG KHÔNG GIAN

Các bài toán về quan hệ vuông góc luôn luôn là một chủ đề quen thuộc và không thể thiếu trong mọi bài toán hình học không gian có mặt trong các kì thi nói chung và thi vào Đại học, Cao đẳng nói riêng.

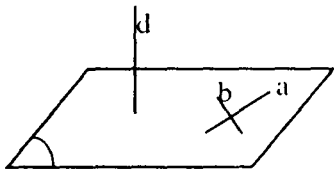
Các nội dung chính trong các bài thi tuyển sinh thuộc dạng toán này thường được đề cập đến là:

- Chứng minh tính vuông góc (bao gồm đường thẳng vuông góc mặt phẳng, hai đường thẳng vuông góc với nhau, hai mặt phẳng vuông góc với nhau).
- Các bài toán tìm khoảng cách: Khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng, khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau...
- Các bài toán xác định góc: Góc giữa hai đường thẳng chéo nhau, góc giữa hai mặt phẳng, góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

Bài giảng này đề cập đến các nội dung đó và những vấn đề liên quan trực tiếp đến nó.

## §1. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH TÍNH VUÔNG GÓC

### 1. Các kiến thức cơ bản cần biết



#### a. Tiêu chuẩn vuông góc

+ Đường thẳng (d) vuông góc với mặt phẳng (P) khi (d) vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của (P).

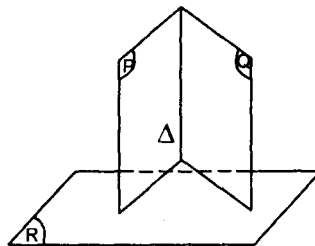
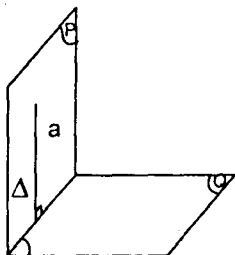
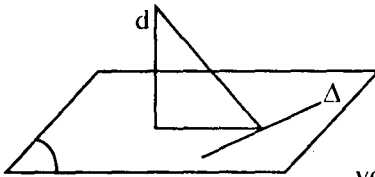
+ Hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau khi góc tạo bởi hai mặt phẳng ấy bằng  $90^\circ$ .

#### b. Các định lý về tính vuông góc

+ Định lý ba đường vuông góc:

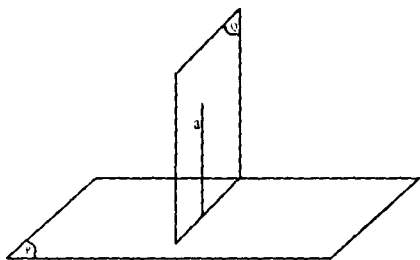
Giả sử  $d \perp (P)$  cho  $\Delta \in (P)$ , đường thẳng.

+ Giả sử (P) và (Q) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau,  $(P) \cap (Q) = \Delta$ . Nếu  $a \in (P)$ ,  $a \perp \Delta$  thì  $a \perp (Q)$





- + Giả sử (P) và (Q) cùng vuông góc với (R), trong đó  $(P) \cap (Q) = \Delta$
- + Nếu  $a \perp (P)$ , thì mặt phẳng (Q) chứa a đều vuông góc với (P).

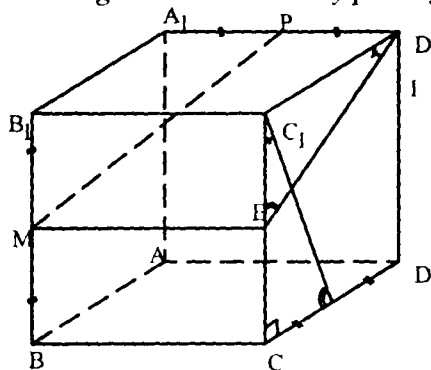


## 2. Các dạng toán thường gặp:

**Loại 1:** Chứng minh đường thẳng vuông góc với đường thẳng.

Đây là một trong những dạng toán hay gặp nhất trong chuyên mục các bài toán về “quan hệ vuông góc” (và có tần suất khá cao trong các bài toán gặp phải ở câu số 3, về hình không gian trong các đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng các năm gần đây từ 2002 – 2009).

Để giải các bài toán này phương pháp chính được sử dụng là:



Để chứng minh đường thẳng d vuông góc với đường thẳng  $\Delta$  ta thường chứng minh d vuông góc với mặt phẳng (Q), trong đó đường thẳng  $\Delta$  nằm trong (Q).

Dĩ nhiên để làm được điều này người ta phải sử dụng điều kiện để một đường thẳng vuông góc với một mặt phẳng trình bày ở trên.

Nói cách khác hai sự kiện chính rất đơn giản và cơ bản sau đây chính là “linh hồn” để giải các bài toán thuộc loại này:

- + Nếu  $a \perp (P)$  thì a vuông góc với mọi đường của (P).
- + Để  $a \perp (P)$  chỉ cần a vuông góc với hai đường thẳng giao nhau của (P)

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B - 2002)**

Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$ . Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của  $BB_1$ ,  $CD$ ,  $A_1D_1$ . Chứng minh  $MP \perp C_1N$ .

**Giải**

Gọi E là trung điểm của  $CC_1$ . Ta có:  $ME \parallel BC \Rightarrow ME \parallel A_1D_1$ .

Gọi (Q) là mặt phẳng  $MED_1A_1 \Rightarrow MP \in (Q)$  (1)

Để thấy hai tam giác vuông  $C_1CN$  và  $D_1C_1E$  bằng nhau

$$\Rightarrow \widehat{CNC_1} = \widehat{C_1ED_1} = \widehat{CC_1N} + \widehat{C_1NC} = 90^\circ \Rightarrow C_1N \perp ED_1 \quad (2)$$

$$\text{Do } ME \parallel BC \Rightarrow ME \perp (CDD_1C_1) \Rightarrow ME \perp C_1N \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra:  $C_1N \perp (Q) \Rightarrow C_1N \perp MP$

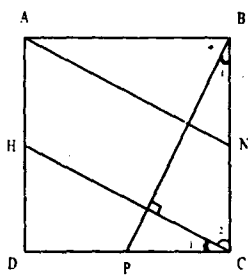
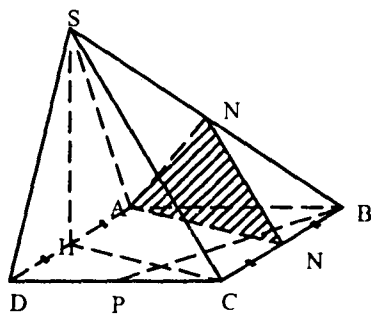
**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAD là tam giác đều và ở trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh  $AM \perp BP$ .

### Giải

Gọi H là trung điểm của AD, do SAD là tam giác đều, nên  $SH \perp AD$ .

Vì  $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp BP$  (1)



Để thấy hai tam giác vuông BPC và CHD là bằng nhau, nên ta có

$$\Rightarrow \hat{B}_1 = \hat{C}_1 \Rightarrow \hat{B}_1 + \hat{C}_2 = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ \Rightarrow BP \perp CH \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $BP \perp (SHC)$  (3)

Do  $HC \parallel AN$ ,  $MN \parallel SC \Rightarrow (SHC) \parallel (MAN)$  (4)

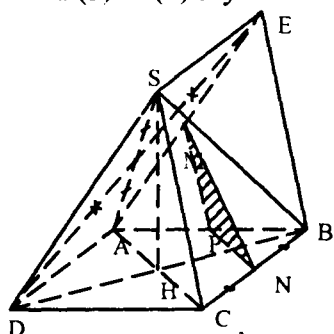
Từ (3) và (4) suy ra:  $BP \perp (MAN) \Rightarrow AM \perp BP$  (đpcm)

### **Thí dụ 3: Đề thi tuyển sinh Đại học khối B-2007**

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của điểm D qua trung điểm của SA. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AE, BC. Chứng minh  $MN \perp BD$ .

### Giải

Ta có SEAD là hình bình hành  $\Rightarrow SE \parallel DA$   
và  $SE = DA \Rightarrow SEBC$  cũng là hình bình hành  
 $\Rightarrow SC \parallel EB$ .



Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó trong các tam giác EAB và ABC ta có  $MP \parallel EB$ ,  $PN \parallel AC$ .

Từ đó suy ra:  $(MNP) \parallel (SAC)$  (1)

Ta có  $DB \perp AC$  và  $BD \perp SH$  (vì  $SH \perp (ABCD)$ )  $\Rightarrow DB \perp (SAC)$  (2).

Kết hợp (1) (2) đi đến:  $DB \perp (MNP)$

$\Rightarrow BD \perp MN \Rightarrow$  đpcm

### **Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D- 2007)**

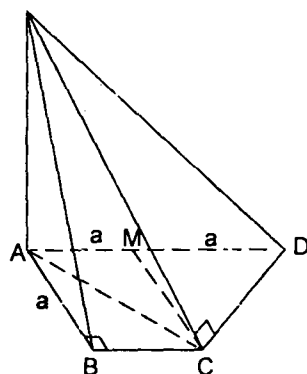
Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy ABCD là hình thang, trong đó  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ ;  $BA = BC = a$ ,  $AD = 2a$ . Giả sử  $SA = a\sqrt{2}$  và SA vuông góc với đáy ABCD. Chứng minh  $SC \perp CD$ .

### Giải

Gọi M là trung điểm của AD ta có:

$$MA = MD = a$$

Do  $MA = BC = a$ ;  $MA \parallel BC \Rightarrow MABC$  là hình vuông (kết hợp với  $AB = a$  và  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ ).

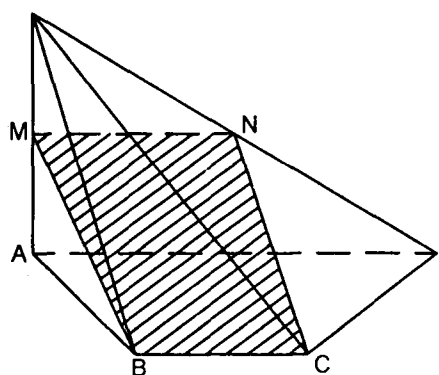


Từ đó ta có:  $MC = a$ .

Vì  $MA = MD = MC = a$

$\Rightarrow$   $\triangle ACD$  là tam giác vuông tại  $C$ , tức là  $CA \perp CD$ .

Do đó  $SC \perp CD$  (định lý ba đường vuông góc).



**Chú ý:** Xét một bài toán tương tự (đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2008):

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang, với  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ ,  $BA = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ;  $SA \perp (ABCD)$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là trung điểm của  $SA$ ,  $SD$  tương ứng. Chứng minh  $BCNM$  là hình chữ nhật.

**Giải**

Thật vậy, vì  $MN \parallel AD$  vì  $MN \parallel BC$ ; và  $MN = BC = a \Rightarrow BCNM$  là hình bình hành.

Do  $AB \perp BC \Rightarrow MB \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc)

$\Rightarrow BCNM$  là hình chữ nhật.

Giả thiết  $SA = a\sqrt{2}$  không dùng trong câu này (nó dùng trong câu hỏi thứ hai của bài thi - xem ở §3).

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B, D – 2009)**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$ , cạnh đáy bằng  $a$ . Cạnh bên bằng  $a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$ ,  $N$ ,  $P$  lần lượt là trung điểm của  $SA$ ,  $SD$ ,  $DC$ . Chứng minh rằng  $MN \perp SP$ .

**Giải**

Vì  $M$ ,  $N$  lần lượt là trung điểm của  $SA$ ,  $SD$  nên  $MN \parallel AD \Rightarrow MN \parallel BC$ .

Do  $S.ABCD$  là chóp đều nên  $SB = SC$ .

Vì  $PB = PC \Rightarrow SP \perp BC \Rightarrow MN \perp SP \Rightarrow$  đpcm.

**Loại 2:** Các bài toán về tính vuông góc của hai mặt phẳng.

Mặc dù các bài toán này trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm 2002 - 2009 là ít hơn nhiều so với các bài toán xét trong loại 1, nhưng nó vẫn là một bài toán cơ bản và không được xem nhẹ.

Phương pháp chính để giải các bài toán này là dựa vào định lý quan trọng sau đây:

Cho hai mặt phẳng  $(P)$  và  $(Q)$  cắt nhau theo giao tuyến  $\Delta$ . Khi đó một đường thẳng nằm trong một mặt phẳng mà vuông góc với  $\Delta$  thì vuông góc với mặt phẳng còn lại.

Ngoài ra, người ta cũng dựa vào định nghĩa của hai mặt phẳng vuông góc để chứng minh tính vuông góc của hai mặt phẳng.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

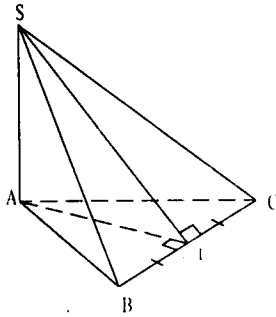
Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và  $SA$  vuông góc với đáy  $(ABCD)$ . Gọi  $M$ ,  $N$  là trung điểm của  $AD$  và  $SC$ . Chứng minh mặt phẳng  $(SAC)$  vuông góc với mặt phẳng  $(SMB)$ .





Vậy với  $\frac{a}{b} = 1$  thì  $(A'BD) \perp (MBD)$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hải Phòng – 2006)**



Cho hình chóp tam giác S.ABC đáy là tam giác đều cạnh a, còn  $SA = 2a$  và SA vuông góc với mặt phẳng đáy (ABC). Gọi I là trung điểm của BC. Chứng minh mặt phẳng (SAI) vuông góc với mặt phẳng (SBC).

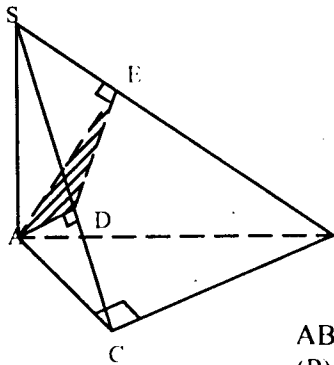
**Giải**

Do  $AB = AC \Rightarrow AI \perp BC$  (1)

Vì  $AB = AC \Rightarrow SB = SC \Rightarrow SI \perp BC$  (2)

Từ (1) (2) suy ra:  $BC \perp (SAI) \Rightarrow (SBC) \perp (SAI) \Rightarrow$  đpcm.

**Thí dụ 4:** Cho hình chóp S.ABC, trong đó đáy ABC là tam giác vuông tại C, hai mặt bên SAC và SAB cùng vuông góc với đáy ABC. Gọi D, E lần lượt là hình chiếu của A trên SC và SB. Chứng minh  $(SAB) \perp (ADE)$ .



**Giải**

Vì  $(SAB) \perp (ABC)$ ;  $(SAC) \perp (ABC)$ , mà  $(SAB) \cap (SAC) = SA$ , nên  $SA \perp (ABC)$ .

Vì  $BC \perp CA$  (giả thiết)  $\Rightarrow BC \perp (SAC)$ .

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$ . Do  $AD \perp SC$ , mà  $SC = (SBC) \cap (SAC) \Rightarrow AD \perp (SBC) \Rightarrow AD \perp SB$  (1).

Từ (1) kết hợp với  $AE \perp SB$  (giả thiết) suy ra:  $SB \perp (ADE) \Rightarrow (SAB) \perp (ADE) \Rightarrow$  đpcm.

**Thí dụ 5:** Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Đoạn SA cố định vuông góc với (P) tại A; M và N là hai điểm tương ứng di động trên các cạnh BC và CD.

Đặt  $BM = u$ ,  $DN = v$ . Chứng minh rằng  $a(u+v) = a^2 + u^2$  là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SMN) vuông góc với nhau.

**Giải**

Giả sử  $(SAM) \perp (SMN)$  (1)

Vì  $SA \perp (P) \Rightarrow (SAM) \perp (P)$  (2)

Do  $(SMN) \cap (P) = MN$ ,

nên từ (1) và (2) suy ra

$MN \perp (SAM) \Rightarrow MN \perp MA$

Đảo lại giả sử  $MN \perp MA$  (3)

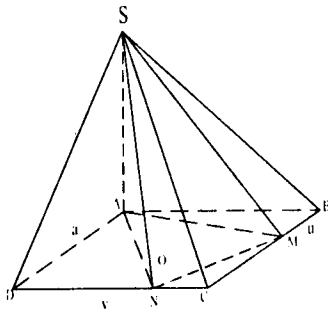
Ta có  $MN \perp SA$  (do  $SA \perp (P)$ )

$\Rightarrow MN \perp (SAM) \Rightarrow (SMN) \perp (SAM)$ .

Vậy  $MN \perp MA$  là điều kiện cần và đủ để  $(SAM) \perp (SMN)$ .

Ta có  $MN \perp MA \Leftrightarrow AN^2 = MA^2 + MN^2$

$\Leftrightarrow a^2 + v^2 = a^2 + u^2 + (a-u)^2 + (a-v)^2 \Leftrightarrow a(u+v) = a^2 + u^2 \Rightarrow$  đpcm.



**Thí dụ 6:**

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Hai nửa đường thẳng Bx và Dy vuông góc với (P) và ở về cùng một phía đối với (P). M và N là hai điểm di động tương ứng trên Bx, Dy. Đặt BM = u, DN = v.

- 1) Tìm mối liên hệ giữa u, v để (MAC)  $\perp$  (NAC).
- 2) Giả sử ta có điều kiện ở câu 1, chứng minh (AMN)  $\perp$  (CMN).

**Giải**

1) Do BA = BC  $\Rightarrow$  MA = MC. Tương tự có NA = NC.

Giả sử AC  $\cap$  BD = O, thì từ trên suy ra MO  $\perp$  AC, NO  $\perp$  AC.

Vì (MAC)  $\cap$  (NAC) = AC nên  $\widehat{MON}$  là góc tạo bởi hai mặt phẳng (MAC) và (NAC).

Ta có (MAC)  $\perp$  (NAC)  $\Leftrightarrow \widehat{MON} = 90^\circ \Leftrightarrow MN^2 = MO^2 + NO^2$

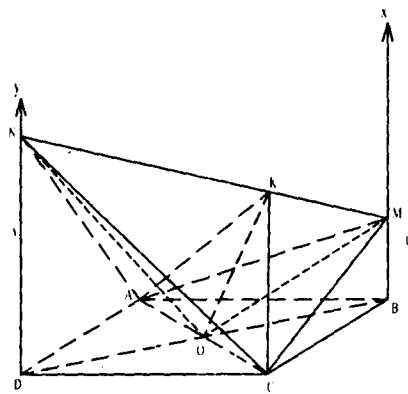
$$\Leftrightarrow (a\sqrt{2})^2 + (v - u)^2 = u^2 + \frac{a^2}{2} + v^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow 2uv = a^2 \quad (1)$$

Vậy (1) là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (MAC) và (NAC) vuông góc với nhau.

2) Giả sử ta có (1)

Vì Bx, Dy cùng vuông góc với (P), nên (BDMN)  $\perp$  (P).

Do AC  $\perp$  DB  $\Rightarrow$  AC  $\perp$  (DBMN).



Kẻ OK  $\perp$  với MN. Theo định lý ba đường vuông góc suy ra AK  $\perp$  MN; CK  $\perp$  MN  $\Rightarrow \widehat{AKC}$  là góc tạo bởi hai mặt phẳng (AMN) và (CMN).

Do có (1) nên trong tam giác vuông NOM tại O, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{OK^2} &= \frac{1}{OM^2} + \frac{1}{ON^2} = \frac{MO^2 + ON^2}{MO^2 \cdot ON^2} \\ \Rightarrow OK^2 &= \frac{MO^2 \cdot ON^2}{OM^2 + ON^2} = \frac{\left(u^2 + \frac{a^2}{2}\right) \left(v^2 + \frac{a^2}{2}\right)}{u^2 + v^2 + a^2} \\ &= \frac{u^2 v^2 + \frac{a^2}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a^4}{4}}{u^2 + v^2 + a^2} \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$OK^2 = \frac{\frac{a^2}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a^4}{4}}{u^2 + v^2 + a^2} = \frac{a^2}{2} \Rightarrow OK = \frac{a\sqrt{2}}{2} \quad (3)$$

Như vậy từ (3) có OK = OA = OC  $\Rightarrow$  AKC là tam giác vuông tại K

$\Rightarrow \widehat{AKC} = 90^\circ \Rightarrow (AMN) \perp (CMN) \Rightarrow$  đpcm.



## §2. CÁC BÀI TOÁN TÌM KHOẢNG CÁCH

Hai loại toán quan trọng nhất của mục này, cũng là hai dạng toán thường xuyên có mặt trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây là:

- 1/ Tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc một đường thẳng).
- 2/ Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau và bài toán về đường thẳng vuông góc chung.

### Loại 1:

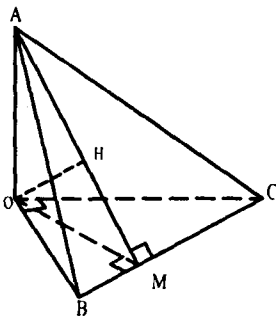
Bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng (hoặc đến một đường thẳng):

Trong mục này chúng tôi trình bày phương pháp trực tiếp để tính các khoảng cách này, mà không dựa vào phương pháp sử dụng thể tích khối đa diện như đã đề cập đến trong bài giảng 1.

Phương pháp giải được tiến hành theo lược đồ chung:

- Xác định chân đường vuông góc trên mặt phẳng (hoặc đường thẳng) mà cần tính khoảng cách từ một điểm cho trước đến nó. Bước này quan trọng ở chỗ: Nhờ có việc xác định này mà cho phép ta có đủ dữ liệu để chuyển sang bước tiếp theo.
- Sử dụng các hệ thức lượng trong tam giác vuông (bao hàm cả định lý Pitago), hoặc lượng giác để tính các khoảng cách cần tìm.

Các bài toán này trong khá nhiều trường hợp dựa vào bài toán cơ bản sau đây:



### Thí dụ 1 (Bài toán cơ bản)

Cho tứ diện OABC, trong đó OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau. Kẻ  $OH \perp (ABC)$ .

- 1) Chứng minh H là trực tâm tam giác ABC.
- 2) Chứng minh hệ thức:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2}.$$

### Giải

- 1) Kẻ  $OH \perp (ABC)$ ,  $AH \cap BC = M$ .

Ta có  $OH \perp BC$  và  $BC \perp OA$

(do  $OA \perp (OBC)$  suy từ  $OA \perp OB, OA \perp OC$ )  $\Rightarrow BC \perp (AOH)$   
 $\Rightarrow BC \perp AH$ .

Lập luận tương tự ta có  $BH \perp AC$ .

Vậy H là trực tâm của tam giác ABC  $\Rightarrow$  đpcm.

- 2) Theo định lý ba đường vuông góc, suy ra  $MO \perp BC$

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông AOM ta có:

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OM^2} \quad (1)$$

Lại theo hệ thức lượng trong tam giác vuông OBC, ta có:

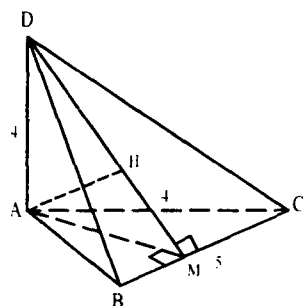
$$\frac{1}{OM^2} = \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Nhận xét:** Đây là một trong các kết quả cơ bản nhất, nhưng có một ứng dụng rất to lớn trong các bài toán về “quan hệ vuông góc” của hình học không gian. Các thí dụ 2, 3 dưới đây sẽ minh họa cho điều ấy.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)**

Cho hình tứ diện ABCD có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC), ngoài ra  $AC = AD = 4\text{cm}$ ;  $AB = 3\text{cm}$ ;  $BC = 5\text{cm}$ . Tìm khoảng cách từ A tới mặt phẳng (BCD).



**Giải**

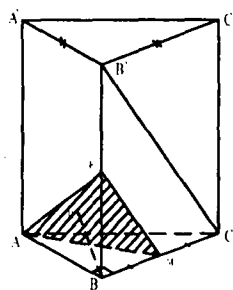
Vì  $AB = 3\text{cm}$ ,  $AC = 4\text{cm}$ ,  $BC = 5\text{cm} \Rightarrow \triangle BAC$  là tam giác vuông tại A. Vậy AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau.

Theo thí dụ 1 ta có:

$$\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AC^2} + \frac{1}{AD^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}$$

$$\Rightarrow AH = \frac{6\sqrt{34}}{17}$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D- 2008)**



Cho lăng trụ đứng đáy  $ABC.A'B'C'$  đáy là tam giác vuông có  $BA = BC = a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi M là trung điểm của BC. Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng AM và  $B'C$ .

**Giải**

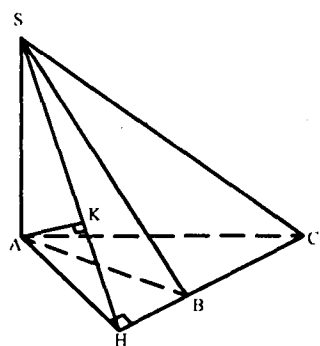
Gọi E là trung điểm  $BB'$ . Ta có  $EM \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AEM) \Rightarrow d(B'C, AM) = d(B'C, (AEM)) = d(C, (AEM)) = d(B, (AEM))$  (vì  $MB = MC$ ).

Do  $\triangle ABC$  là tam giác vuông tại B, nên tứ diện BAEM có BA, BE, BM đôi một vuông góc với nhau. Theo thí dụ 1, nếu gọi BH là chiều cao kẻ từ B của tứ diện trên ( $H \in (AEM)$ ) thì,

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{BA^2} + \frac{1}{BE^2} + \frac{1}{BM^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{\frac{a^2}{2}} + \frac{1}{\frac{a^2}{4}} = \frac{1}{a^2} + \frac{2}{a^2} + \frac{4}{a^2} = \frac{7}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{7}}{7} \Rightarrow d(AM, B'C) = \frac{a\sqrt{7}}{7}$$

**Thí dụ 4:**

Cho hình chóp S.ABCD có  $SA = 3a$ , và SA vuông góc với mặt phẳng ABC. Giả sử  $AB = BC = 2a$ ;  $\widehat{ABC} = 120^\circ$  tìm khoảng cách từ A đến mặt phẳng (SBC).



**Giải:**

Kẻ  $AH \perp BC \Rightarrow SH \perp BC$  (định lý ba đường vuông). Lại có  $BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$ .

Do  $(SBC) \cap (SAH) = AH$ ,

nên nếu kẻ  $AK \perp SH$  ( $K \in SH$ ) thì  $AK \perp (SBC)$ .

Vậy  $d(A, (SBC)) = AK$ .

Ta có  $AH = AB \sin 60^\circ = 2a \frac{\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$ .

Theo hệ thức lượng trong tam giác vuông SAH ta có:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SH^2} = \frac{1}{9a^2} + \frac{1}{3a^2} = \frac{4}{9a^2} \Rightarrow AK = \frac{3a}{2}.$$

Do vậy  $d(A, (SBC)) = \frac{3a}{2}$ .

**Loại 2:** Bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau:

Khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau chính là độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng đó. Vì lẽ đó nếu xác định được đường vuông góc chung ấy thì việc tính độ dài ấy coi như đã được giải quyết. Tuy nhiên, việc xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau không phải là một việc dễ làm. Hơn thế nữa trong rất nhiều bài toán người ta chỉ đòi hỏi tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau mà không yêu cầu xác định cụ thể đường vuông góc chung của chúng. Vì vậy trong thực tế người ta thường chuyển bài toán xác định khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về các bài toán dễ giải hơn sau đây:

1/ Nếu như  $d_1$  song song với mặt phẳng (P), trong đó  $d_2 \in (P)$  khi đó khoảng cách giữa  $d_1$  và  $d_2$  bằng khoảng cách giữa  $d_1$  và (P).

2/ Nếu như  $d_1 \in (P)$ ;  $d_2 \in (Q)$  mà hai mặt phẳng (P) và (Q) song song với nhau thì khoảng cách giữa  $d_1$  và  $d_2$  bằng khoảng cách giữa (P) và (Q). Lưu ý rằng nếu  $d_1 \parallel (P)$  thì khoảng cách giữa  $d_1$  và mặt phẳng (P) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của  $d_1$  đến (P). Tương tự, khoảng cách giữa hai mặt phẳng song song (P) và (Q) bằng khoảng cách từ một điểm bất kì của mặt phẳng này đến mặt phẳng kia.

Như vậy cuối cùng ta lại quy bài toán tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau về bài toán tìm khoảng cách từ một điểm đến một mặt phẳng.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)

Đó chính là thí dụ 3, loại 1 vừa xét ở trên.

**Thí dụ 2:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B - 2007)

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD cạnh đáy bằng a. Gọi E là điểm đối xứng của D qua trung điểm của SA. Gọi M, N tương ứng là trung điểm của AE và BC. Tìm khoảng cách theo a giữa hai đường thẳng MN, AC.

**Giải**

Gọi P là trung điểm của AB. Khi đó  $MP \parallel EB$  (1)

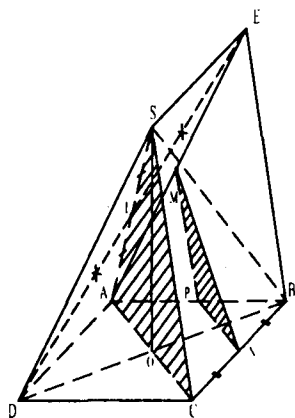
Ta có  $SE \parallel DA$  và  $SE = DA \Rightarrow SE \parallel BC$  và  $SE = BC \Rightarrow SEBC$  là hình bình hành  $\Rightarrow EB \parallel SC$  (2).

Vậy từ (1) và (2) suy ra  $MP \parallel SC$ .

Lại có  $PN \parallel AC$ , nên  $(MPN) \parallel (SAC)$  (3)

Từ (3) suy ra:  $d(MN, AC) = d((MNP), (SAC))$

$$= d(H, (SAC)) \quad (4),$$



$$d(M, (A'BC)) = HO = \frac{1}{4}BD = \frac{a\sqrt{2}}{4},$$

ở đây O là giao điểm của AC và BD. Từ (4) suy ra:  $d(MN, AC) = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A-2006)**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh bằng 1. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

**Giải**

Ta có  $BC \parallel MN$   
 $\Rightarrow MN \parallel (A'BC)$   
 $\Rightarrow d(MN, A'C) = d(MN, (A'BC))$   
 $= d(M, (A'BC))$  (1)

Ta có:

$AI \perp A'B$  ( $AB' \cap A'B = I$ ).  
 Lại có  $BC \perp (BAA'B') \Rightarrow BC \perp AI$ .  
 Từ đó  $AI \perp (A'BC)$ . Vì thế nếu kẻ  $MH \parallel AI$   
 ( $H \in A'B$ ) thì  $MH \perp (A'BC)$  và

$$d(M, (A'BC)) = MH = \frac{1}{2}AI = \frac{a\sqrt{2}}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra:  $d(MN, A'C) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Nhận xét:** Các bạn hãy so sánh bài giải trên với cách giải thí dụ này bằng phương pháp so sánh thể tích đã trình bày trong thí dụ 3, §2 (sử dụng phương pháp thể tích để tìm khoảng cách) của bài giảng 1: Thể tích khối đa diện.

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2004)**

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD đáy là hình thoi cạnh  $AB = \sqrt{5}$ , đường chéo  $AC = 4$ ,  $SO = 2\sqrt{2}$  và SO vuông góc với đáy ABCD, ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BM.

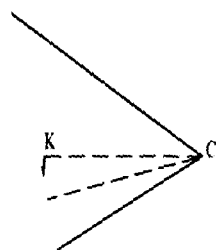
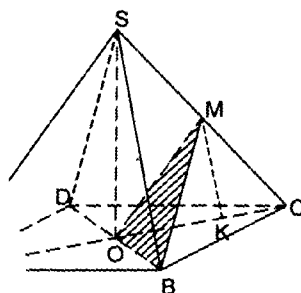
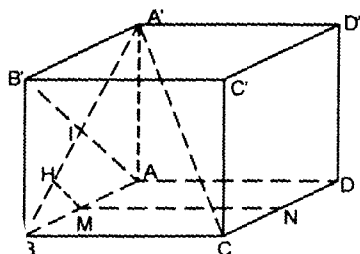
**Giải:**

Ta có  $MO \parallel SA \Rightarrow SA \parallel (OMB)$   
 $\Rightarrow d(SA, BM) = d(SA, (OMB)) = d(S, (OMB))$   
 $= d(C, (OMB))$  (1)

(do  $MS = MC$ ).

Ta có  $BO \perp AC$ ;  $BO \perp SO$  (do  $SO \perp (ABCD)$ )  
 $\Rightarrow BO \perp (SAC)$ .

Kẻ  $CH \perp OM$  ( $H \in OM$ )  $\Rightarrow CH \perp (BOM)$ .  
 (do  $BO \perp (OMC) \Rightarrow (BOM) \perp (MOC)$ ).





Ta có  $MO = \frac{SA}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + 2^2} = \sqrt{3}$ .

Lại có:  $MC = \frac{1}{2}SC = \frac{1}{2}SA = \sqrt{3}$ .

Trong tam giác cân COM đỉnh M kẻ  $MK \perp OC$ , ta có:

$$MK^2 = MO^2 - OK^2 = 3 - 1 = 2 \Rightarrow MK = \sqrt{2}.$$

Trong tam giác OBC, ta có:

$$MK \cdot OC = MO \cdot CH \Rightarrow CH = \frac{\sqrt{2} \cdot 2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \quad (2)$$

Vậy từ (1) và (2) suy ra  $d(SA, BM) = d(C, (MOB))$ .

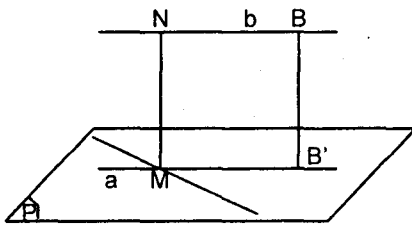
**Nhận xét:** Bạn hãy so sánh cách giải này, với cách giải cũng của thí dụ này nhưng dùng phương pháp “so sánh thể tích” đã được trình bày trong thí dụ 1, §2 của bài giảng số 1: Thể tích khối đa diện.

**Loại 3:** Bài toán xác định đường vuông góc chung:

Như đã nói ở mục trước, bài toán đòi hỏi tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng chéo nhau nói chung không cần xác định đường vuông góc chung.

Tuy nhiên, trong một số bài toán lại đòi hỏi xác định đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau, đó là một yêu cầu cao hơn. Mục này để dành để trình bày cách tìm đường vuông góc chung.

Nguyên tắc chung để giải bài toán như sau: Xác định điểm  $M \in a$ ,  $N \in b$  sao cho  $MN \perp a$ ,  $MN \perp b$ , khi đó  $MN$  là đường vuông góc của cả  $a$  và  $b$ . Vấn đề là ở chỗ làm thế nào để xác định được hai điểm  $M, N$ ?



Phương pháp tổng quát (như đã biết) ta giải như sau:

Dựng mặt phẳng (P) chứa  $a$  và song song với  $b$ . Lấy một điểm  $B$  trên  $b$ , kẻ  $BB' \perp (P)$  ( $B' \in (P)$ ).

Trong (P) qua  $B'$  dựng  $b' \parallel b$ .

Gọi  $M = a \cap b'$ .

Từ  $M$  kẻ  $MN \parallel BB'$  ( $N \in b$ ).

Khi đó  $MN$  là đường vuông góc chung của hai đường thẳng chéo nhau  $a$  và  $b$ . Tuy nhiên, nếu như  $a$  và  $b$  có các cấu trúc đặc biệt (thí dụ như  $a, b$  vuông góc với nhau...) thì ta lại có cách xử lý riêng tương ứng và đơn giản hơn.

**Thí dụ 1:**

Trình bày cách dựng đường vuông góc chung với hai đường thẳng chéo nhau và vuông góc với nhau.

**Giải**

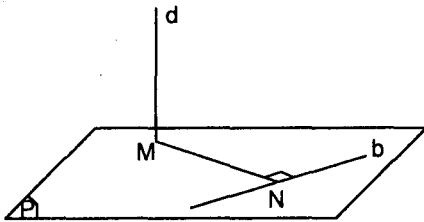
Dựng (P) qua  $b$  và vuông góc với  $a$ .

Giả sử  $a \cap (P) = M$ .

Trong (P) dựng  $MN$  vuông góc với  $b$ .

Khi đó  $MN$  là đường vuông góc của  $a$  và  $b$ .

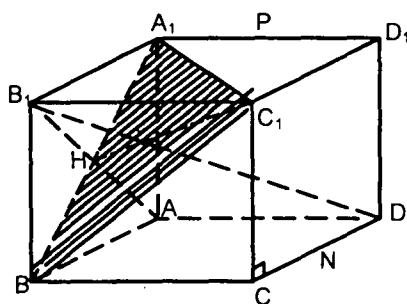
Xem một ứng dụng của thí dụ 1 sau đây:



**Thí dụ minh họa cho thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)**

Cho hình lập phương  $ABCD.A_1B_1C_1D_1$  cạnh  $a$ . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng  $A_1B$  và  $B_1D$ .

**Giải**



Ta có  $AB_1 \perp A_1B$  (vì  $BAA_1B_1$  là hình vuông);  
 $A_1B \perp AD$  (vì  $AD \perp (BAA_1B_1)$ )  
 $\Rightarrow A_1B \perp (B_1AD) \Rightarrow A_1B \perp B_1D$  (1)  
 Vì  $DD_1 \perp (A_1B_1C_1D_1) \Rightarrow DD_1 \perp A_1C_1$ .  
 Do  $A_1B_1C_1D_1$  là hình vuông nên  $A_1C_1 \perp B_1D_1$ .  
 Từ đó  $A_1C_1 \perp (B_1DD_1) \Rightarrow A_1C_1 \perp B_1D$  (2)  
 Từ (1) (2) suy ra:  $B_1D \perp (A_1BC_1)$  (3).  
 Bây giờ ta tìm giao điểm của  $B_1D$  với  $(A_1BC_1)$ .  
 Gọi  $H$  là giao điểm của  $AB_1$  và  $BA_1$ . Trong mặt  
 chéo  $(B_1A_1DA)$  rõ ràng  
 $HC_1 \cap B_1D = G$ .

Do  $B_1H = HA = \frac{1}{2}C_1D \Rightarrow GH = \frac{1}{2}GC_1 \Rightarrow G$  là trọng tâm của tam giác  $A_1BC_1$ .

Vì  $A_1BC_1$  là tam giác đều nên  $GH \perp A_1B$ , còn  $GH \perp B_1D$  vì  $B_1D \perp (A_1BC_1)$ .

Như thế  $GH$  là đường vuông góc chung của  $A_1B$  và  $B_1D$  nên nó chính là khoảng cách giữa  $A_1B$  và  $B_1D$ .

Ta có:

$$GH = \frac{1}{3}C_1H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6} \Rightarrow d(A_1B, B_1D) = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

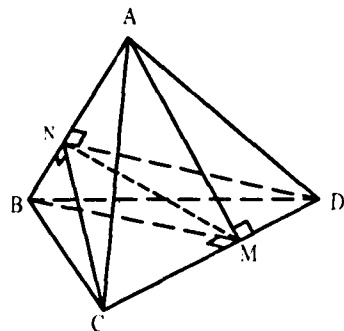
Nhận xét:

Trong thí dụ này  $A_1B \perp B_1D$  nên cách làm trong thí dụ trên chính là sự thực hành các bước đã nêu trong thí dụ 1.

**Thí dụ 2:**

Cho hình tứ diện đều  $ABCD$  cạnh  $a = 6\sqrt{2}$  cm. Hãy xác định và tính độ dài đoạn vuông góc chung của hai đường thẳng  $AB$  và  $CD$ .

**Giải**



Gọi  $M$  và  $N$  tương ứng là các trung điểm của  $AB$  và  $CD$ . Do  $ABCD$  là tứ diện đều, nên ta có  $CM \perp AB$  và  $DM \perp AB \Rightarrow AB \perp (MCD) \Rightarrow AN \perp MN$

Lí luận tương tự có:

$CD \perp (ANB) \Rightarrow CD \perp MN$ .

Vậy  $MN$  là đường vuông góc chung của  $AB$  và  $CD$ .

$$\text{Ta có } MC = MD = \frac{6\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{6}.$$

$$\text{Vậy } MN^2 = MC^2 - CN^2 = (3\sqrt{6})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 36$$

$$\Rightarrow MN = 6\text{cm}.$$

**Thí dụ 3:**

Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông tại B,  $AB = a$ ,  $BC = 2a$ , cạnh SA vuông góc với đáy và  $SA = 2a$ . Xác định và tính độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng AB và SC.

**Giải:**

Gọi M và N lần lượt là trung điểm của SC và

$$AB. \text{ Ta có: } MA = MB = \frac{SC}{2} \Rightarrow MN \perp AB.$$

Để thấy tam giác vuông SAN bằng tam giác vuông NBC  $\Rightarrow NS = NC \Rightarrow NM \perp SC$ .

Vậy MN là đường vuông góc chung của AB và SC.

Ta có:

$$\begin{aligned} SC^2 &= SA^2 + AC^2 = SA^2 + AB^2 + BC^2 \\ &= 4a^2 + a^2 + 4a^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow SC = 3a \Rightarrow MA = \frac{3a}{2}.$$

$$\text{Do đó } MN^2 = MA^2 - AN^2 = \frac{9a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 2a^2 \Rightarrow MN = a\sqrt{2}.$$

**Thí dụ 4:**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a,  $SA = h$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Định và tính độ dài đường vuông góc chung của hai đường thẳng SC và AB.

**Giải**

Ta có  $AB \perp AD$ ,  $AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAD)$

$\Rightarrow DC \perp (SAD)$  (do  $DC \parallel AB$ ).

Vậy SD là hình chiếu vuông góc của SC trên (SAD).

Trong mặt phẳng SAD, vẽ  $AK \perp SD$  ( $K \in SD$ ).

Trong mặt phẳng (SCD), kẻ  $KE \parallel CD$  ( $E \in SC$ ).

Trong mặt phẳng xác định bởi EK, AB (chú ý  $EK \parallel AB$ ) kẻ  $EF \parallel AK$  ( $F \in AB$ ).

Do  $AB \perp (SAD) \Rightarrow AB \perp AK \Rightarrow AB \perp EF$  (1)

Ta có:  $DC \perp (SAD) \Rightarrow (SDC) \perp (SAD)$ .

Vì  $(SDC) \cap (SAD) = SD$  và  $AK \perp SD$

$\Rightarrow AK \perp (SDC)$ .

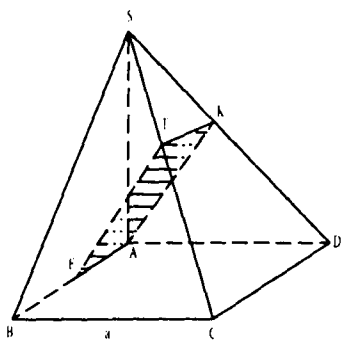
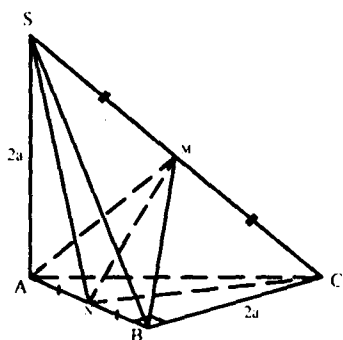
$\Rightarrow AK \perp SC \Rightarrow EF \perp SC$  (2).

Từ (1) (2) suy ra: EF là đường vuông góc chung của SC và AB.

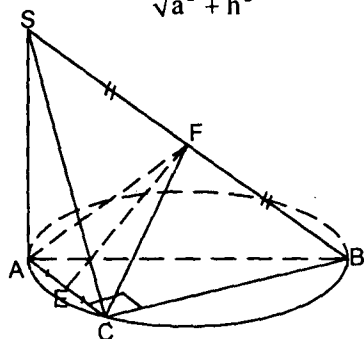
Để thấy:  $EF = AK$  mà:

$$\frac{1}{AK^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SD^2} = \frac{1}{h^2} + \frac{1}{a^2} \Rightarrow EF = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}}$$

**Nhận xét:** Nếu bài toán chỉ đòi hỏi tìm khoảng cách giữa SC và AB thì ta có thể làm như sau:



$$\begin{aligned} &\text{Vì } AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \\ &\Rightarrow d(AB, SC) = d(AB, (SCD)) = d(A, (SCD)) \text{ (do } AK \perp (SCD)) \\ &\Rightarrow AK = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}} \end{aligned}$$



#### Thí dụ 5:

Cho đường tròn đường kính  $AB = 2R$  trong mặt phẳng  $(P)$ .  $C$  là một điểm chạy trên đường tròn. Trên đường thẳng đi qua  $A$  và vuông góc với mặt phẳng  $(P)$  lấy điểm  $S$  sao cho  $SA = a < 2R$ . Gọi  $E$  và  $F$  lần lượt là trung điểm của  $AC$  và  $SB$ .

Xác định vị trí của  $C$  trên đường tròn sao cho  $EF$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$ .

#### Giải

Do  $AC \perp BC \Rightarrow SC \perp BC$  (định lý ba đường vuông góc).

Từ đó suy ra  $FA = FC$  (1)

Như thế (1) đúng với mọi vị trí của  $C$  trên đường tròn.

Để  $EF$  là đường vuông góc chung của  $AC$  và  $SB$  vì thế chỉ cần  $EF \perp SB$ .

Ta có  $EF \perp SB \Leftrightarrow ES = EB$

$\Leftrightarrow \triangle SAE = \triangle BCE \Leftrightarrow BC = SA = a$ .

Vậy  $C$  là đường giao của hai đường tròn: đường tròn đường kính  $AB = 2R$  đã cho và đường tròn tâm  $B$  bán kính  $a$ . Vì  $a < 2R$  nên tồn tại 2 giao điểm  $C$  như vậy.

### §3. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH GÓC GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG CHÉO NHAU, GÓC GIỮA HAI MẶT PHẪNG VÀ GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

Bài toán xác định góc giữa các yếu tố đường và mặt phẳng trong không gian cũng là một trong những dạng toán hay gặp trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây. Có hai loại toán chính sau đây:

1/ Xác định góc  $\alpha$  (có thể là tìm  $\alpha$ , hoặc tìm một hàm số lượng giác nào đó của  $\alpha$ ), ở đây  $\alpha$  là góc giữa hai đường thẳng chéo nhau, giữa hai mặt phẳng, hoặc giữa đường thẳng và mặt phẳng.

2/ Tìm điều kiện để các góc  $\alpha$  nói trên nhận một giá trị cho trước nào đó. (Chú ý nếu  $\alpha = 90^\circ$  ta có các bài toán về quan hệ vuông góc xét trong §1).

Để giải bài toán loại này chỉ cần nắm vững các định nghĩa về các góc trong không gian đã được học kĩ trong sách giáo khoa ở nhà trường phổ thông.

**Loại 1:** Các bài toán xác định góc trong hình học không gian:

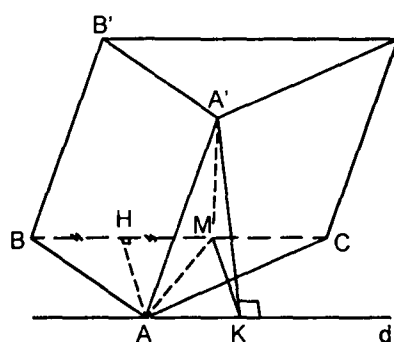
Để giải bài toán loại này ta tiến hành theo hai bước sau đây:

- Giả sử cần xác định góc  $\alpha$  (hoặc một hàm số lượng giác của góc  $\alpha$ ) giữa hai đường thẳng chéo nhau  $d$  và  $d'$ . Chọn một điểm  $A$  thích hợp trên  $d$ . Qua  $A$  vẽ đường thẳng  $d_1 \parallel d'$ . Khi đó góc có đỉnh  $A$  tạo bởi  $d$  và  $d_1$  chính là góc tạo bởi  $d$  và  $d'$ .



- Trong mặt phẳng xác định bởi  $d$  và  $d_1$ , hoàn toàn dựa vào các kiến thức của hình học phẳng để xác định độ lớn của góc  $\alpha$ , hoặc tính hàm số lượng giác của góc  $\alpha$  theo yêu cầu đề bài. Ở đây, thường là các bài toán đơn giản về hệ thức lượng giác trong tam giác, hoặc là các bài toán lượng giác rất cơ bản.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**



Cho lăng trụ  $ABC.A'B'C'$  có độ dài cạnh bên bằng  $2a$ , đáy là tam giác vuông tại  $A$  có  $AB = a$ ,  $AC = a\sqrt{3}$ . Hình chiếu vuông góc của đỉnh  $A'$  trên mặt phẳng  $(ABC)$  là trung điểm của cạnh  $BC$ . Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng  $AA'$  và  $B'C'$ .

**Giải:**

Gọi  $M$  là trung điểm của  $BC$ . Trong mặt phẳng  $(ABC)$ , qua  $A$  kẻ  $d \parallel BC$  (tức là  $d \parallel B'C'$  do  $BC \parallel B'C'$ ),

khi đó:  $\alpha = (\overline{AA'}; \overline{B'C'}) = (\overline{AA'}, d)$

Vì  $BAC$  là tam giác vuông tại  $A$ , nên ta có  $AM = MB = MC = \frac{BC}{2} = a$ .

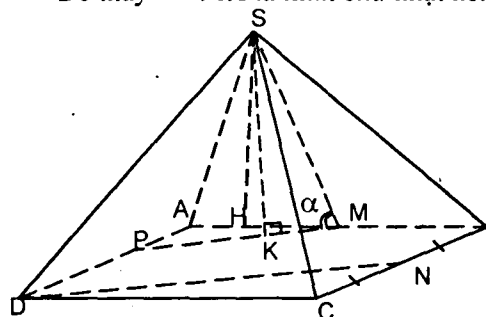
(vì  $BC^2 = AB^2 + AC^2 = a^2 + 3a^2 = 4a^2$ ).

Do đó  $MAB$  là tam giác đều cạnh  $a$ .

Kẻ  $AH \perp BC$ , khi đó  $HM = HB = \frac{a}{2}$ .

Kẻ  $MK \perp d \Rightarrow A'K \perp d$  (định lý ba đường vuông góc).

Dễ thấy  $AHMK$  là hình chữ nhật nên  $AK = HM = \frac{a}{2}$ .



Trong tam giác vuông  $A'AK$  ta có

$$\cos \alpha = \cos \widehat{A'AK} = \frac{AK}{AA'} = \frac{\frac{a}{2}}{2a} = \frac{1}{4}$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2008)**

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình vuông cạnh bằng  $2a$ ,  $SA = a$ ,

$SB = a\sqrt{3}$  và mặt phẳng  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AB, BC$ . Tìm cosin của góc giữa hai đường thẳng  $SM, DN$ .

**Giải**

Ta có  $SA = a$ ;  $SB = a\sqrt{3}$  và  $AB = 2a$  nên  $ASB$  là tam giác vuông tại  $S$  và có  $\widehat{SAB} = 60^\circ$

Vì  $(SAB)$  vuông góc với mặt phẳng đáy nên nếu kẻ  $SH \perp AB$  thì  $SH \perp (ABCD)$ .

Vì  $\widehat{SAB} = 60^\circ$  nên  $SAM$  là tam giác đều  $\Rightarrow HA = HM = \frac{a}{2}$ .

$$4 \cdot \frac{1}{2}$$

Trong mặt phẳng (ABCD) kẻ  $HK \perp MP \Rightarrow SK \perp MP$  (định lý ba đường vuông góc) ta có:  $(SM, DN) = \widehat{SMK} = \alpha$  (do  $(MP//DN)$ )

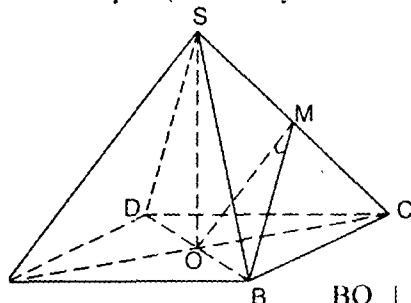
$$\text{Vì thế } \cos \alpha = \frac{MK}{SM} = \frac{MK}{a} \quad (1)$$

Ta có  $MK = MH \cos \widehat{HMK}$

$$= \frac{a}{2} \cos \widehat{AMP} = \frac{a}{2} \frac{MA}{MP} = \frac{a}{2} \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = \frac{a}{\sqrt{5}} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra  $\cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh đại học khối A - 2004)**



Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình thoi cạnh bằng  $\sqrt{5}$ ,  $AC = 4$  và chiều cao của hình chóp là  $SO = 2\sqrt{2}$ , ở đây O là giao điểm của AC và BD. Gọi H là trung điểm của SC. Tìm góc giữa hai đường thẳng SA và BM.

**Giải**

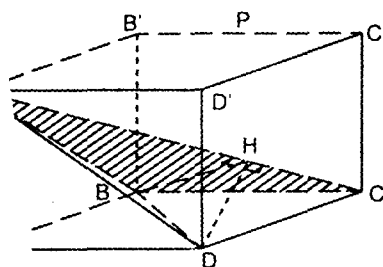
Vì  $MO//SA$  nên  $(SA, BM) = \widehat{OMB} \quad (1)$

$BO \perp AC$  (đáy là hình thoi) và  $BO \perp SO$  (do  $SO \perp (ABCD)$ )  $\Rightarrow BO \perp (SAC) \Rightarrow BO \perp OM$ .

Dễ thấy:  $SA = 2\sqrt{3} \Rightarrow MO = \sqrt{3}; BO = \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2} = 1$ .

Do đó:  $\tan \widehat{OMB} = \frac{OB}{MO} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{OMB} = 30^\circ \Rightarrow (SA, BM) = 30^\circ$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2003)**



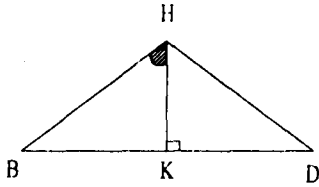
Cho hình lập phương  $ABCD.A'B'C'D'$ . Tìm số đo của góc tạo bởi hai mặt phẳng  $(BA'C)$  và  $(DA'C)$ .

**Giải**

Ta có  $(BA'C) \cap (DA'C) = A'C \Rightarrow A'DC$  là tam giác vuông tại D. Kẻ  $DH \perp A'C$ . Hai tam giác vuông  $A'DC$  và  $A'BC$  bằng nhau vì có chung cạnh huyền  $A'C$  và  $A'B = AD$ , nên suy ra  $BH \perp A'C$ . Vậy BHD chính là góc giữa hai mặt phẳng  $(BA'C)$  và  $(DA'C)$ .

Trong tam giác  $A'DC$  ta có:  $DA' \cdot DC = A'C \cdot DH$ .

$$DH = \frac{DA' \cdot DC}{A'C} = \frac{a\sqrt{2} \cdot a}{a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$



Xét tam giác cân HBD đỉnh H với  $HB = HD = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

và  $BD = a\sqrt{2}$ .

Kẻ  $HK \perp BD \Rightarrow BK = KD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

$$\text{Ta có } \widehat{BHK} = \frac{BK}{BH} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \widehat{BHK} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{HBC} = 120^\circ.$$

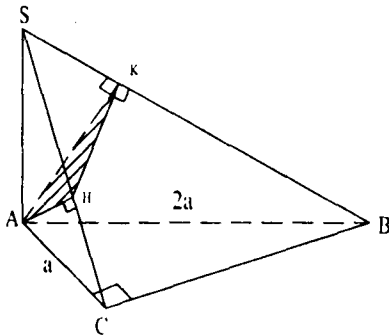
Vậy góc giữa hai mặt phẳng  $(BA'C)$  và  $(DA'C)$  bằng  $60^\circ$ .

*Chú ý:*

Theo định nghĩa, góc giữa hai mặt phẳng  $\leq 90^\circ$ .

**Thí dụ 5:**

Trong mặt  $(P)$  cho tam giác ABC vuông tại C,  $AB = 2a$ ,  $\widehat{CAB} = 60^\circ$ . Đoạn  $SA = a$  và vuông góc với  $(P)$ . Tính  $\sin(\alpha)$ , ở đây  $\alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$



**Giải**

Kẻ  $AH \perp SC$ ,  $AK \perp SB$  ( $H \in SC$ ,  $K \in SB$ ).

Do  $BC \perp AC$ ,  $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAC)$

$\Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$ . Do  $AK \perp SB$  nên

$HK \perp SB$  (định lý ba đường vuông góc)

Vậy  $\widehat{AKH} = \alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng  $(SAB)$  và  $(SBC)$ .

$$\text{Ta có } \sin \alpha = \frac{AH}{AK} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } AS \cdot AC = AH \cdot SC \Rightarrow AH = \frac{a \cdot a}{a\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Lại có } AS \cdot AB = AK \cdot SB \Rightarrow AK = \frac{a \cdot 2a}{a\sqrt{5}} = \frac{2a\sqrt{5}}{5}.$$

$$\text{Thay lại vào (1) ta có: } \sin \alpha = \frac{5a\sqrt{2}}{2 \cdot 2a\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{10}}{4}.$$

**Loại 2:** Các bài toán tìm điều kiện để góc cần tìm bằng một đại lượng cho trước:

Phương pháp để giải loại toán này như sau:

- Xác định góc  $\alpha$  (coi như bài toán cố định – tức là bài toán thuộc loại 1).
- Từ điều kiện yêu cầu về  $\alpha$ , ta có một phương trình đơn giản để xác định một ẩn số đã chọn từ trước. Việc tìm ẩn số này cho phép ta tìm được lời giải của bài toán.

Chú ý rằng nếu  $\alpha = 90^\circ$ , ta có bài toán: Tìm điều kiện để hai mặt phẳng vuông góc với nhau, hoặc hai đường thẳng vuông góc với nhau. Với dạng này bài toán đã được xét trong §1, và đã được đề cập đến trong các bài toán thi tuyển sinh vào Đại học. Cao đẳng (xem đề thi Đại học khối A – 2002).

**Thí dụ 1:**

Trong mặt phẳng (P) cho tam giác ABC vuông tại C,  $AB = 2a$ ,  $\widehat{CAB} = 60^\circ$ , đoạn  $SA = h$  và SA vuông góc với (P). Tìm h sao cho góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) bằng  $60^\circ$ .

**Giải**

Kẻ  $AH \perp SC$  và  $AK \perp SB$  ( $H \in SC$ ;  $K \in SB$ ).

Theo thí dụ 6 loại 1, thì  $\widehat{AKH} = \alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng (SAB) và (SBC). Từ đó:

$$\alpha = 60^\circ \Leftrightarrow \sin \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \frac{AK}{AH} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } AH = \frac{AS \cdot AC}{SC} = \frac{ah}{\sqrt{a^2 + h^2}},$$

$$AK = \frac{AS \cdot AB}{SB} = \frac{2ah}{\sqrt{2a^2 + h^2}}$$

$$\text{Thay vào (1) suy ra: } \frac{\sqrt{4a^2 + h^2}}{2\sqrt{a^2 + h^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow 4a^2 + h^2 = 3a^2 + 3h^2 \Leftrightarrow h = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

**Thí dụ 2:**

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Đoạn SA cố định vuông góc với (P) tại A. M, N lần lượt là hai điểm di động trên cạnh BC và CD. Đặt  $BM = u$ ;  $DN = v$ . Chứng minh rằng  $a(u + v) + uv = a^2$  là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc  $45^\circ$ .

**Giải**

Ta có  $(SAM) \cap (SAN) = SA$

Vì  $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AM \perp SA, AN \perp SA$

Do vậy  $\widehat{MAN} = \alpha$  là góc giữa hai mặt phẳng (SAM) và (SAN). Từ đó:

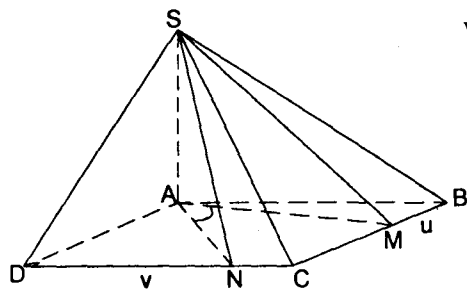
$$\alpha = 45^\circ \Leftrightarrow \widehat{NAD} + \widehat{BAM} = 45^\circ$$

$$\Leftrightarrow \tan(\widehat{NAD} + \widehat{BAM}) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\tan \widehat{NAD} + \tan \widehat{BAM}}{1 - \tan \widehat{NAD} \tan \widehat{BAM}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{v}{u} + \frac{u}{a}}{1 - \frac{uv}{a^2}} = 1$$

$$\Leftrightarrow a(u + a) + uv = a^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$





## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a và  $SA = SB = SC = a$ .

- 1/ Chứng minh mặt phẳng (ABCD) vuông góc với mặt phẳng (SBD).
- 2/ Chứng minh SBD là tam giác vuông tại S.

### Bài 2:

Tứ diện S.ABCD có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi H và K lần lượt là trọng tâm của các tam giác ABC và SBC.

- 1/ Chứng minh SC vuông góc với mặt phẳng (BHK) và  $(SAC) \perp (BHK)$ .
- 2/ Chứng minh  $HK \perp (SBC)$  và  $(SBC) \perp (BHK)$ .

### Bài 3:

Trong mặt phẳng (P) cho hình chữ nhật ABCD. Qua A dựng nửa đường thẳng Ax vuông góc với (P). Lấy S là một điểm tùy ý trên Ax ( $S \neq A$ ). Qua A dựng mặt phẳng (Q) vuông góc với SC. Giả sử (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'.

Chứng minh  $AB' \perp SB$ ;  $AD' \perp SD$  và  $SB \cdot SB' = SC \cdot SC' = SD \cdot SD'$

### Bài 4:

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' đáy là tam giác ABC với  $AB=AC$ ,  $\widehat{BAC} = \alpha$ . Gọi M là trung điểm của AA' và giả sử mặt phẳng (C'MB) tạo với đáy (ABC) một góc  $\beta$ .

- 1/ Chứng minh  $\widehat{C'BC} = \beta$ .
- 2/ Chứng minh  $\tan \frac{\alpha}{2} = \cos \beta$  là điều kiện cần và đủ để  $BM \perp MC'$ .

### Bài 5:

Cho hình chóp S.ABCD là hình vuông cạnh a. có  $SA = h$  và vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Dựng và tính độ dài đoạn vuông góc chung của

- 1/ SB và CD.
- 2/ SC và BD.

Đáp số: 1/ Khoảng cách là  $BC = a$ .

$$2/ \text{Khoảng cách là } OH = \frac{ah\sqrt{2}}{a\sqrt{h^2 + a^2}}, \text{ ở đây O là tâm của đáy.}$$

### Bài 6:

Cho hình chóp tam giác S.ABC có đáy là tam giác đều cạnh 7a, cạnh SC vuông góc với mặt phẳng (ABC) và  $SC = 7a$ . Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BC.

$$\text{Đáp số: } a\sqrt{21}.$$

**Bài 7:**

Trong mặt phẳng (P) cho hình thoi ABCD có tâm là O và cạnh a và  $OB = a\frac{\sqrt{3}}{3}$ . Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng (ABCD) tại O, lấy điểm S sao cho  $SB = a$ .

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng SA và BD.

Đáp số:  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

**Bài 8:**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' có cạnh là a. Gọi E, F và M lần lượt là trung điểm của AD, AB và CC'. Gọi  $\varphi$  là góc giữa hai mặt phẳng (ABCD) và (EFM). Tính  $\cos \varphi$ .

Đáp số:  $\frac{3\sqrt{11}}{11}$ .

**Bài 9:**

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh a. Dựng đoạn SA vuông góc với (P) tại A. Gọi M và N lần lượt là các điểm trên BC và CD. Đặt  $BM = u$ ,  $DN = v$ . Chứng minh rằng  $a(u + v) + \sqrt{3}uv = a^2\sqrt{3}$  là điều kiện cần và đủ để hai mặt phẳng (SAM) và (SAN) tạo với nhau một góc  $30^\circ$ .

## Bài giảng số 3

# CÁC BÀI TOÁN VỀ TỌA ĐỘ VECTƠ TRONG KHÔNG GIAN

Bài giảng này đề cập đến các bài toán liên quan đến tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong không gian. Các dạng toán thường gặp có thể phân làm hai loại:

**Loại 1:** Là các bài toán mà đầu bài cho dưới dạng hình học giải tích không gian, tức là xét trong một hệ tọa độ Đề Các vuông góc Oxyz cho trước. Dạng toán này gợi ý cho người đọc sử dụng công cụ phép tính tọa độ trong không gian.

**Loại 2:** Các bài toán mà đầu bài cho dưới dạng hình học không gian thông thường. Vì thế muốn chuyển sang cách giải sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian thì điều quan trọng bậc nhất là lựa chọn một hệ tọa độ Đề Các vuông góc Oxyz thích hợp nhất với đầu bài, đảm bảo sao cho các phép tính dựa trên hệ tọa độ này phải càng đơn giản càng tốt.

Ta sẽ gặp lại trong bài giảng này rất nhiều bài toán đã xét trong các bài giảng số 1 và số 2 mà ở đó ta sử dụng thuần túy phương pháp tổng hợp để giải một bài toán hình học không gian.

Chúng tôi hi vọng rằng, phối hợp ba bài giảng 1, 2, 3 sẽ cho các bạn một cách nhìn tổng quát về các bài toán hình học không gian và qua đó giúp các bạn tự lựa chọn cho mình một cách giải thích hợp nhất trước một bài toán hình học không gian cần giải.

*Những kiến thức cơ bản nhất và luôn sử dụng đến trong phép tính tọa độ không gian (xem trong sách giáo khoa Hình học 12).*

## §1. CÁC BÀI TOÁN VỀ GÓC VÀ KHOẢNG CÁCH GIỮA HAI ĐƯỜNG THẲNG

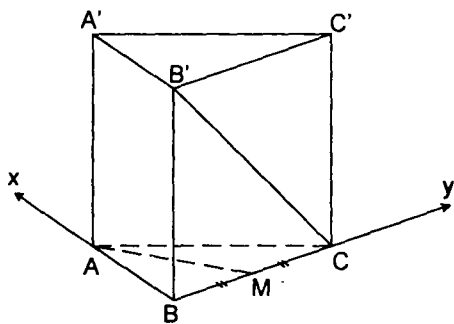
Giải các bài toán này bằng phương pháp “*Phép tính tọa độ không gian*” ta tiến hành theo các bước sau đây:

- Lập một hệ tọa độ thích hợp với đầu bài.
- Tìm tọa độ của các điểm, các vectơ cần thiết.
- Sử dụng các công thức tương ứng đã biết để tính các đại lượng theo yêu cầu đầu bài.

Cần nhấn mạnh rằng, việc xây dựng hệ trục tọa độ là quan trọng nhất, nó đảm bảo cho việc tính toán ở các bước tiếp theo là đơn giản hay phức tạp phụ thuộc vào việc lựa chọn hệ trục tọa độ ban đầu.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)**

Cho lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  đáy là tam giác vuông có  $BA = BC = a$ , cạnh bên  $AA' = a\sqrt{2}$ . Gọi  $M$  là trung điểm  $BC$ . Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng  $AM$  và  $B'C$ .



### Giải

Nhận xét: vì  $\widehat{ABC.A'B'C'}$  là lăng trụ đứng và  $\widehat{ABC} = 90^\circ$  nên ta dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ với gốc tọa độ là B.

Trong hệ trục tọa độ này ta có:

$$B = (0; 0; 0); A = (0; a; 0); C = (a; 0; 0); B' = (0; 0; a\sqrt{2}).$$

$$\text{Từ đó ta có } M = \left(\frac{a}{2}; 0; 0\right).$$

Vì thế theo phép tính tọa độ của vector ta có:

$$\overrightarrow{AM} = \left(\frac{a}{2}; -a; 0\right); \overrightarrow{B'C} = (a; 0; -a\sqrt{2}).$$

$$\text{Áp dụng công thức khoảng cách ta có: } d(AM, B'C) = \frac{[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] \overrightarrow{AB}}{[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}]}. \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{B'C}] = \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & \frac{a}{2} \\ -a\sqrt{2} & a \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & -a \end{vmatrix} = \left(a^2\sqrt{2}; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; a^2\right) \quad (2)$$

Vì  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} = (0; -a; a\sqrt{2})$  nên từ (2) ta có:

$$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}] \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{-a^3\sqrt{2}}{2} + a^2\sqrt{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Thay (2), (3) vào (1) ta có: } d(AM, B'C) = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{3}}{\sqrt{2a^4 + \frac{a^4}{2} + a^4}} = \frac{\frac{a^3\sqrt{2}}{2}}{a^2\sqrt{\frac{7}{2}}} = \frac{a\sqrt{7}}{7}.$$

**Chú ý:** Hãy so sánh lại với cách giải cũng của thí dụ này trong thí dụ 5, §2, loại 1, bài giảng 2 bằng phương pháp tổng hợp của hình học không gian.

### **Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

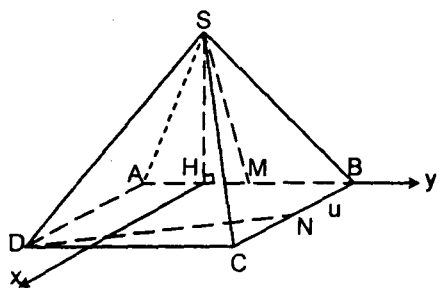
Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh  $2a$ ,  $SA = a$ ,  $SB = a\sqrt{3}$  và (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB, BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

### Giải

Ta có  $\widehat{ASB} = 90^\circ$  và do  $SA = a$ ;  $AB = 2a$   
 $\Rightarrow \widehat{SAB} = 60^\circ$

Vì (SAB)  $\perp$  (ABCD), nên nếu kẻ  $SH \perp AB$  thì  $SH \perp$  (ABCD). Ta có SAM là tam

giác đều nên  $HA = HM = \frac{a}{2}$  và  $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .



Dựng hệ trục tọa độ như hình vẽ (gốc tọa độ là H, Hx//AD). Trong hệ trục này ta có:

$$H = (0;0;0); A = \left(0; -\frac{a}{2}; 0\right); B = \left(0; \frac{3a}{2}; 0\right); S = \left(0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2}\right); D = \left(2a; -\frac{a}{2}; 0\right);$$

$$C = \left(2a; \frac{3a}{2}; 0\right).$$

Từ đó do M và N tương ứng là trung điểm của AB và BC nên có:

$$M = \left(0; \frac{a}{2}; 0\right); N = \left(a; \frac{3a}{2}; 0\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{SM} = \left(0; \frac{a}{2}; -\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \text{ và } \overrightarrow{DN} = (-a; 2a; 0)$$

Theo công thức tính góc ta có:

$$\cos(\widehat{SM, DN}) = \left| \cos(\overrightarrow{SM}, \overrightarrow{DN}) \right| = \frac{\left| 0 \cdot (-a) + \frac{a}{2} \cdot (2a) + \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}\right) \cdot 0 \right|}{\sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{4}} \sqrt{a^2 + 4a^2}} = \frac{a^2}{a^2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

**Nhận xét:**

So sánh với lời giải bằng phương pháp hình học thuần túy của thí dụ này (xem thí dụ 1, loại 1 §3, bài giảng số 2) thì thấy rằng phương pháp hình học thuần túy có vẻ đơn giản hơn!

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**

Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, AB = a, AC = a√3 và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

**Giải**

Gọi M là trung điểm của BC. Ta có:

$$BC = \sqrt{3a^2 + a^2} = 2a$$

$$\Rightarrow BM = MC = BA = a$$

$\Rightarrow$  ABM là tam giác đều cạnh a.

Gọi E là trung điểm BM, ta có

$$AE \perp BC; EM = \frac{a}{2}; AE = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

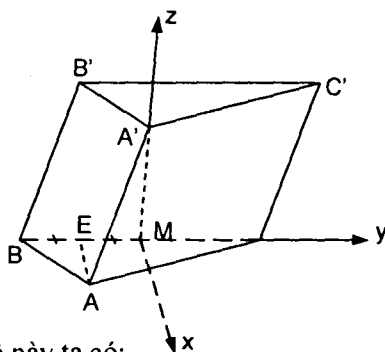
Dựng hệ trục tọa độ Mxyz trong đó

Mx//AE (xem hình vẽ). Trong hệ trục tọa độ này ta có:

$$M = (0;0;0); A = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; 0\right); A' = (0;0;a\sqrt{3}); B(0;-a;0); C(0;a;0).$$

$$\text{Chú ý rằng } A'M = \sqrt{A'A^2 - AM^2} = \sqrt{4a^2 - a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$\text{Từ đó: } \overrightarrow{AA'} = \left(-\frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{2}; a\sqrt{3}\right); \overrightarrow{BC} = (0;2a;0).$$





Vậy ta có  $\cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{B'C'}) = \left| \cos(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BC}) \right|$  (do  $BC \parallel B'C'$ )

$$= \frac{|\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{AA'}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{a^2}{\sqrt{\frac{3a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + 3a^2}} = \frac{a^2}{2a \cdot 2a} = \frac{1}{4}.$$

**Nhận xét:** So sánh với lời giải bằng phương pháp thuần túy cũng của thí dụ trên (xem thí dụ 1, loại 1, §3 – bài giảng 2), ta thấy phương pháp tọa độ của vector phức tạp hơn

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)**

Cho hình chóp tứ giác  $S.ABCD$  có đáy  $ABCD$  là hình thang, trong đó  $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^\circ$ ,  $BA = BC = a$ ,  $AD = 2a$ ,  $SA = a\sqrt{2}$  và  $SA$  vuông góc với mặt phẳng đáy  $ABCD$ . Chứng minh  $SC \perp CD$ .

**Giải**

Do  $SA \perp (ACBD)$  và  $\widehat{BAD} = 90^\circ$  nên dựng hệ trục  $Axyz$  (xem hình vẽ).

Trong hệ trục này, ta có:

$$A = (0; 0; 0); B = (a; 0; 0);$$

$$D = (0; 2a; 0); C = (a; a; 0);$$

$$S = (0; 0; a\sqrt{2}).$$

$$\text{Từ đó: } \overrightarrow{SC} = (a; a; -a\sqrt{2})$$

$$\overrightarrow{CD} = (-a; a; 0)$$

$$\text{Do đó } \overrightarrow{SC} \cdot \overrightarrow{CD} = -a^2 + a^2 = 0 \Rightarrow SC \perp CD \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Cho hình chóp tứ giác đều  $S.ABCD$  cạnh đáy bằng  $a$ . Gọi  $E$  là điểm đối xứng của  $D$  qua trung điểm của  $SA$ . Gọi  $M, N$  lần lượt là trung điểm của  $AE, BC$ .

1) Chứng minh  $MN \perp BD$

2) Tính theo  $a$  khoảng cách giữa hai đường thẳng  $MN, AC$ .

**Giải**

Giả sử  $AC \cap BD = O$ . Xét hệ trục tọa độ  $Oxyz$  (xem hình vẽ). Đặt  $SO = h$ .

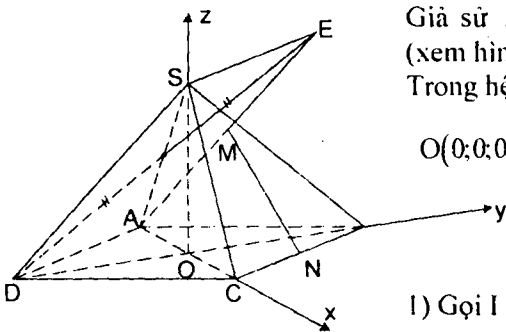
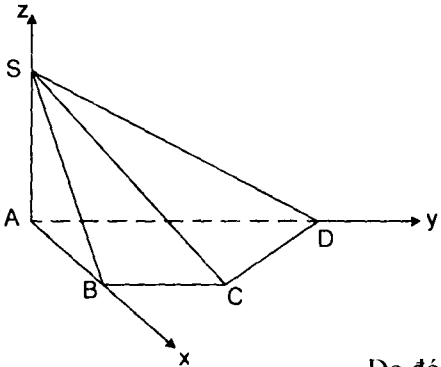
Trong hệ trục này ta có:

$$O(0; 0; 0); B = \left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right); C = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); S = (0; 0; h)$$

$$A = \left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0\right); D = \left(0; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0\right)$$

1) Gọi  $I$  là trung điểm của  $SA$  ta có:

$$I\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; \frac{h}{2}\right) \Rightarrow E\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}; h\right) \Rightarrow M\left(-\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{h}{2}\right)$$



Ta có  $N = \left( \frac{a\sqrt{2}}{4}; \frac{a\sqrt{2}}{4}; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \left( -\frac{3a\sqrt{2}}{4}; 0; \frac{h}{2} \right); \overrightarrow{BD} = (0; -a\sqrt{2}; 0)$ .

Vậy  $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{BD} = 0 \Rightarrow MN \perp BD$  (đpcm).

2/ Ta có  $\overrightarrow{AC} = (a\sqrt{2}; 0; 0)$ . Theo công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(MN, AC) = \frac{|\overrightarrow{[MN, AC]} \cdot \overrightarrow{NC}|}{|\overrightarrow{[MN, AC]}|} \quad (1)$$

Ta có:  $\overrightarrow{[MN, AC]} = \begin{vmatrix} 0 & -\frac{h}{2} & \frac{h}{2} \\ 0 & 0 & a\sqrt{2} \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0; \frac{ah\sqrt{2}}{2}; 0 \end{pmatrix}$ .

Lại có:  $\overrightarrow{NC} = \left( \frac{a\sqrt{2}}{4}; -\frac{a\sqrt{2}}{2}; 0 \right) \Rightarrow \overrightarrow{[MN, AC]} \cdot \overrightarrow{NC} = \frac{a^2h}{4}$ .

Thay lại vào (1) ta có:  $d(MN, AC) = \frac{\frac{a^2h}{4}}{\frac{ah\sqrt{2}}{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ .

**Nhận xét:**

So sánh với lời giải của thí dụ trên nhưng bằng phương pháp hình học thuần túy (xem thí dụ 2, loại 2, §2, bài giảng 2) ta thấy với thí dụ này, cách giải bằng phương pháp thuần túy là đơn giản hơn!

**Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với  $AB = a$ ;  $AD = a\sqrt{2}$ ;  $SA = a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC. Chứng minh rằng (SAC) và (SMN) là hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

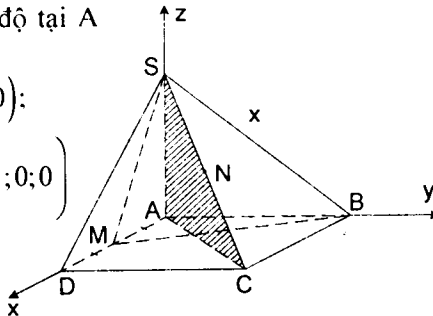
**Giải**

Đặt hệ trục tọa độ Axyz với gốc tọa độ tại A (xem hình vẽ). Trong hệ trục này ta có:

$$A = (0; 0; 0); B = (0; a; 0); D = (a\sqrt{2}; 0; 0);$$

$$C = (a\sqrt{2}; a; 0); S = (0; 0; a); M = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0 \right)$$

$$N = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right).$$

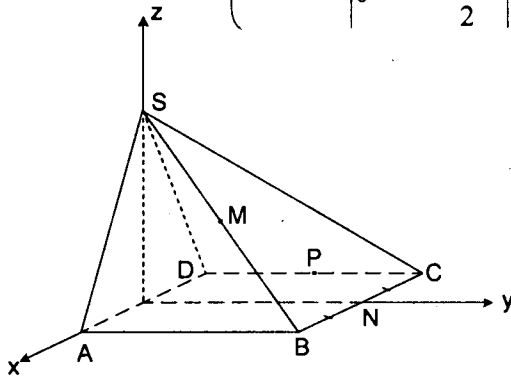


Từ đó:  $\overrightarrow{SA} = (0; 0; -a); \overrightarrow{AC} = (a\sqrt{2}; a; 0); \overrightarrow{SM} = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; -a \right); \overrightarrow{MN} = \left( -\frac{a\sqrt{2}}{2}; a; 0 \right)$

Gọi  $\vec{n}_1, \vec{n}_2$  lần lượt là các vector pháp của (SAC) và (SMB).

$$\text{Ta có } \vec{n}_1 = [\vec{SA}, \vec{AC}] = \left( \begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & 0 \\ 0 & a\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a\sqrt{2} & a \end{vmatrix} \right) = (a^2; -a^2\sqrt{2}; 0),$$

$$\vec{n}_2 = [\vec{SM}, \vec{MB}] = \left( \begin{vmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & \frac{a\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{a\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \frac{a\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{a\sqrt{2}}{2} & a \end{vmatrix} \right) = \left( a^2; \frac{a^2\sqrt{2}}{2}; \frac{a^2\sqrt{2}}{2} \right).$$



Như vậy  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = a^4 - a^4 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \Rightarrow (SAC) \perp (SMB) \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Nhận xét:**

Trong thí dụ 1 loại 2, §1 bài giảng 2 ta đã giải thí dụ này bằng phương pháp hình học không gian thuần túy. So sánh hai cách giải và thấy rằng thí dụ này nên sử dụng phương pháp thuần túy sẽ tốt hơn.

**Thí dụ 7: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2007)**

Cho hình chóp tứ giác S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh bằng a. Mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của SB, BC, CD. Chứng minh rằng  $AM \perp BP$ .

**Giải:**

Gọi H là trung điểm của AD. Do SAD là tam giác đều nên ta có  $SH \perp AD \Rightarrow SH \perp (ABCD)$  (vì  $(SAD) \perp (ABCD)$ ).

Đựng hệ trục tọa độ Hxyz, gốc H như hình vẽ, ở đây  $Hx \parallel AB$ . Trong hệ trục tọa độ này, ta có:

$$H = (0; 0; 0); S = \left( 0; 0; \frac{a\sqrt{3}}{2} \right); B = \left( \frac{a}{2}; a; 0 \right); C = \left( -\frac{a}{2}; a; 0 \right); D = \left( -\frac{a}{2}; 0; 0 \right); A = \left( \frac{a}{2}; 0; 0 \right).$$

$$\text{Ta tính được: } M = \left( \frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right); N = (0; a; 0); P = \left( -\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0 \right).$$

$$\text{Do đó } \vec{AM} = \left( -\frac{a}{4}; \frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{3}}{4} \right) \text{ và } \vec{BP} = \left( -a; -\frac{a}{2}; 0 \right).$$

$$\text{Ta có: } \vec{AM} \cdot \vec{BP} = \frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4} = 0 \Rightarrow AM \perp BP \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Thí dụ 8: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B - 2002)**

Cho hình lập phương ABCD.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> cạnh bằng a.

1/ Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A<sub>1</sub>B và B<sub>1</sub>D.

2/ Gọi M, N, P lần lượt là trung điểm của các cạnh B<sub>1</sub>B, CD, A<sub>1</sub>D<sub>1</sub>. Tính góc giữa hai đường thẳng MP và C<sub>1</sub>N.

### Giải

1/ Đặt hệ trục tọa độ Axyz (xem hình vẽ)

Trong hệ trục này, ta có:

$A(0;0;0); B(a;0;0); C(a;a;0);$

$D(0;a;0); A_1(0;0;a); B_1(a;0;a);$

$C_1(a;a;a); D_1(0;a;a).$

Từ đó ta có:

$$\overrightarrow{A_1B} = (a; 0; -a); \overrightarrow{B_1D} = (-a; a; -a)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}] = \begin{pmatrix} 0 & -a & -a \\ a & -a & -a \\ a & -a & a \end{pmatrix} = (a^2; 2a^2; a^2).$$

Lại có  $\overrightarrow{A_1B_1} = (a; 0; 0)$  do đó

$$d(A_1B, B_1D) = \frac{[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}] \cdot \overrightarrow{A_1B_1}}{[\overrightarrow{A_1B}, \overrightarrow{B_1D}]} = \frac{a^3}{a^2\sqrt{6}} = \frac{a\sqrt{6}}{6}.$$

2/ Do M, N, P là trung điểm của  $B_1B$ ,  $CD$ ,  $A_1D_1$  nên ta có:

$$M\left(a; 0; \frac{a}{2}\right); N\left(\frac{a}{2}; a; 0\right); P\left(0; \frac{a}{2}; a\right).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{MP} = \left(-a; \frac{a}{2}; \frac{a}{2}\right) \text{ và } \overrightarrow{C_1N} = \left(-\frac{a}{2}; 0; -a\right)$$

$$\text{Từ đó: } \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{C_1N} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{2} = 0 \Rightarrow MP \perp C_1N.$$

Vậy góc giữa MP và  $C_1N$  bằng  $90^\circ$ .

*Nhận xét:*

Trong thí dụ 1, loại 3, §2 bài giảng 2, ta đã sử dụng phương pháp hình học thuần túy để giải thí dụ minh họa cho việc: Bài ra dưới dạng hình học không gian (chưa hề có tọa độ), nhưng nếu giải bằng phương pháp tọa độ thì lời giải đơn giản hơn.

### ***Bình luận chung:***

Các bài thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trình bày trong các thí dụ trên đều đưa đến dạng của một bài toán hình học không gian chứ không phải đến dạng một bài hình học giải tích không gian. Chúng tôi đã trình bày các lời giải của các bài thi ấy bằng phương pháp sử dụng phép tính tọa độ trong không gian (cụ thể là phép tính tọa độ đối với các phép tính trên vector như tích vô hướng, tích có hướng của các vector trong không gian, các công thức tính khoảng cách, tính góc giữa hai vector...).

So sánh với lời giải bằng phương pháp sử dụng hình học thuần túy để giải các bài thi trên đã trình bày trong bài giảng số 2 ta nhận thấy: Nhìn chung hai phương pháp giải mỗi phương pháp có một lợi thế riêng:

- Phương pháp tọa độ lời giải có định hướng rõ ràng, mặc dù tính toán có thể hơi phức tạp hơn nhưng dễ áp dụng hơn và vẫn được chấp nhận.

- Phương pháp dùng hình học thuần túy, học sinh cần sử dụng thành thạo các kiến thức của hình học không gian để vận dụng vào bài giải của mình (điều này không phải mọi em học sinh đều nhìn ra). Tuy nhiên nếu biết cách giải, thì lời giải

ẽ có phần gọn gàng hơn, tránh được các tính toán, điều mà các em học sinh bây giờ có kĩ thuật tính toán không được thành thạo (và vì thế họ ngại tính toán).

Có thể thấy với hai thí dụ 5 và 6 phương pháp sử dụng hình học thuần túy gọn gàng hơn. Các thí dụ còn lại hai phương pháp giải có thể xem là tương đương. Sự lựa chọn phương pháp giải với các thí dụ này còn phụ thuộc vào sở trường của người giải. Còn trong thí dụ 8 thì ngược lại, dùng phương pháp tọa độ để giải lại gọn gàng hơn.

Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày các thí dụ mà đầu bài được ra dưới dạng tọa độ (tức là dưới dạng của một bài toán hình học giải tích không gian). Dưới dạng này dĩ nhiên tạo ra cảm giác ban đầu cho người làm bài là nên sử dụng phương pháp tọa độ trong không gian để giải nó.

**Thí dụ 9: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A-2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0;0;0), B(1;0;0); D(0;1;0); A'(0;0;1). Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD.

Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng A'C và MN.

**Giải**

Ta có C = (1;1;0) từ đó suy ra:

$$M = \left(\frac{1}{2}; 0; 0\right); N = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right).$$

Ta cũng có:  $\overrightarrow{A'C} = (1; 1; 1)$ ,  $\overrightarrow{MN} = (0; 1; 0)$

Từ đó theo công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(A'C, MN) = \frac{|\overrightarrow{A'M} \cdot [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]|}{\|[\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}]\|} \quad (1).$$

$$\text{Để thấy } [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1; 0; 1).$$

$$\text{Vì } \overrightarrow{A'M} = \left(\frac{1}{2}; 0; -1\right) \text{ nên ta có: } \overrightarrow{A'M} \cdot [\overrightarrow{A'C}, \overrightarrow{MN}] = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Thay lại (1) ta có: } d(A'C, MN) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}.$$

**Nhận xét:**

Từ dạng của đầu bài, ta thấy ngay việc sử dụng phương pháp tọa độ đã giải là hoàn toàn tự nhiên. Phép tính như đã trình bày cũng đơn giản.

- Thí dụ này đưa ra dưới dạng hình học giải tích nhưng đã được giải bằng phương pháp hình học thuần túy trong thí dụ 3, loại 2, §2 – bài giảng 2. Điều lí thú là phép giải bằng phương pháp hình học thuần túy lại có phần đơn giản hơn.

**Thí dụ 10: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC và BD cắt nhau tại gốc tọa độ. Biết A = (2;0;0), B(0;1;0), S(0;0;2√2). Gọi M là trung điểm của SC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng SA, BM.

**Giải**

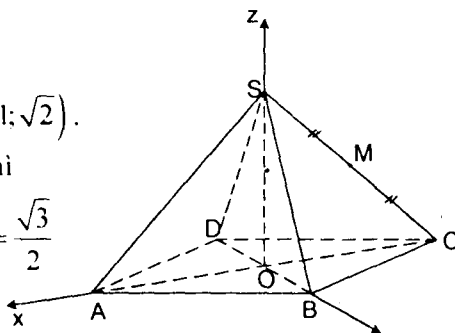
Ta có  $C = (-2; 0; 0) \Rightarrow M = (-1; 0; \sqrt{2})$

Vì vậy:  $\vec{SA} = (2; 0; -2\sqrt{2}); \vec{BM} = (-1; -1; \sqrt{2})$ .

Gọi  $\alpha$  là góc nhọn tạo bởi  $\vec{SA}$  và  $\vec{BM}$ , thì

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{SA}| |\vec{BM}|} = \frac{|-2 - 4|}{\sqrt{4+8} \cdot \sqrt{1+1+2}} = \frac{6}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Vậy  $\alpha = (\vec{SA}, \vec{BM}) = 30^\circ$ .



Ta cũng có:  $d(\vec{SA}, \vec{BM}) = \frac{|\vec{SA} \cdot \vec{BM}|}{|\vec{SA} \cdot \vec{BM}|} \quad (1)$

$$\text{Ta có: } [\vec{SA}, \vec{BM}] = \begin{vmatrix} 0 & -2\sqrt{2} & 2 \\ -1 & \sqrt{2} & -1 \end{vmatrix} = (-2\sqrt{2}; 0; -2).$$

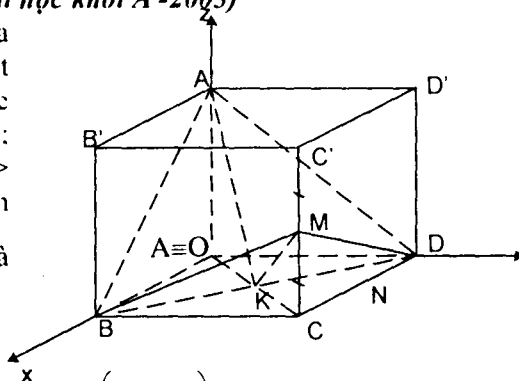
$$\text{Lại có: } \vec{SB} = (0; 1; -2\sqrt{2}), \text{ thay vào (1) ta đi đến: } d(\vec{SA}, \vec{BM}) = \frac{|4\sqrt{2}|}{\sqrt{8+4}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$$

**Nhận xét:** Thí dụ trên đã được giải bằng phương pháp hình học thuần túy (xem thí dụ 4, loại 2, §2 bài giảng 2, thí dụ 1, §2, bài giảng 1). Có thể thấy trong thí dụ này phương pháp dùng tọa độ có phần đơn giản hơn (mặc dù phải tính toán) vì có một định hướng giải là rõ ràng.

**Thí dụ 11: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2003)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  có A trùng với gốc của hệ tọa độ, ngoài ra  $B = (a; 0; a); D = (0; a; 0); A' = (0; 0; b)$  ( $a > 0; b > 0$ ). Gọi M là trung điểm của  $CC'$ . Tìm tỉ số  $\frac{a}{b}$  để hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(MBD)$  vuông góc với nhau

**Giải**



Ta gọi K là tâm của đáy ABCD, thì  $K = (\frac{a}{2}; \frac{a}{2}; 0)$

Ta có  $C = (a; a; 0), C' = (a; a; b) \Rightarrow M = (a; a; \frac{b}{2})$ .

Dễ thấy  $MB = MD; A'B = A'D$

$\Rightarrow MK \perp BD$  và  $A'K \perp BD$ .

Vậy  $\widehat{A'KM}$  là góc phẳng tạo bởi hai mặt phẳng  $(A'BD)$  và  $(MBD)$ . Từ đó:

$$(A'BD) \perp (MBD) \Leftrightarrow \widehat{A'KM} = 90^\circ \Leftrightarrow \vec{AK} \cdot \vec{KM} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Do } \overrightarrow{AK} = \left( \frac{a}{2}; \frac{a}{2}; -b \right); \overrightarrow{KM} = \left( \frac{a}{2}; \frac{a}{2}; \frac{b}{2} \right)$$

$$\text{Vì thế: (1)} \Leftrightarrow \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{2} = 0 \Leftrightarrow a = b \Leftrightarrow \frac{a}{b} = 1.$$

**Nhận xét:** Thực ra cách giải này đã sử dụng quá nhiều kiến thức của hình học thuần túy, đó là phát hiện ra (1). Chú ý rằng đó cũng là cách giải trong thí dụ 2, loại 2, §1, bài giảng 2. Điều khác biệt là ở đoạn sau sử dụng định lý Pitago thay cho tích vô hướng.

**Thí dụ 12: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2004)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng với  $A(a;0;0)$ ;  $B(-a;0;0)$ ;  $C(0;1;0)$ ;  $B_1(-a;0;b)$  với  $a > 0$ ;  $b > 0$ .

1/ Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng  $B_1C$  và  $AC_1$  theo  $a$  và  $b$

2/ Cho  $a, b$  thay đổi và thỏa mãn  $a+b=4$ . Tìm  $a, b$  để khoảng cách ở câu 1 là lớn nhất.

**Giải**

Ta có ngay  $A_1 = (a;0;b)$ ;  $C_1 = (0;1;b)$ .

Từ đó suy ra:  $\overrightarrow{BC} = (a;1;-b)$ ;  $\overrightarrow{AC_1} = (-a;1;b)$ ;  $\overrightarrow{CC_1} = (0;0;b)$ .

Như vậy

$$\begin{aligned} [\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{AC_1}] &= \begin{vmatrix} 1-b & -b & a \\ 1 & b & -a \\ a & -a & 1 \end{vmatrix} \\ &= (2b; 0; 2a) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{A_1C}] \cdot \overrightarrow{CC_1} = 2ab$$

Theo công thức tính khoảng cách ta có:

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{|\overrightarrow{[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{A_1C}]} \cdot \overrightarrow{CC_1}|}{|\overrightarrow{[\overrightarrow{B_1C}, \overrightarrow{A_1C}]}} = \frac{2ab}{2\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

2/ Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$d(B_1C, AC_1) = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \leq \frac{ab}{\sqrt{2ab}} = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a+b}{2} = \sqrt{2} \quad (\text{do } a+b=4).$$

Từ đó  $\max d(B_1A, AC_1) = \sqrt{2} \Leftrightarrow a = b = 2$ .

**Thí dụ 13:**

Trong không gian cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  với tọa độ các đỉnh như sau:  $A'(0;0;0)$ ;  $B'(a;0;0)$ ;  $D'(0;b;0)$ ;  $A(0;0;c)$  (trong đó  $a, b, c > 0$ ). Gọi  $P, Q, R, S$  lần lượt là trung điểm của các cạnh  $AB, B'C', C'D', DD'$ . Tìm mối liên hệ giữa  $a, b, c$  để  $PR \perp QS$ .

**Giải**

Ta có  $C' = (a;b;0)$ ;  $B = (a; 0; c)$ ;  $C = (a; b; c)$ ;  $D = (0; b; c)$ .

Từ đó theo công thức tính tọa độ trung điểm ta có:

$$P = \left( \frac{a}{2}; 0; \frac{c}{2} \right); Q = \left( a; \frac{b}{2}; 0 \right); R = \left( \frac{a}{2}; b; 0 \right); S = \left( 0; b; \frac{c}{2} \right)$$



$$\Rightarrow \overrightarrow{PR} = (0; b; -c); \quad \overrightarrow{QS} = \left(-a; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right).$$

$$\text{Vậy } PR \perp QS \Leftrightarrow \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{QS} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{2} - \frac{c^2}{2} = 0 \Leftrightarrow b = c.$$

**Thí dụ 14: Đề thi tuyển sinh Đại học khối B - 2003)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;0;8)$  và điểm C sao cho  $\overrightarrow{AC} = (0;6;0)$ . Tìm khoảng cách từ trung điểm I của BC đến đường thẳng OA.

**Giải**

Từ  $\overrightarrow{AC} = (0;6;0)$  và  $A(2;0;0)$  suy ra  $C(2;6;0)$ . Vì I là trung điểm của BC nên  $I(1;3;4)$

$$\text{Ta có: } d(I, OA) = \frac{[\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}]}{|\overrightarrow{OA}|} \quad (1)$$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{OI} = (1;3;4); \overrightarrow{OA} = (2;0;0); \Rightarrow [\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OA}] = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = (0;8;-6).$$

$$\text{Từ đó theo (1) ta có: } d(I, OA) = \frac{\sqrt{8^2 + (-6)^2}}{\sqrt{2^2 + 0^2 + 0^2}} = 5.$$

## §2. TÍNH THỂ TÍCH KHỐI ĐA DIỆN BẰNG PHÉP TÍNH TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Phương pháp giải ở đây về cơ bản cũng giống như phương pháp đã trình bày trong §1. Phương pháp này có cái ưu việt là không cần xác định chiều cao khối đa diện (điều mà trong nhiều bài toán thể tích khối đa diện sẽ gặp khó khăn).

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2003)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' có A trùng với gốc tọa độ,  $B(a;0;0)$ ;  $D(0;a;0)$ ,  $A'(0;0;b)$  ( $a, b > 0$ ). Giả sử M là trung điểm của CC'. Tìm thể tích khối đa diện A'BMD theo a và b.

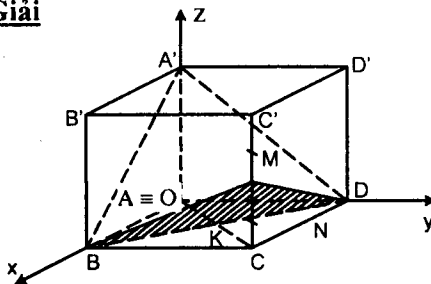
**Giải**

$$\text{Ta có: } C = (a;a;0), C' = (a;a;b).$$

$$\text{Từ đó: } M = \left(a; a; \frac{b}{2}\right);$$

$$\overrightarrow{A'B} = (a;0;-b); \quad \overrightarrow{A'D} = (0;a;-b);$$

$$\overrightarrow{A'M} = \left(a; a; -\frac{b}{2}\right)$$



$$[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] = \left( \begin{vmatrix} a & -b \\ a & -b \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -b & a \\ -b & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} \right) = (ab; ab; a^2).$$

$$\text{Do vậy: } V_{A'BMD} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'D}] \cdot \overrightarrow{A'M}| = \frac{1}{6} \left| a^2b + a^2b - \frac{a^2b}{2} \right| = \frac{a^2b}{4} \text{ (đvtt)}.$$

**Nhận xét:**

Trong bài giải số 1 chúng ta đã sử dụng phương pháp hình học không gian thuần túy (đưa thể tích khối cần tìm thành hiệu thể tích của hai khối) (xem thí dụ 3, loại 2, §1 – Bài giảng 1) để giải thí dụ trên. Với thí dụ này cách giải bằng phương pháp tọa độ là dễ sử dụng (vì có đường lối rõ ràng và việc tính toán là đơn giản)

### Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi, AC cắt BD tại gốc tọa độ O. Biết  $A(2;0;0)$ ,  $B(0;1;0)$ ,  $S(0;0;2\sqrt{2})$ . Gọi M là trung điểm của cạnh SC. Tính thể tích hình chóp S.ABMN, ở đây N là giao điểm của SD với mặt phẳng (ABM).

**Giải:**

Do ABCD là hình thoi tâm O nên ta có:

Do  $AB \parallel DC \Rightarrow AB \parallel (SDC)$

$(MAB) \cap (SDC) = MN$

ở đây  $MN \parallel AB$ . Vì M là trung điểm của SC, nên N là trung điểm của SD.

Ta có:  $C = (-2;0;0)$ ;  $D = (0;-1;0)$ .

Từ đó:  $M = (1;-0.5;\sqrt{2})$ ;  $N = (0;-0.5;\sqrt{2})$ .

Ta có:

$$\overrightarrow{SA} = (2;0;-2\sqrt{2}); \quad \overrightarrow{SN} = \left(0; -\frac{1}{2}; -\sqrt{2}\right); \quad \overrightarrow{SM} = (-1;0;-\sqrt{2}); \quad \overrightarrow{SB} = (0;1;-2\sqrt{2}).$$

$$V_{SABMN} = V_{SABN} + V_{SNBM} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN}] \cdot \overrightarrow{SA}| + \frac{1}{6} |[\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN}] \cdot \overrightarrow{SM}| \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN}] = \left( \begin{vmatrix} 1 & -2\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -2\sqrt{2} & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \right) = (-2\sqrt{2}; 0; 0)$$

$$\Rightarrow [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN}] \cdot \overrightarrow{SA} = -4\sqrt{2}; [\overrightarrow{SB}, \overrightarrow{SN}] \cdot \overrightarrow{SM} = 2\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\text{y (2) vào (1) ta có: } V_{SABMN} = \frac{1}{6} (4\sqrt{2} + 2\sqrt{2}) = \sqrt{2}.$$

**nhận xét:** Bằng phương pháp so sánh thể tích trong thí dụ 1, loại 2§, bài giảng giải thí dụ trên bằng phương pháp hình học thuần túy.

ni cách giải đều có hiệu quả khi giải thí dụ này (tuy nhiên, vì ban đầu bài ng tọa độ, nên học sinh dễ chọn cách giải như trên hơn).

**Thí dụ 3: (Đề thi Tốt nghiệp Trung học Phổ thông – 2003)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho bởi điểm  $A(2;4;-1)$ ;  $B(1;4;-1)$ ;  $C(2;4;3)$ ;  $D(2;2;-1)$ .

1/ Chứng minh  $AB \perp AC$ ;  $AC \perp AD$ ;  $AD \perp AB$ .

2/ Tính thể tích khối tứ diện ABCD

**Giải**

1/ Ta có:  $\vec{AB} = (-1; 0; 0)$ ;  $\vec{AC} = (0; 0; 4)$ ;  $\vec{AD} = (0; -2; 0)$ .

Từ đó có ngay:  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AC} \cdot \vec{AD} = \vec{AD} \cdot \vec{AB} = 0 \Rightarrow \text{đpcm}$ .

2/ Ta có:  $[\vec{AB}, \vec{AC}] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = (0; 4; 0)$ .

Do đó:  $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD}| = \frac{1}{6} |-8| = \frac{4}{3} \text{ đvtt}$ .

**Nhận xét:** Với câu 2 ta có thể làm như sau:

Từ câu 1/ suy ra:

$$V_{ABCD} = V_{B.ACD} = \frac{1}{3} BA \cdot S_{ACD} = \frac{1}{6} AB \cdot AC \cdot AD = \frac{1}{6} 1 \cdot 4 \cdot 2 = \frac{4}{3}.$$

**Bình luận:**

Với ba thí dụ trên do đầu bài ra dưới dạng tọa độ, nên việc học sinh lựa chọn phương pháp tọa độ để tìm thể tích khối đa diện là hợp lí. Dưới đây ta sẽ xét các ví dụ tìm thể tích khối đa diện trong các bài toán mà ở dạng đầu bài nó được cho dưới dạng một bài toán hình học thuần túy (chưa hề có tọa độ). Ta sẽ giải chúng bằng phương pháp tọa độ và so sánh lời giải này với lời giải bằng phương pháp hình học thuần túy.

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình chữ nhật với  $AB = a$ ,  $AD = a\sqrt{2}$ ,  $SA = a$  và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Gọi M và N lần lượt là trung điểm của AD và SC, I là giao điểm của BM và AC. Tìm thể tích khối tứ diện ANIB

**Giải**

Đựng hệ trục tọa độ Axyz với gốc A (xem hình vẽ).

Trong hệ trục tọa độ này, ta có:

$$A(0; 0; 0); D(a\sqrt{2}; 0; 0);$$

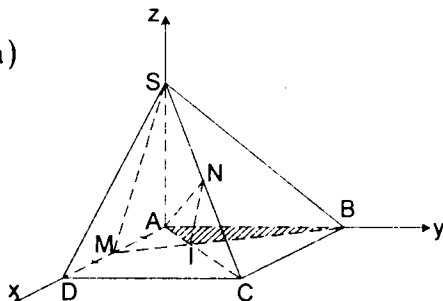
$$B = (0; a; 0); C = (a\sqrt{2}; a; 0); S = (0; 0; a)$$

Khi đó ta có:

$$M = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2}; 0; 0 \right); N = \left( \frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}; \frac{a}{2} \right).$$

$$\text{Ta có: } MI = \frac{1}{2} IB \Rightarrow \vec{MI} = \frac{1}{2} \vec{IB}.$$

Gọi  $I = (x_0; y_0; z_0)$ . Dễ thấy  $z_0 = 0$  và



$$\begin{cases} x_0 - \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(0 - x_0) \\ y_0 - 0 = \frac{1}{2}(a - y_0) \end{cases} \Rightarrow x_0 = \frac{a\sqrt{3}}{2}; y_0 = \frac{a}{3}; z_0 = 0.$$

Như vậy:  $I = \left( \frac{a\sqrt{3}}{2}; \frac{a}{3}; 0 \right)$ .

Ta có:

$$\overrightarrow{NA} = \left( -\frac{a\sqrt{3}}{2}; -\frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \right); \overrightarrow{NB} = \left( -\frac{a\sqrt{2}}{2}; \frac{a}{2}; -\frac{a}{2} \right); \overrightarrow{NI} = \left( -\frac{a\sqrt{2}}{6}; -\frac{a}{6}; -\frac{a}{2} \right).$$

Từ đó:

$$[\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}] = \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} - \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} - \frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ -a \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{a\sqrt{2}}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -\frac{a}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{Vì vậy: } V_{ANIB} = \frac{1}{6} |[\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}] \cdot \overrightarrow{NI}| = \frac{1}{6} \left| -\frac{a^3\sqrt{2}}{12} + \frac{a^3\sqrt{2}}{4} \right| = \frac{a^3\sqrt{2}}{36} \text{ đvtt.}$$

**Nhận xét:** Rõ ràng phương pháp tọa độ để giải thí dụ này phức tạp hơn hẳn phương pháp dùng hình học thuần túy để giải nó (xem lời giải trong thí dụ 5, loại 1, §1, bài giảng số 1).

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có đáy là tam giác vuông  $ABC$  tại  $B$ . Giả sử  $AB = a$ ,  $AA' = 2a$ ;  $A'C = 3a$ . Gọi  $M$  là trung điểm của  $A'C'$  và  $I$  là giao điểm của  $AM$  và  $A'C$ . Tìm thể tích tứ diện  $IABC$ .

**Giải**

Xét hệ trục tọa độ  $Bxyz$  gốc  $B$  (xem hình vẽ).

Trong hệ trục này ta có:

$$B = (0; 0; 0); A = (0; a; 0); C = (2a; 0; 0) \\ (\text{do } AC^2 = A'C^2 - CC'^2 = 9a^2 - 4a^2 = 5a^2 \\ \Rightarrow BC = 2a).$$

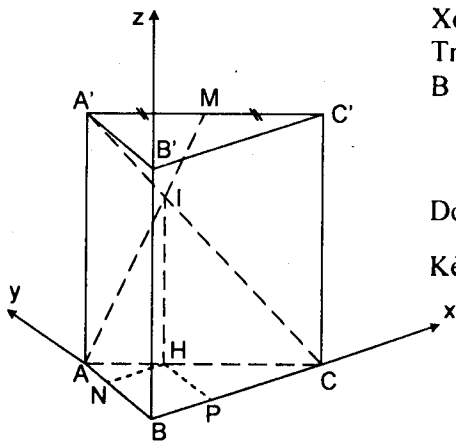
$$\text{Do } A'M = \frac{1}{2} AC \Rightarrow IH = \frac{2}{3} AA' = \frac{4a}{3}.$$

Kẻ  $HN/BC$  và  $HP//AB$ .

$$\Rightarrow HN = \frac{1}{3} BC = \frac{2a}{3}; HP = \frac{2}{3} AB = \frac{2a}{3}$$

$$\Rightarrow I = \left( \frac{2a}{3}; \frac{2a}{3}; \frac{4a}{3} \right)$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{IA} = \left( -\frac{2a}{3}; \frac{a}{3}; -\frac{4a}{3} \right); \overrightarrow{IB} = \left( -\frac{2a}{3}; -\frac{2a}{3}; -\frac{4a}{3} \right); \overrightarrow{IC} = \left( \frac{4a}{3}; -\frac{2a}{3}; -\frac{4a}{3} \right).$$



$$= \left( \begin{vmatrix} \frac{a}{3} & -\frac{4a}{3} \\ -\frac{2a}{3} & -\frac{4a}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{4a}{3} & -\frac{2a}{3} \\ -\frac{4a}{3} & -\frac{2a}{3} \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \frac{2a}{3} & -\frac{a}{3} \\ -\frac{2a}{3} & -\frac{2a}{3} \end{vmatrix} \right) = \left( -\frac{4a^2}{3}, 0, \frac{2a^2}{3} \right).$$

$$_{BC} = \frac{1}{6} [ [\vec{IA}, \vec{IB}], \vec{IC} ] = \frac{1}{6} \left| \begin{vmatrix} 16a^3 & -8a^3 \\ 9 & 9 \end{vmatrix} \right| = \frac{4a^3}{9} \text{ (đvtt)}.$$

*cét:* So với cách giải thuần túy bằng hình học (xem thí dụ 3, loại 1, §1, ) cách giải bằng phương pháp tọa độ thua kém hẳn về mọi mặt. Nói không nên dùng phương pháp tọa độ trong trường hợp này.

## MỘT SỐ BÀI TOÁN KHÁC SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ CỦA VECTOR

ong mục này, chúng tôi trình bày cách giải một số dạng bài tập cơ bản khác dụng đến phương pháp tọa độ trong không gian.

**lí dụ 1:**

Trong không gian cho bốn điểm  $A(1; -1; 2)$ ;  $B(1; 3; 2)$ ;  $C(4; 3; 2)$ ;  $D(4; -1; 2)$ . minh rằng bốn điểm này đồng phẳng.

**Giải**

Ta có:  $\vec{AB} = (0; 4; 0)$ ;  $\vec{AC} = (3; 4; 0)$ ;  $\vec{AD} = (3; 0; 0)$ .

Khi đó:  $[\vec{AB}, \vec{AC}] = \left( \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) = (0; 0; -12)$ .

Vì thế:  $[\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = 0 \Rightarrow$  ba vector  $\vec{AB}$ ,  $\vec{AC}$ ,  $\vec{AD}$  đồng phẳng

$\Rightarrow$  bốn điểm A, B, C, D đồng phẳng.

**Thí dụ 2:**

Trong không gian cho bốn điểm  $A(2; 4; -1)$ ;  $B(1; 4; -1)$ ;  $C(2; 4; 3)$ ;  $D(2; 2; -1)$ .

1/ Chứng minh ACBD là một tứ diện.

2/ Xác định tọa độ điểm M trong không gian sao cho đại lượng

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2$$

đạt giá trị nhỏ nhất và hãy tính giá trị ấy.

**Giải**

Ta có:  $\vec{AB} = (-1; 0; 0)$ ;  $\vec{AC} = (0; 0; 4)$ ;  $\vec{AD} = (0; -2; 0)$ .

Từ đó:  $[\vec{AB}, \vec{AC}] = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (0; 4; 0)$

$\Rightarrow [\vec{AB}, \vec{AC}] \cdot \vec{AD} = -8 \neq 0$ . Vậy ba vector  $\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}$  không đồng phẳng, tức là ABCD lập thành một tứ diện.

2/ Gọi  $M = (x, y, z)$ , ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 + (x-1)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 \\ &+ (x-2)^2 + (y-4)^2 + (z-3)^2 + (x-2)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 \\ &= 4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 14x - 28y = 77 \\ &= 4\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 + 4\left(y - \frac{7}{2}\right)^2 + 4z^2 + \frac{63}{4} \quad (1) \end{aligned}$$

Từ (1) suy ra:

$$\min(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) = \frac{63}{4} \Leftrightarrow x = \frac{7}{4}; y = \frac{7}{2}; z = 0 \Leftrightarrow M = \left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right).$$

*Chú ý:* Có thể giải như sau:

Gọi  $M$  là trọng tâm của tứ diện, tức là  $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0}$ . Có thể tính ngay tọa độ của tứ diện theo công thức sau:

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C + x_D}{4}; y_G = \frac{y_A + y_B + y_C + y_D}{4}; z_G = \frac{z_A + z_B + z_C + z_D}{4}.$$

$$\text{Vì thế ta có } G = \left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right)$$

Theo công thức “ba điểm” ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= (\vec{MG} + \vec{GA})^2 + (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + (\vec{MG} + \vec{GC})^2 + (\vec{MG} + \vec{GD})^2 \\ &= 4MG^2 + (GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2) + 2\vec{MG}(\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD}) \\ &= 4MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 \quad (2). \end{aligned}$$

Do  $GA^2 + GB^2 + GC^2 + GD^2 = \text{const}$  nên từ (2) suy ra:

$$(MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2) \text{ đạt giá trị nhỏ nhất} \Leftrightarrow \vec{MG} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow M \equiv G \Leftrightarrow M = \left(\frac{7}{4}; \frac{7}{2}; 0\right).$$

Ta thu lại kết quả trên.

## BÀI TẬP TỰ GIẢI

Dùng phương pháp tọa độ để giải các bài toán về tính thể tích khối đa diện sau, sau đó hãy so sánh với lời giải bằng cách sử dụng phương pháp hình học thuần túy:

### Bài 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A- 2007)

Cho hình chóp S.ABCD, đáy là hình vuông ABCD cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy ABCD. Gọi M, N, P lần lượt là các trung điểm của SB, SC, CD. Tìm thể tích tứ diện CMNP.

- Đáp số:  $\frac{a^3\sqrt{3}}{96}$ .

- Lời giải bằng phương pháp hình học xem thí dụ 4, loại 1, §1, bài giảng số 1.

### Bài 2:

Cho hình hộp đáy ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình vuông cạnh a, cạnh bên AA' = h. Tìm thể tích tứ diện BDD'C'.

- Đáp số:  $\frac{a^2h}{6}$ .

Sử dụng phương pháp tọa độ để giải các bài toán sau:

### Bài 3:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật với AB = a, AD = 2a, cạnh SA vuông góc với đáy, cạnh SB tạo với mặt phẳng đáy một góc  $60^\circ$ . Trên cạnh SA lấy điểm M sao cho  $AM = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ . Mặt phẳng (BCM) cắt cạnh SD tại điểm N. Tìm thể tích khối chóp S.BCNM.

- Đáp số:  $\frac{10\sqrt{3}a^3}{27}$ .

### Bài 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hùng Vương – 2006)

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA=a và SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Tính khoảng cách giữa hai đường thẳng BD và SC

Đáp số:  $\frac{a\sqrt{6}}{6}$ .

### Bài 5:

Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và SA=a. Gọi E là trung điểm của CD. Tính theo a khoảng cách từ điểm S đến đường thẳng BE.

Đáp số:  $\frac{3a\sqrt{5}}{5}$ .



**Bài 6:**

Trong không gian cho tứ diện OABC với  $A(0;0;a\sqrt{3})$ ;  $B(a;0;0)$ ;

$C(0;a\sqrt{3};0)$  ( $a>0$ ). Gọi M là trung điểm của BC. Tìm khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và OM.

Đáp số:  $\frac{a\sqrt{15}}{5}$ .

**Bài 7: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Tây Ninh - 2006)**

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD cạnh bằng a. Qua trung điểm I của cạnh AB dựng đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Trên d lấy điểm S sao cho  $SI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ .

- 1/ Tìm thể tích hình chóp S.ACD.
- 2/ Tìm khoảng cách từ C đến (SAD).

Đáp số: 1/  $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$   
 2/  $\frac{a\sqrt{3}}{2}$

**Bài 8:**

Hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi tâm I, cạnh bằng a và đường chéo  $BD = a$ . Cạnh  $SC = \frac{a\sqrt{6}}{2}$  vuông góc với mặt phẳng (ABCD). Chứng minh hai mặt phẳng (SAB) và (SBD) vuông góc với nhau.

**Hướng dẫn:** Lập hệ trục tọa độ Ixyz gốc I sao cho tia Ix trùng với tia IB, tia Iy trùng với tia IA, Iz // SC.

**Bài 9:**

Cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' cạnh a. Tìm khoảng cách giữa AB' và BC'.

Đáp số:  $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ .

# Bài giảng số 4 và số 5

## ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

Các bài toán về đường thẳng và mặt phẳng trong không gian luôn luôn có mặt trong các đề thi về môn Toán ở các kì thi vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây (2002-2009).

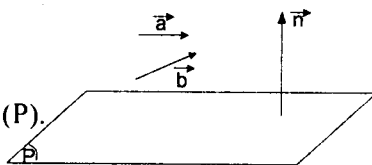
Bài giảng này đề cập đến những vấn đề sau:

- Thiết lập phương trình mặt phẳng.
- Thiết lập phương trình đường thẳng.
- Các bài toán xác định điểm và các yếu tố khác trong hình học không gian.

### §1. BÀI TOÁN THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH MẶT PHẪNG

Việc thiết lập phương trình mặt phẳng được dựa trên các kiến thức cơ bản sau:

1/  $\vec{a}$  và  $\vec{b}$  là một cặp vector chỉ phương của mặt phẳng (P) nếu chúng không cùng phương và giá của chúng song song với (P) hoặc nằm trên (P). Khi đó:  $\vec{n} = [\vec{a}, \vec{b}]$  là một vector pháp tuyến của (P).



2/ Phương trình tổng quát của (P) có dạng:  
 $Ax + By + Cz + D = 0$  (với  $A^2 + B^2 + C^2 > 0$ ).

Khi đó  $\vec{n} = (A; B; C)$  là một vector pháp tuyến của (P).

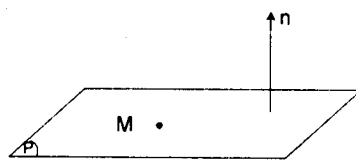
3/ Mặt phẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{n} = (A; B; C)$  làm vector pháp tuyến có dạng:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

4/ Mặt phẳng theo đoạn chắn:

Mặt phẳng đi qua điểm  $A(a; 0; 0)$ ;  $B(0; b; 0)$ ;  $C(0; 0; c)$  với  $a, b, c \neq 0$  có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$



Dưới dạng này ta nói mặt phẳng có phương trình theo đoạn chắn.

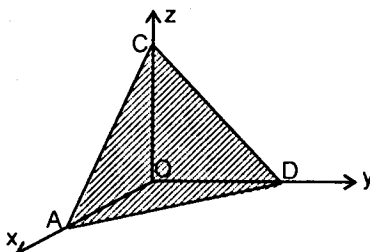
**Các dạng toán cơ bản**

**Loại 1:** Các bài toán cơ bản lập phương trình mặt phẳng:

Các bài toán cơ bản lập phương trình mặt phẳng gồm các bài toán sau đây:

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua điểm

$M(x_0, y_0, z_0)$  và nhận vector  $\vec{n} = (A; B; C)$  làm vector pháp tuyến.



Phương trình của nó là:  $A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0$ .

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua ba điểm A, B, C không thẳng hàng cho trước.

Mặt phẳng cần tìm nhận hai vector  $\overrightarrow{AB}$ ,  $\overrightarrow{AC}$  làm hai vector chỉ phương. Khi đó bài toán quy về: Viết phương trình mặt phẳng nhận  $\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$  là vector pháp tuyến và đi qua A.

- Viết phương trình mặt phẳng đi qua một điểm A và song song với hai đường thẳng  $d_1, d_2$ .

Khi đó bài toán quy về: Viết phương trình mặt phẳng qua A và nhận

$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$  làm vector pháp tuyến. ở đây  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  tương ứng là các vector chỉ phương của  $d_1$  và  $d_2$ .

- Viết phương trình mặt phẳng chứa hai đường thẳng song song  $d_1$  và  $d_2$  ( $d_1 // d_2$ ).

Lấy điểm  $M \in d_1, N \in d_2$ . Bài toán quy về viết phương trình mặt phẳng nhận hai vector  $\overrightarrow{MN}, \vec{u}_1$  ( $\vec{u}_1$  là vector chỉ phương của  $d_1$ ) và đi qua điểm M.

Ngoài ra còn nhiều bài toán khác có thể quy về các dạng cơ bản trên sau các phép biến đổi đơn giản.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho ba điểm A(0;1;2); B(2; -2;1); C(-2;0;1). Viết phương trình mặt phẳng đi qua A, B, C.

**Giải**

Mặt phẳng cần tìm nhận:

$\vec{u}_1 = \overrightarrow{AB} = (2; -3; 1)$  và  $\vec{u}_2 = \overrightarrow{AC} = (-2; -1; -1)$  làm cặp vector chỉ phương.

Do đó vector pháp tuyến  $\vec{n}$  của nó là:

$$\vec{n} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} = (2; 4; -8) // (1; 2; -4).$$

Vậy mặt phẳng cần tìm có dạng:

$$1(x-0) + 2(y-1) - 4(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 2y - 4z + 6 = 0.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A(0;1;2) và hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+3}{-1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua A, đồng thời song song với  $d_1$  và  $d_2$ .

**Giải**

Đường thẳng  $d_1$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$ .

Đường thẳng  $d_2$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_2 = (1; -2; 1)$ .

Vì (P) song song với  $d_1$  và  $d_2$  nên nhận  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  là cặp vector chỉ phương.

(Chú ý  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  không cùng phương). Do đó (P) nhận  $\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$  làm vector pháp tuyến. Ta có:

$$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-1; 3; -5).$$

Mặt khác (P) đi qua A (0;1;2) nên (P) có dạng

$$-1(x-0) - 3(y-1) - 5(z-2) = 0 \Leftrightarrow x + 3y + 5z - 13 = 0.$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lăng trụ đứng ABC.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub> với A(0; -3;0); B(4;0;0); C(0;3;0); B<sub>1</sub>(4;0;4). Gọi M là trung điểm của A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>. Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua A, M và song song với BC<sub>1</sub>.

**Giải**

Ta có: A<sub>1</sub>=(0; -3;4) và C<sub>1</sub> = (0;3;4)

Vì M là trung điểm của A<sub>1</sub>B<sub>1</sub> nên  $M = \left( 2; -\frac{3}{2}; 4 \right)$

Từ đó có:  $\vec{AM} = \left( 2; \frac{3}{2}; 4 \right)$  và  $\vec{BC_1} = (-4; 3; -4)$

Mặt phẳng (P) đi qua A, M và song song với BC<sub>1</sub> nên nhận hai vector  $\vec{AM}$  và  $\vec{BC_1}$  làm cặp vector chỉ phương. Do vậy vector pháp tuyến  $\vec{n}$  của (P) xác định như sau:

$$\vec{n} = [\vec{AM}, \vec{BC_1}] = \left( \begin{vmatrix} \frac{3}{2} & 4 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \right) = (-6; -24; 12) // (-1; -4; 2)$$

Mặt phẳng (P) đi qua A nên nó có phương trình là:

$$-(x+6) - 4(y+24) + 2(z-12) = 0 \Leftrightarrow x + 4y - 2z + 12 = 0$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Trong không gian cho hai đường thẳng:

$$d_1 = \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}; \quad d_2 : \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+3y-12=0 \end{cases}$$

1/ Chứng minh  $d_1 // d_2$

2/ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả ( $d_1$ ) và ( $d_2$ ).

**Giải**

1/ Đường thẳng  $d_1$  có vector chỉ phương là  $\vec{u}_1 = (3; -1; 2)$  và đi qua điểm M(1; -2;1).

Đường thẳng  $d_2$  có vector chỉ phương là:

$$\vec{u}_2 = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \right) = (3; -1; 2).$$

Như vậy  $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$ .

Mặt khác điểm M (1; -2; -1) không thuộc  $d_2$  (hiển nhiên), do đó  $d_1 // d_2 \Rightarrow \text{đpcm}$ .

2/ Cho  $y = 0$  trong hệ phương trình xác định  $d_2$ , ta có:

$$\begin{cases} x - z - 2 = 0 \\ x - 12 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12 \\ z = 10 \end{cases}$$

Vậy  $d_2$  đi qua điểm  $N(12; 0; 10)$ .

Từ đó:  $\overrightarrow{MN} = (11; 2; 11)$ .

Mặt phẳng (P) chứa  $(d_1)$  và  $(d_2)$  nhận cặp vector

$\overrightarrow{MN} = (11; 2; 11)$  và  $\vec{u}_1 = (3; -1; 2)$  làm cặp vector chỉ

phương nên vector pháp  $\vec{n}$  của (P) xác định như sau:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{MN}, \vec{u}_1] = \begin{pmatrix} 2 & 11 \\ -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = (15; 11; -17).$$

Rõ ràng (P) đi qua  $M(1; -2; -1)$  nên (P) có phương trình:

$$15(x-1) + 11(y+2) - 17(z+1) = 0 \Leftrightarrow 15x + 11y - 17z - 10 = 0.$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2002)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ x + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}; d_2: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa  $d_1$  và song song với  $d_2$ .

**Giải**

Đường thẳng  $d_2$  có vector chỉ phương:

$$\vec{u}_2 = (1; 1; 2).$$

Đường thẳng  $d_1$  có vector chỉ phương:

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = (2; 3; 4)$$

Trong hệ phương trình xác định  $d_1$  cho  $z = 0$ , ta có:  $\begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + 2y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -2 \end{cases}$

Vậy  $M(0; -2; 0) \in d_1$ .

Mặt phẳng (P) chứa  $d_1$  song song với  $d_2$ , nên nhận các vector  $\vec{u}_1; \vec{u}_2$  làm cặp

vector chỉ phương, do đó nó có vector pháp tuyến  $\vec{n}$  là:

$$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = (2; 0; -1).$$

Do (P) chứa  $d_1$  nên  $M \in (P)$ . Vì thế (P) có phương trình là:

$$2(x-0) - (z-0) = 0 \Leftrightarrow 2x - z = 0$$

**Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B, D - 2009)**

Viết phương trình mặt phẳng (P) đi qua điểm  $A(1; 1; 1)$  và đồng thời vuông

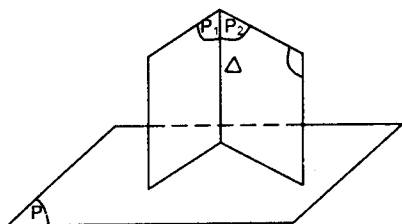
góc với cả hai mặt phẳng:

$$(P_1): x + 2y + 3z + 4 = 0 \text{ và } (P_2): 3x + 2y - z + 1 = 0.$$

### Giải

Rõ ràng  $(P_1), (P_2)$  cắt nhau vì  $\frac{1}{3} \neq \frac{2}{2}$ , do đó giao tuyến:

$$d: \begin{cases} x + 2y + 3z + 4 = 0 \\ 3x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ vuông góc với } (P).$$



Đường thẳng d có vector chỉ phương là:

$$\vec{n} = \left( \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-8; 10; -4) // (4; -5; 2),$$

$\vec{n}$  chính là vector pháp tuyến của (P). Do (P) qua  $A(1;1;1)$ , nên (P) có phương trình là:

$$4(x-1) - 5(y-1) + 2(z-1) = 0 \\ \Leftrightarrow 4x - 5y + 2z - 1 = 0$$

**Thí dụ 7: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B, D – 2008)**

Trong không gian cho đường thẳng (d):  $\frac{x}{1} = \frac{y}{-1} = \frac{z-1}{2}$  và điểm A (1;1;3).

Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm A và vuông góc với d.

### Giải

Vì (d) thuộc (P) nên vector chỉ phương  $(1; -1; 2)$  của d chính là vector pháp tuyến của (P).

Do (P) qua A nên (P) có phương trình:

$$1(x-1) - 1(y-1) + 2(z-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 2z - 6 = 0.$$

**Loại 2:** Sử dụng phương trình chùm mặt phẳng để viết phương trình mặt phẳng:

- Giả sử cho hai mặt phẳng (P) và (Q) cắt nhau:

$$(P): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$(Q): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Khi đó mặt phẳng đi qua giao tuyến của (P) và (Q) có dạng

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0, \quad (1)$$

với  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ .

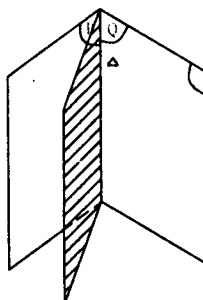
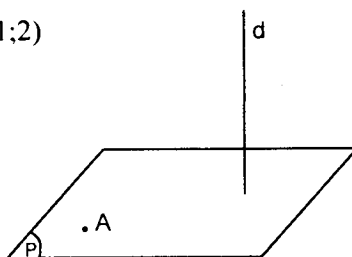
(1) gọi là phương trình chùm mặt phẳng xác định bởi (P) và (Q).

- Người ta sử dụng phương trình chùm mặt phẳng để viết phương trình mặt phẳng trong các bài toán có nội dung sau: Cho đường thẳng d viết dưới dạng:

$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

Bài toán đòi hỏi viết phương trình mặt phẳng (P) chứa (d) và có một tính chất nào đó.

Cách giải bài toán trên tiến hành như sau:



... mặt phẳng (1)  
 dựa vào điều kiện đầu bài ta sẽ thiết lập được một phương trình nào đó liên hệ giữa  $\alpha, \beta$ .

**Bước 3:** Chú ý rằng  $\alpha, \beta$  không đồng thời bằng 0, nên sẽ xác định được  $\alpha, \beta$ .

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)**

Trong không gian cho hai đường thẳng

$$(d_1): \begin{cases} x - 2y + z - 4 = 0 \\ z + 2y - 2z + 4 = 0 \end{cases}; (d_2): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$$

Viết phương trình mặt phẳng chứa  $(d_1)$  và song song với  $(d_2)$ .

**Giải**

Vì (P) chứa  $(d_1)$  nên (P) thuộc “chùm mặt phẳng”:

$$\alpha(x - 2y + z - 4) + \beta(x + 2y - 2z + 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\alpha + \beta)x + (-2\alpha + 2\beta)y + (\alpha - 2\beta)z - 4\alpha + 4\beta = 0 \quad (1)$$

$$(\alpha^2 + \beta^2 > 0)$$

Dưới dạng (1) (P) có vector pháp tuyến là:

$$\vec{n} = (\alpha + \beta; -2\alpha + 2\beta; \alpha - \beta) \quad (2)$$

Do  $(P) \parallel d_2$ . Vì thế vector chỉ phương  $\vec{u}_2 = (1; 1; 2)$  của  $d_2$  phải vuông góc với  $\vec{n}$ .

1 có:

$$\vec{u}_2 \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{u}_2 \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta - 2\alpha + 2\beta + 2(\alpha - 2\beta) = 0 \Leftrightarrow \alpha = \beta$$

Do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  nên chọn  $\beta = 1 \Rightarrow \alpha = 1$ .

Thay lại vào (1) và có:  $2x - z = 0$ . Đó là phương trình cần tìm của (P).

**Nhận xét**

So sánh với cách giải cơ bản của thí dụ này trong thí dụ 5, loại 1, §1, có vẻ giải này nhanh gọn hơn.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Trong không gian cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z+1}{2} \text{ và } d_2: \begin{cases} x + y - z - 2 = 0 \\ x + 3y - 12 = 0 \end{cases}$$

Chứng minh  $d_1 \parallel d_2$ .

Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa cả  $d_1, d_2$ .

**Giải**

Xem lời giải thí dụ 4, loại 1, §1.

Vì (P) chứa  $d_2$  nên (P) thuộc “chùm mặt phẳng”

$$\alpha(x + y - z - 2) + \beta(x + 3y - 12) = 0 \quad (1), \text{ với } \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

$d_1 \parallel d_2$  nên  $d_1 \parallel (P)$ . Vì thế  $d_1 \in (P)$  nếu như:  $M(1; -2; -1) \in (P)$  (ở đây  $M \in d_1$ ).

$A \in (P)$  nên từ (1) ta có phương trình

$$-2\alpha - 17\beta = 0 \quad (2)$$



Từ (2) và do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , nên chọn  $\beta = -2; \alpha = 17$ .

Thay lại vào (1) ta có: (P):  $15x + 11y - 17z - 10 = 0$ .

**Nhận xét:** Hãy so sánh với lời giải cũng của thí dụ này trong thí dụ 4, loại 1, §1 đưa ra nhận xét.

### Thí dụ 3

Cho điểm  $A(-1;2;3)$ . Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa đường thẳng

$$d: \begin{cases} 2x - y - 1 = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases} \text{ và khoảng cách từ A đến d bằng 3.}$$

### Giải

Mặt phẳng (P) chứa (d) nên thuộc chùm mặt phẳng

$$\alpha(2x - y - 1) + \beta(z - 1) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha x - \alpha y + \beta z - \alpha - \beta = 0 \quad (1), \text{ với } \alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

Vì  $d(A, d) = 3$  nên ta có:

$$\frac{|-2\alpha - 2\alpha + 3\beta - \alpha - \beta|}{\sqrt{4\alpha^2 + \alpha^2 + \beta^2}} = 3 \Leftrightarrow (2\beta - 5\alpha)^2 = 9(5\alpha^2 + \beta^2) \Leftrightarrow 20\alpha^2 + 20\alpha\beta + 5\beta^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta)^2 = 0 \Leftrightarrow \beta + 2\alpha = 0 \quad (2)$$

Do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  nên từ (2) chọn  $\alpha = 1, \beta = -2$ .

Thay lại vào (1) ta có: (P):  $2x - y - 2z + 1 = 0$ .

### Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Quảng Ngãi – 2006)

Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$$

và vuông góc với mặt phẳng (Q):  $x - 2y + 2z - 10 = 0$ .

### Giải

Mặt phẳng (P) chứa  $(d_1)$  nên nó thuộc chùm:

$$\alpha(2y + 3z - 5) + \beta(x + 2y - x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta)x + (-\alpha + 2\beta)y + (3\alpha - \beta)z - 5\alpha = 0 \quad (1)$$

$$\alpha^2 + \beta^2 > 0.$$

vector pháp của (P) là:  $\vec{n}_p = (2\alpha + \beta; -\alpha + 2\beta; 3\alpha - \beta)$ .

Vector pháp của (Q) là:  $\vec{n}_q = (1; -2; 2)$ .

Do  $(P) \perp (Q) \Rightarrow \vec{n}_p \cdot \vec{n}_q = 0$

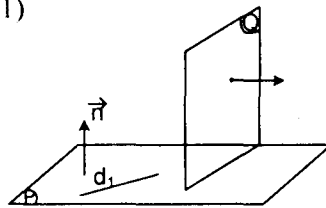
$$\Leftrightarrow 2\alpha + \beta + 2\alpha - 4\beta + 6\alpha - 2\beta = 0 \Leftrightarrow 10\alpha - 5\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 2\alpha$$

Thay lại vào (1) ta có: (P):  $4x - 3y + z - 5 = 0$  (vì  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ).

**Nhận xét:** So sánh cách giải trên với cách giải cơ bản sau:

(P) nhận vector chỉ phương  $\vec{u}_1$  của  $(d_1)$  và vector pháp của (Q) làm cặp vector chỉ phương.

$$\text{Ta có: } \vec{u}_1 = \left( \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-5; 5; 5) // (-1; 1; 1).$$



Vậy vector pháp tuyến  $\vec{n}$  của (P) là:

$$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{n}_Q] = \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (4; 3; 1).$$

Mặt khác do (P) chứa  $(d_1)$  nên nói riêng (P) đi qua điểm M nào đó của  $(d_1)$ .  
Cho  $z=0$  ta có hệ

$$\begin{cases} 2x - y = 5 \\ x + 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

Vậy  $M = (2; -1; 0) \in d_1$ .

Từ đó (P):  $4(x-2) + 3(y+1) + z = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y + z - 5 = 0$ .

Ta thu lại kết quả trên.

**Loại 3:** Sử dụng phương trình theo đoạn chắn để viết phương trình mặt phẳng.

Phương pháp giải các bài toán này là dựa trực tiếp vào dạng

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

của phương trình mặt phẳng theo đoạn chắn. Dựa vào các tính chất của mặt phẳng (P) mà đầu bài đòi hỏi sẽ thiết lập được một hệ phương trình để xác định  $a, b, c$ .

**Thí dụ 1:**

Viết phương trình mặt phẳng (P) biết nó đi qua điểm  $G(1; 2; 3)$  và cắt các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại các điểm  $A, B, C$  sao cho  $G$  là trọng tâm tam giác  $ABC$ .

**Giải**

Giả sử  $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$

Khi đó (P) có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1.$$

Do (P) đi qua  $G(1; 2; 3)$  nên ta có:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{b} + \frac{3}{c} = 1 \quad (1)$$

Dựa vào công thức xác định tọa độ trọng tâm của tam giác ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B + x_C = 3x_G \\ y_A + y_B + y_C = 3y_G \\ z_A + z_B + z_C = 3z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 6 \quad (2) \\ c = 9 \end{cases}$$

Thay lại (2) vào (1) ta thấy thỏa mãn vậy phương trình của mặt phẳng (P) là:

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1.$$

**Chú ý:** Cùng dạng với thí dụ 1 có thể là các bài toán sau:

**Thí dụ 1a:**

Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục  $Ox, Oy, Oz$  lần lượt tại  $A, B, C$  sao cho  $OABC$  nhận điểm  $G(1; 1; 2)$  là trọng tâm của tứ diện.

**Giải**

Giả sử  $A(a; 0; 0); B(0; b; 0); C(0; 0; c)$ . Khi đó (P) có dạng:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

Theo công thức tính tọa độ trọng tâm của tứ diện ta có:

$$\begin{cases} x_0 + x_A + x_B + x_C = 4x_G \\ y_0 + y_A + y_B + y_C = 4y_G \\ z_0 + z_A + z_B + z_C = 4z_G \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 4 \\ z = 8 \end{cases}$$

Vậy mặt phẳng (P) có dạng:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{4} + \frac{z}{8} = 1.$$

**Thí dụ 1b:**

Viết phương trình mặt phẳng (P) cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho ABC là tam giác đều và có diện tích bằng  $2\sqrt{3}$ .

**Giải**

Giả sử  $A = (a; 0; 0)$ ;  $B = (0; b; 0)$ ;  $C = (0; 0; c)$ . Do  $AB = AC = BC \Rightarrow a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow |a| = |b| = |c|$ .

$$\text{Mặt khác: } S_{ABC} = \frac{AB^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{2a^2 \sqrt{3}}{4}.$$

$$\text{Vì thế: } S_{ABC} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{a^2 \sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |a| = 2.$$

Từ đó ta có:  $|a| = |b| = |c| = 2$ ;

Vậy ta có đáp số sau:  $a = b = c = 2$ ;  $a = b = c = -2$

$$a = 2, b = c = -2; b = 2, a = c = -2; c = 2, b = a = -2;$$

$$a = b = 2, c = -2; a = c = 2, b = -2; b = c = 2, a = -2.$$

Như vậy có tám mặt phẳng thỏa mãn yêu cầu đầu bài:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1; \quad \frac{x}{-2} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-2} = 1; \quad \frac{x}{2} - \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1;$$

$$-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1; \quad -\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1; \quad \frac{x}{2} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2} = 1;$$

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1; \quad -\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{2} = 1.$$

**Thí dụ 2:**

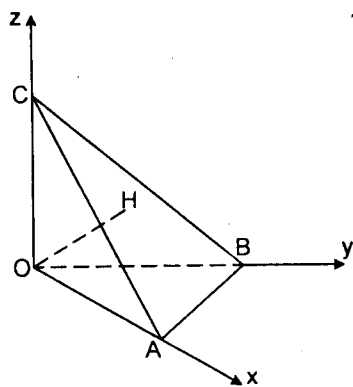
Viết phương trình mặt phẳng (P) qua điểm  $H(2; 1; 1)$  và cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C sao cho H là trọng tâm của tam giác ABC.

**Giải**

Giả sử  $A = (a; 0; 0)$ ,  $B = (0; b; 0)$ ,  $C = (0; 0; c)$ .

Do OA, OB, OC đôi một vuông góc với nhau, và H là trọng tâm tam giác ABC suy ra  $\overrightarrow{OH} \perp (ABC)$ , nên:

$$\overrightarrow{OH} = (2; 1; 1) \text{ là một vector pháp tuyến của } (ABC): \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0.$$



Từ đó ta có:  $\frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} = 2 : 1 : 1$ .

Hay  $b = c = 2a$ . Như vậy (P) có dạng:

$$(P): \frac{x}{a} + \frac{y}{2a} + \frac{z}{2a} = 1 \quad (1)$$

Do (P) qua H (2; 1; 1) nên ta có phương trình:

$$\frac{2}{a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{2a} = 1$$

$$\Rightarrow a = 3. \text{ Vậy (P) có dạng: } \frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{6} = 1.$$

*Nhận xét:* Cùng dạng với thí dụ 2, ta có thí dụ sau:

### Thí dụ 2a

Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua M(1;1;1), N(3;0;1), cắt trục Ox, Oy,

Oz lần lượt tại A, B, C và có khoảng cách từ O tới (P) bằng  $\frac{3\sqrt{14}}{7}$ .

### Giải

Giả sử  $A = (a; 0; 0)$ ,  $B = (0; b; 0)$ ,  $C = (0; 0; c)$  nên (P) có dạng:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ .

Khoảng cách từ điểm O tới (P) là:  $h = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$ .

Theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{a} + \frac{1}{c} = 1 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}} = \frac{7}{3\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{6} & (3) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) suy ra:  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + 1 - \frac{3}{a} = \frac{1}{2b} \Rightarrow a = 2b$ .

Từ đó:  $c = \frac{2b}{2b-3}$ .

Thay lại vào (3) có phương trình:

$$\frac{1}{4b^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{(2b-3)^2}{4b^2} = \frac{7}{18} \Leftrightarrow 11b^2 - 54b + 63 = 0 \Leftrightarrow b = 3 \text{ hoặc } b = \frac{21}{11}.$$

+ Nếu  $b=3$  thì (P) có dạng:  $\frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$ .

+ Nếu  $b = \frac{21}{11}$  thì (P) có dạng:  $\frac{x}{\frac{42}{11}} + \frac{y}{\frac{21}{11}} + \frac{z}{\frac{42}{9}} = 1$ .

**Loại 4:** Các bài toán khác về thiết lập phương trình mặt phẳng:

Nếu như việc thiết lập phương trình mặt phẳng có thể đưa về một trong ba dạng cơ bản trên, thì bài toán có cách giải đơn giản, rõ ràng và hoàn toàn có định hướng. Nếu như ta gặp một bài toán thiết lập phương trình mặt phẳng mà thoát đầu chưa thấy ngay nó có một trong ba dạng trên thì dựa vào điều kiện đầu bài ta cố gắng đưa chúng về các dạng cơ bản đó, hoặc sử dụng trực tiếp dạng tổng quát của phương trình mặt phẳng:

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Khi đó ta cần thiết lập một hệ phương trình để tìm A, B, C, D.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho điểm A (2;5;3) và đường thẳng

$$d: \frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2}.$$

1/ Tìm tọa độ hình chiếu vuông góc của A trên d.

2/ Viết phương trình mặt phẳng (P) chứa d sao cho khoảng cách từ A đến (P) là lớn nhất.

**Giải**

1/ Gọi M là hình chiếu của A trên d. Khi đó  $M = (1+2t; t; 2t-1)$

$$\Rightarrow \vec{AM} = (2t-1; t-5; 2t-1).$$

Vì d có vector chỉ phương là:  $\vec{u} = (2; 1; 2)$ .

$$\text{Nên từ } \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t-1) + (t-5) + 2(2t-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t - 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy } M = (3; 1; 4)$$

2/ Kẻ  $AH \perp (P)$ . Do  $M \in (P)$  và  $M \in (d)$  mà (P) chứa (d)

$\Rightarrow AH \leq AM$ . Vậy  $d(A, (P)) = AH$  nhận giá trị lớn nhất khi và chỉ khi  $AH = AM \Leftrightarrow H = M$ . Lúc đó bài toán trở thành Viết phương trình (P) qua A(2;5;3) và nhận  $\vec{AM} = (1; -4; 1)$  là vector pháp tuyến. Do đó (P) có dạng:

$$(x-2) - 4(y-5) + (z-3) = 0 \Leftrightarrow x - 4y + z - 3 = 0.$$

**Nhận xét:**

1/ Nhờ có phần a) thì ta quy việc viết phương trình (P) về bài toán cơ bản (loại 1).

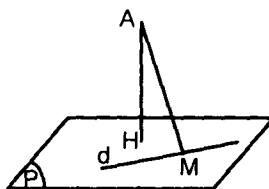
2/ Giả sử bài toán không có câu a) Khi đó bài toán viết phương trình (P) chưa thấy ngay thuộc dạng cơ bản nào. Dĩ nhiên ta phải tự giải bài toán phụ (câu 1) để đưa nó về dạng cơ bản thứ nhất. *Cách giải này là hay nhất.*

3/ Có thể giải cách khác như sau:

Vì d có thể viết lại dưới dạng:

$$d: \begin{cases} x - 2y - 1 = 0 \\ 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$$

nên (P) do chứa (d) nên thuộc chùm mặt phẳng sau:



$$\alpha(x - 2y - 1) + \beta(2y - z + 2) = 0$$

+ Nếu  $\alpha = 0$  chọn  $\beta = 1$  thì lúc đó (P) có dạng  $(P_1): x - 2y - 1 = 0$

Ta có:  $d(A, (P_1)) = \frac{9}{\sqrt{5}}$ .

+ Nếu  $\beta = 0$  chọn  $\alpha = 1$  lúc đó (P) có dạng  $(P_2): 2y - z + 2 = 0$

Ta có:  $d(A, (P_2)) = \frac{9}{\sqrt{5}}$ .

+ Nếu  $\alpha, \beta \neq 0$ , lấy  $\beta = 1$ , lúc này (P) có dạng: (P):  $\alpha x + 2(1 - \alpha)y - z + 2 = 0$

Khi đó:  $d(A, (P)) = \frac{|9 - 9\alpha|}{\sqrt{5\alpha^2 - 8\alpha + 5}}$ .

Ta có:  $d^2(A, (P)) = \frac{81(1 - \alpha)^2}{5\alpha^2 - 8\alpha + 5} = f(\alpha) \Rightarrow f'(\alpha) = 81 \frac{2\alpha^2 - 2}{(5\alpha^2 - 8\alpha + 5)^2}$ .

Ta có bảng biến thiên:

$\alpha$	-2	1
$f'(\alpha)$	+	-
$f(\alpha)$	18	$\frac{81}{5}$

$\frac{81}{5}$       0       $\frac{81}{5}$   
 $\swarrow$        $\searrow$        $\swarrow$

Vậy max của  $f(\alpha) \Leftrightarrow \alpha = -1$ . Từ đó

$\max d(A, (P)) \Leftrightarrow \alpha = -1$

Lúc này (P):  $x - 4y + z - 3 = 0$  (chú ý:  $18 > \frac{9}{\sqrt{5}}$ )

Ta thu lại kết quả trên.

Ở đây ta quy bài toán về bài toán cơ bản: Sử dụng phương trình “chùm mặt phẳng” để giải bài toán lập phương trình mặt phẳng. (Dĩ nhiên kết hợp thêm bài toán tìm giá trị lớn nhất của hàm số).

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A – 2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hình lập phương ABCD.A'B'C'D' với A(0;0;0), B(1;0;0), D(0;1;0) A'(0;0;1). Viết phương trình mặt phẳng chứa A'C và tạo với mặt phẳng (Oxy) một góc  $\alpha$ , biết  $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{6}}$ .

### Giải

Giả sử mặt phẳng (P) cần tìm có vector pháp  $\vec{n} = (\alpha, \beta, \gamma)$ .

Lấy C = (1;1;0) là điểm mà (P) đi qua khi đó (P) có dạng:

$$\alpha(x - 1) + \beta(y - 1) + \gamma z = 0.$$

Vì (P) còn qua  $A' = (0;0;1)$  nên ta có:

$$-\alpha - \beta + \gamma = 0 \Rightarrow \gamma = \alpha + \beta.$$

Vậy (P) có dạng:

$$\alpha x + \beta y + (\alpha + \beta)z - \alpha - \beta = 0.$$

Ngoài ra  $\vec{n}_p = (\alpha; \beta; \alpha + \beta)$ .

Mặt phẳng Oxy có vector pháp tuyến là

$\vec{n}_p = (0;0;1)$  nên ta có:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}_p| |\vec{n}|} = \frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2} \cdot 1}$$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{|\alpha + \beta|}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2}} = \frac{1}{6} \Leftrightarrow 6(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + (\alpha + \beta)^2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 + 5\alpha\beta + 2\beta^2 = 0$$

(Rõ ràng  $\beta \neq 0$  vì nếu  $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$  mâu thuẫn với  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ )

$$\Leftrightarrow \frac{\alpha}{\beta} = -2 \text{ hoặc } \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2}.$$

Nếu  $\frac{\alpha}{\beta} = -2$ , chọn  $\alpha = 2, \beta = -1 \Rightarrow (P): 2x - y + z - 1 = 0$ .

Nếu  $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2}$ , chọn  $\alpha = 1; \beta = -2 \Rightarrow (P): x - 2y - z + 1 = 0$ .

Vậy có hai mặt phẳng (P) thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

### Thí dụ 3

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hình lăng trụ đứng  $ABC.A'B'C'$  có  $A(0;0;0)$ ,  $B(2;0;0)$ ,  $C(0;2;0)$  và  $A'(0;0;2)$ .

Viết phương trình mặt phẳng  $(ABC')$ .

### Giải

Ta có:  $B' = (2;0;2)$ ;  $C' = (0;2;2)$

$$\Rightarrow \vec{A'C} = (0;2;-2); \vec{BC'} = (-2;2;2).$$

Ta có:  $\vec{A'C} \cdot \vec{BC'} = 0 \Rightarrow A'C \perp BC' (1)$

Mặt khác  $AB \perp AC, AB \perp AA \Rightarrow AB \perp (ACC'A)$

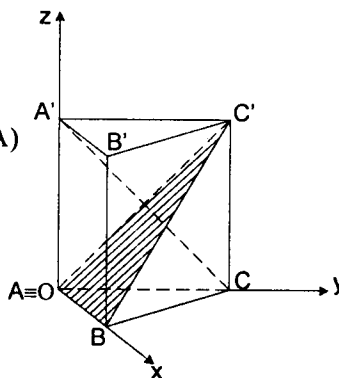
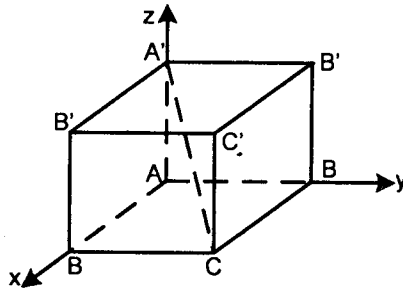
$\Rightarrow AB \perp A'C (2)$

Từ (1) và (2) suy ra  $A'C \perp (ABC')$ .

Vậy  $\vec{A'C} = (0;2;-2)$  là vector pháp tuyến của  $(ABC')$ .

Mặt khác  $(ABC')$  qua  $A(0;0;0)$  nên có dạng:

$$2(y - 0) - 2(z - 0) = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$$



**Nhận xét:**

1/ Cách giải trên là ngắn gọn nhưng phải nhận ra  $\overrightarrow{A'C}$  là vectơ pháp tuyến của mặt phẳng  $(ABC')$ .

2/ Dĩ nhiên có thể làm như sau:

$$\overrightarrow{AB} = (2; 0; 0), \overrightarrow{AC'} = (0; 2; 2)$$

Vậy vectơ pháp  $\vec{n}$  của  $(ABC')$  xác định như sau:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC'}] = \left( \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) = (0; -4; 4).$$

Vậy  $(ABC')$  có dạng:  $-4x + 4y = 0 \Leftrightarrow y - z = 0$ .

Cách giải này rất tự nhiên và đơn giản.

#### **Thí dụ 4**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho  $A(1; 2; 0)$ ,  $B(0; 4; 0)$ ,  $C(0; 0; 3)$ . Viết phương trình mặt phẳng  $(P)$  chứa OA sao cho khoảng cách từ B và C đến  $(P)$  là bằng nhau.

#### **Giải**

Gọi  $\vec{n} = (\alpha; \beta; \gamma)$  là vectơ pháp tuyến của  $(P)$ . Do  $(P)$  qua O nên

$$(P) \text{ có dạng: } \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad (1)$$

Vì  $(P)$  qua  $A(1; 2; 0)$  nên ta có:

$$\alpha + 2\beta = 0 \Rightarrow \alpha = -2\beta.$$

Do đó  $(P)$  có dạng

$$-2\beta x + \beta y + \gamma z = 0.$$

Theo bài ra ta có:

$$\begin{aligned} d(B; (P)) &= d(C; (P)) \\ \Leftrightarrow \frac{|4\beta|}{\sqrt{5\beta^2 + \gamma^2}} &= \frac{|3\gamma|}{\sqrt{5\beta^2 + \gamma^2}} \\ \Leftrightarrow |4\beta| &= |3\gamma|. \end{aligned} \quad (2)$$

Do  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 > 0$  nên từ (2) suy ra:

+ Chọn  $\gamma = 4; \beta = 3 \Rightarrow \alpha = -6$  lúc này:

$$(P): -6x + 3y + 4z = 0.$$

+ Chọn  $\gamma = 4; \beta = -3 \Rightarrow \alpha = 6$  lúc này:

$$(P): 6x - 3y + 4z = 0.$$

Vậy có hai mặt phẳng  $(P)$  cần tìm.



## §2. BÀI TOÁN THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Đường thẳng trong không gian được cho dưới ba dạng cơ bản sau:

- Phương trình chính tắc:

Đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và nhận  $\vec{u} = (a; b; c)$  ( $a^2 + b^2 + c^2 > 0$ ) làm vector chỉ phương có dạng:

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

(Với giả thiết nếu  $a = 0$  thì  $x = x_0$ ,  $b = 0$  thì  $y = y_0$ ,  $c = 0$  thì  $z = z_0$ )

- Phương trình dưới dạng tham số:

Đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0; z_0)$  và nhận vector  $\vec{u} = (a; b; c)$  làm vector chỉ phương có dạng tham số

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}, \text{ với tham số } t \in \mathbb{R}.$$

- Phương trình dưới dạng tổng quát:

Dưới dạng này đường thẳng có dạng:

$$d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}.$$

Khi đó vector chỉ phương  $\vec{u}$  của (d) là:

$$\vec{u} = \left( \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right).$$

**Các dạng bài tập cơ bản**

**Loại 1:** Viết phương trình đường thẳng dưới dạng chính tắc:

Để sử dụng được phương pháp này ta cần biết được:

- Vector chỉ phương của đường thẳng. Điều này sẽ có được ngay nếu biết được hai điểm A, B của đường thẳng cần tìm. Lúc đó  $\overrightarrow{AB}$  sẽ là vector chỉ phương của nó. Nếu như  $d \parallel d_1$ , thì vector chỉ phương của d và  $d_1$  là như nhau.

- Một điểm của đường thẳng d (điều này nói chung là luôn luôn có).

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai điểm  $A(1;4;2)$ ,  $B(-1;2;4)$ . Gọi G là trọng tâm của tam giác OAB. Viết phương trình đường thẳng d vuông góc với mặt phẳng (OAB) tại G.

**Giải**

Dễ thấy:

$$G = \left( \frac{0+1-1}{3}; \frac{0+4+2}{3}; \frac{0+2+4}{3} \right) = (0;2;2).$$

vector pháp tuyến  $\vec{n}$  của (OAB) được xác định như sau:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \left( \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \right) = (12; -6; 6) // (2; -1; 1).$$

Đường thẳng  $d \perp (OAB)$  nên vector chỉ phương của  $(d)$  chính là  $\vec{u} = (2; -1; 1)$

(do  $\vec{u} // \vec{d}$ ). Mà qua  $G(0; 2; 2)$  nên phương trình của  $d$  là:  $\frac{x}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm  $A(1; 2; 3)$  và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1},$$

$$d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$ , vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$ .

**Giải**

Giả sử  $\Delta \cap d_2 = B$  khi đó vì  $B \in d_2$ , nên:

$$B = (1-t; 1+2t; -1+t).$$

$$\text{Từ đó: } \overrightarrow{AB} = (-t; 2t-1; t-4).$$

Ta có thể coi  $\overrightarrow{AB}$  là vector chỉ phương của  $\Delta$ .  $d_1$  có vector chỉ phương là:  $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$ .

$$\text{Vì } \Delta \perp d_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}_1 = 0 \Leftrightarrow -2t - 2t + 1 + t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Vậy  $\Delta$  có vector chỉ phương là  $\overrightarrow{AB} = (1; -3; 5)$  và đi qua  $A(1; 2; 3)$  nên  $\Delta$  có phương trình:

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-3}{5} \text{ hay } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-3}{5}.$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Trong không gian cho điểm  $A(-4; -2; 4)$  và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  cắt và vuông góc với  $d$ .

**Giải**

Gọi  $M$  là hình chiếu của  $A$  trên  $(d)$ .

Vậy  $\Delta$  chính là đường thẳng qua  $A$  và  $M$

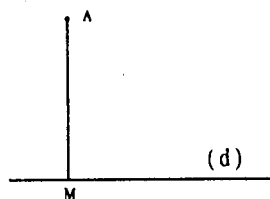
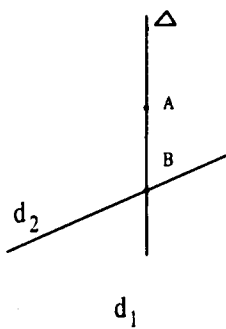
Vì  $M \in d$  nên  $M = (-3+2t; 1-t; -1+4t)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (1+2t; 3-t; -5+4t).$$

$\overrightarrow{AM}$  chính là vector chỉ phương của  $\Delta$ ;  $(d)$  có vector chỉ phương là:  $\vec{u} = (2; -1; 4)$ .

$$\text{Từ } \Delta \perp (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(1+2t) - (3-t) + 4(-5+4t) = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{AM} = (3; 2; -1).$$



Vậy  $\Delta$  có dạng:  $\frac{x+4}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-4}{-1}$ .

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

$$\Delta: \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{-1}$$

và mặt phẳng (P):  $x + 2y - 3z + 4 = 0$ .

Viết phương trình đường thẳng (d) nằm trong (P), vuông góc với  $\Delta$  và cắt  $\Delta$ .

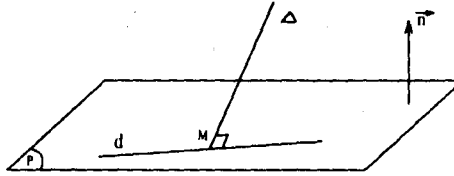
**Giải**

Giả sử  $\Delta \cap (P) = M$ .

Vì  $d \in (P)$  và  $\Delta$  cắt (d) nên  $M \in (d)$ .

Viết lại  $\Delta$  dưới dạng tham số:

$$\Delta: \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 2 + t \\ z = -t \end{cases}$$



Vậy tọa độ (x; y; z) của M là nghiệm của phương trình:

$$(-2 + t) + 2(2 + t) - 3(-t) + 4 = 0 \Leftrightarrow 6t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Vậy  $M = (-3; 1; 1)$ .

Ta có  $d \perp \Delta$ ,  $d \perp \vec{n}$  (ở đây  $\vec{n} = (1; 2; 3)$ )

là vector pháp tuyến của (P). Từ đó nếu gọi  $\vec{u}$  là vector chỉ phương của d,  $\vec{u}_\Delta$  là vector chỉ phương của  $\Delta$  thì:

$$\vec{u} = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}] = \left( \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 2; 1).$$

Vậy (d) có phương trình là:  $\frac{x+3}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{1}$ .

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1}; \quad d_2: \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3. \end{cases}$$

và mặt phẳng (P):  $7x + y - 4z = 0$ .

Viết phương trình đường thẳng (d)

vuông góc với mặt phẳng (P) cắt cả  $d_1$  và  $d_2$ .

**Giải**

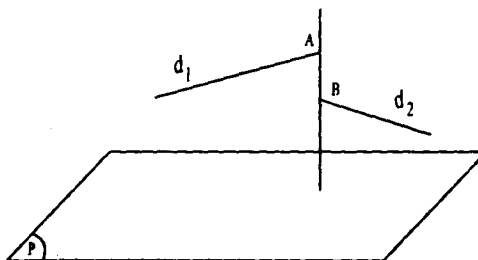
Giả sử  $d \cap d_1 = A$  khi đó  $A \in d_1$  nên:

$$A = (2t_1; 1-t_1; -2+t_1).$$

Giả sử  $d \cap d_2 = B$ . Vì  $B \in d_2$  nên:

$$B = (-1+2t_2; 1+t_2; 3).$$

Vì thế:  $\vec{AB} = (-1+2t_2-2t_1; t_2+t_1; 5-t_1)$  là vector chỉ phương của (d).



Do  $d \in (P)$  nên  $\overrightarrow{AB} // \vec{n} = (7; 1; -4)$ , ở đây  $\vec{n}$  là vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .

Từ đó ta có hệ phương trình sau:

$$\frac{2t_2 - 2t_1 - 1}{7} = \frac{t_2 + t_1}{1} = \frac{5 - t_1}{-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 2t_2 - 2t_1 - 1 = 7t_2 + 7t_1 \\ -4t_2 - 4t_1 = 5 - t_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t_2 = -2 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Từ đó suy ra  $d$  có vectơ chỉ phương là  $\overrightarrow{AB} = (-7; -1; 4)$  và  $d$  đi qua  $A(2; 0; 1)$ ,

nên  $d$  có phương trình:  $\frac{x-2}{7} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ .

**Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}$$

và mặt phẳng  $(P): 2x + y - 2z + 9 = 0$ . Gọi  $A$  là giao điểm của  $d$  với  $(P)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trong  $(P)$  biết  $\Delta$  qua  $A$  vuông góc với  $d$ .

**Giải**

Ta có:  $d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -3 + 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$  có vectơ chỉ

phương  $\vec{u} = (-1; 2; 1)$ , vậy tọa độ  $(x; y; z)$  của  $A$  được suy ra từ phương trình:

$$2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Từ đó  $A = (0; -1; 4)$ .

Vì  $\Delta \perp d$ ;  $\Delta \perp \vec{n}$ , ở đây  $\vec{n} = (2; 1; -2)$  là vectơ pháp tuyến của  $(P)$ , nên vectơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta$  của  $\Delta$  xác định như sau:

$$\vec{u}_\Delta = [\vec{u}, \vec{n}] = \left( \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-5; 0; 5) // (1; 0; 1).$$

$$\text{Vậy } \Delta: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{0} = \frac{z-4}{1}$$

(hay dưới dạng tham số:  $x = t; y = -1; z = 4+t$ )

**Nhận xét:** Do trong vectơ chỉ phương của đường thẳng  $\Delta$  có một thành phần bằng 0, nên ta hay viết nó dưới dạng tham số.

**Thí dụ 7: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Giao thông Vận tải – 2005)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm  $H(1; 2; -1)$  và đường thẳng  $d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$ . Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $H$ , cắt  $d$  và song song với mặt phẳng  $(P): x+y-z+3=0$ .

**Giải**

Do  $(d)$  qua  $H(1; 2; -1)$  nằm trong  $(Q)$ , là mặt phẳng song song với  $(P)$  và qua  $H$ . Ta có  $(Q) // (P)$  nên:  $(Q): x+y-z+m=0$ .

Vì  $(Q)$  qua  $H$ , nên có phương trình:

$$1 + 2 + 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4.$$

Vậy (Q) có dạng:  $x + y - z - 4 = 0$ .

Giả sử  $d \cap (Q) \Rightarrow d \cap \Delta = M$ . Vì  $M \in (d)$

$$\Rightarrow M = (3+t; 3+3t; 2t)$$

Từ đó ta có phương trình:

$$3 + t + 3 + 3t - 2t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Do vậy  $M = (2; 0; -2)$

Đường thẳng  $\Delta$  đi qua H và M nên nhận

$\overrightarrow{HM} = (1; -2; -1)$  là vectơ chỉ phương, vì thế  $\Delta$  có

$$\text{dạng: } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

**Bình luận:** Các bài toán dưới đây chưa góp mặt trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng (2002–2009) nhưng nó có dạng rất cơ bản và hoàn toàn có thể gặp trong các kì thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng những năm tới.

**Thí dụ 8:**

(Bài toán lập phương trình vuông góc chung). Cho  $d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{1}$  và

$$d_2: \begin{cases} \frac{x+1}{2} = y-1 \\ z=3 \end{cases}. \text{ Lập phương trình đường vuông góc chung của } d_1 \text{ và } d_2.$$

**Giải**

Giả sử MN là đường vuông góc chung ( $M \in d_1; N \in d_2$ ).

$$\text{Do } M \in d_1 \Rightarrow M = (2t; 1+t; -2+t)$$

$$\text{Do } N \in d_2 \Rightarrow N = (-1+2s; 1+s; 3)$$

$$\text{Vậy } \overrightarrow{NM} = (2t+1-2s; -t-s; t-5)$$

Do NM là đường vuông góc chung, ta có:

$$\begin{cases} \overrightarrow{NM} \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \\ \overrightarrow{NM} \cdot \mathbf{u}_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6t-3s=3 \\ 3t-5s=-2 \end{cases} \Leftrightarrow t=s=1.$$

$$\text{Vậy } M = (2; 0; 1); N = (1; 2; 3) \Rightarrow \overrightarrow{NM} = (1; -2; -4).$$

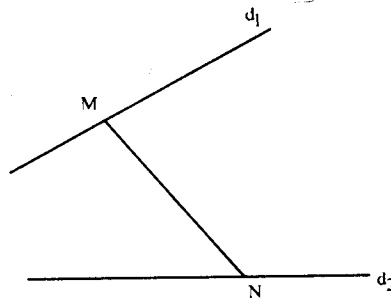
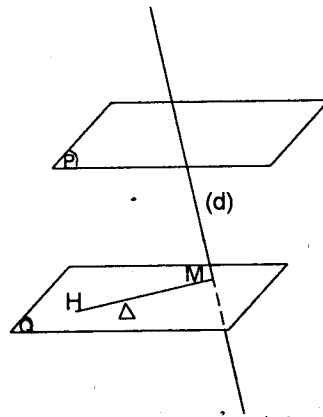
Do đó đường vuông góc chung của  $d_1$  và  $d_2$  có phương trình:  $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-4}$ .

**Chú ý:** 1/ Cách thứ hai tìm đường vuông góc chung dưới dạng “phương trình tổng quát của đường thẳng” xem trong thí dụ 7, loại 2, §2.

2/ Xét một bài toán tương tự:

Cho hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=-1-t \\ z=2 \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{x-3}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{1}$$



Tìm A trên  $d_1$ , B trên  $d_2$  sao cho đoạn AB có độ dài nhỏ nhất. Thực chất đây là bài toán xác định đoạn vuông góc chung MN của  $d_1$  và  $d_2$  với  $M \in d_1, N \in d_2$ . Ra dưới dạng này ta bắt buộc phải sử dụng phương pháp trên (vì muốn xác định được đường vuông góc chung). Giải tương tự ta có:

$$A \equiv M(1; -1; 2) \text{ và } B \equiv N(3; 1; 0).$$

**Thí dụ 9:**

Viết phương trình đường thẳng qua M (2; -1; 1) và vuông góc với hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ 2x - z = 0 \end{cases}; d_2: \begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ z = 0. \end{cases}$$

**Giải**

Để thấy  $d_1$  và  $d_2$ , lần lượt có vector chỉ phương  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  xác định như sau:

$$\vec{u}_1 = \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-1; 1; 2),$$

$$\vec{u}_2 = \left( \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (1; -2; 0).$$

Vì d vuông góc với cả  $d_1$  và  $d_2$ , nên vector chỉ phương  $\vec{u}$  của nó xác định như sau:

$$\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} \right) = (-4; -2; 1).$$

Do d còn qua M (2; -1; 1) nên d có dạng:  $\frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{-1}$ .

**Thí dụ 10**

Viết phương trình đường thẳng song song với đường thẳng:  $\Delta: \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - t \\ z = 5 + t \end{cases}$

và cắt cả hai đường thẳng:  $d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-2}{3}; d_2: \begin{cases} x - y + 4z - 3 = 0 \\ 2x - y - z + 1 = 0 \end{cases}$

**Giải**

Gọi (d) là đường thẳng cần tìm.

Giả sử  $d \cap d_1 = A; d \cap d_2 = B$ .

Ta hãy xác định A và B.

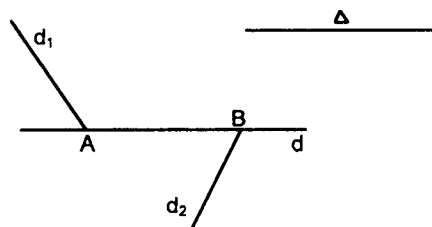
Ta có  $A \in d_1$

$$\Rightarrow A = (1 + t; -2 + 4t; 2 + 3t).$$

Để thấy  $d_2$  có vector chỉ phương

$$\vec{u}_2 = (5; 9; 1) \text{ và đi qua điểm } M(-4; -7; 0)$$

(bạn đọc tự giải) nên:



$$d_2: \begin{cases} x = -4 + 5s \\ y = -7 + 9s, \\ z = s \end{cases}$$

Vậy  $B = (-4 + 5s; 5 + 4t - 9s; s)$ .

Từ đó:  $\overrightarrow{AB} = (5 + t - 5s; 5 + 4t - 9s; 2 + 3t - s)$ .

Vì  $\overrightarrow{AB} // \Delta$ , nên ta có:  $\frac{5 + t - 5s}{3} = \frac{5 + 4t - 9s}{-1} = \frac{2 + 3t - s}{1}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13t + 32s = 20 \\ 7t - 10s = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{-24}{94} \\ s = \frac{49}{94} \end{cases}$$

Từ đó cũng có:  $A = \left(\frac{35}{47}; \frac{142}{47}; \frac{58}{47}\right)$  và  $\overrightarrow{AB} = \left(\frac{201}{94}; \frac{-67}{94}; \frac{67}{94}\right)$

Vậy (d) có phương trình dưới dạng chính tắc như sau:  $\frac{x - \frac{35}{47}}{3} = \frac{y + \frac{142}{47}}{-1} = \frac{z - \frac{58}{47}}{1}$ .

### Thí dụ 11

Viết phương trình đường thẳng d nằm trong mặt phẳng (P):  $y + 2z = 0$  và cắt cả hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}; \quad d_2: \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \\ z = 1 \end{cases}$$

### Giải

Gọi  $A = d_1 \cap (P)$ ;  $B = d_2 \cap (P)$ .

Do  $d_1$  cắt d, mà  $d \in (P) \Rightarrow d_1 \cap d = A$ .

Tương tự  $d_1 \cap d_2 = B$ .

Xét phương trình:  $t + 2(4t) = 0 \Rightarrow t = 0$ .

Vậy  $A = (1; 0; 0)$ .

Tương tự xét phương trình:

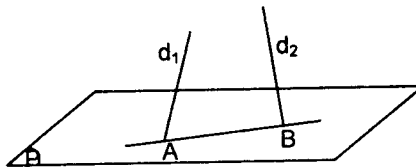
$$4 + 2t + 2 = 0 \Rightarrow t = -3 \Rightarrow B = (5; -2; 1).$$

Đường thẳng d qua A, B nên nhận  $\overrightarrow{AB} = (4; -2; 1)$  là vector chỉ phương, do đó

d có phương trình dưới dạng chính tắc sau:  $\frac{x-1}{4} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ .

**Loại 2:** Viết phương trình đường thẳng dưới dạng tổng quát

Để viết phương trình đường thẳng d dưới dạng tổng quát, ta phải tìm cách quy đường thẳng d thành giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Lúc đó nếu (P) có dạng:  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$  và (Q) có dạng  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$  thì (d) có dạng:



$$(d): \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Bài toán quy về viết phương trình hai mặt phẳng (P) và (Q).

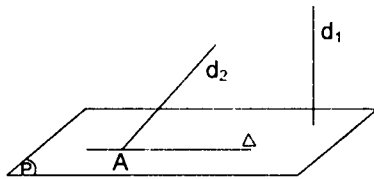
**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho điểm A(1;2;3) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}; \quad d_2: \frac{x-1}{-1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{1}.$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua A, vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$ .

**Giải**



Vì  $\Delta$  qua A và vuông góc với  $d_1$  và cắt  $d_2$  nên  $\Delta$  nằm trong (P) đi qua A và nhận:

$$\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$$

làm vector chỉ phương, ở đây  $\vec{u}_1$  là vector chỉ phương của  $d_1$ . Ta có ngay (P) có dạng:

$$(P): 2(x-1) - (y-2) + (z-3) = 0 \\ \Leftrightarrow 2x - y + z - 3 = 0$$

Mặt khác do  $\Delta$  cắt  $d_2$  và qua A, nên  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng (Q), là mặt phẳng qua A và  $d_2$ .

Ta có:  $M(1;1;-1) \in d_2 \Rightarrow \vec{AM} = (0; -1; -4)$ .

Mặt phẳng (Q) nhận cặp vector  $\vec{u}_2 = (-1; 2; 1)$  và  $\vec{AM}$  làm cặp vector chỉ phương, nên (Q) có vector pháp tuyến là:

$$\vec{n} = [\vec{u}_2, \vec{AM}] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = (-7; -4; 1).$$

(Q) còn qua A(1;2;3) nên (Q) có dạng:

$$(Q): -7(x-1) - 4(y-2) + z-3 = 0 \Leftrightarrow 7x + 4y - z - 12 = 0$$

Vậy:

$$(\Delta): \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0 \\ 7x + 4y - z - 12 = 0 \end{cases}$$

(Chú ý: do  $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \neq 0$  nên  $d_2$  không vuông góc với  $d_1$  do đó  $d_2$  không song song với (P), nên  $d_2$  chắc chắn cắt (P), mà  $\Delta \in (P)$  vậy  $\Delta$  chắc chắn cắt  $d_2$ ).

**Chú ý:**

- Hãy so sánh với cách giải thí dụ trên bằng phương pháp sử dụng phương trình chính tắc của đường thẳng đã trình bày trong thí dụ 2, loại 1, §2.

- Các bạn hãy chuyển lại dạng tổng quát này về dạng chính tắc!

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A – 2007)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1};$$



$$d_2: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 3 \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng  $d$  vuông góc với mặt phẳng  $(P)$ :  $7x + y - 4z = 0$  và cắt cả  $d_1, d_2$ .

**Giải**

Ta thấy  $d_1$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$  và qua điểm  $M(0; 1; -2)$ .

Ngoài ra  $d_2$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$  và đi qua  $N(-1; 1; 3)$ .

Do  $d$  vuông góc với  $(P)$  và cắt  $d_1$ , nên  $d$  nằm trong mặt phẳng  $(Q)$ , là mặt phẳng nhận cặp vector  $\vec{u}_1, \vec{n}$  làm cặp vector chỉ phương và qua  $M$ , ở đây

$\vec{n} = (7; 1; -4)$  là vector pháp tuyến của  $(P)$ .

(Có thể thấy ngay  $(\vec{u}_1, \vec{n})$  cũng như  $(\vec{u}_2, \vec{n})$  không phải là các cặp vector cùng phương).

Ta có:  $(Q)$  và  $(R)$  lần lượt nhận  $\vec{n}_Q, \vec{n}_R$  là vector pháp tuyến xác định như sau:

$$\vec{n}_Q = [\vec{u}_1, \vec{n}] = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = (3; 15; 9).$$

$$\vec{n}_R = [\vec{u}_2, \vec{n}] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} = (-4; 8; -5).$$

Do  $(Q)$  đi qua  $M(0; 1; -2)$  nên  $(Q)$  có dạng

$$(Q): 3x + 15(y - 1) + 9(z + 2) \Leftrightarrow x + 5y + 3z + 1 = 0.$$

Do  $(R)$  đi qua  $N(-1; 1; 3)$  và  $(R)$  có dạng:

$$(R): -4(x + 1) + 8(y - 1) - 5(z - 3) \Leftrightarrow 4x - 8y + 5z - 3 = 0.$$

Vậy đường thẳng  $d$  cần tìm được cho dưới dạng tổng quát:

$$d: \begin{cases} x + 5y + 3z + 1 = 0 \\ 4x - 8y + 5z - 3 = 0 \end{cases}$$

**Chú ý:** Hãy so sánh cách giải trên với cách trình bày trong thí dụ 5, loại 1, §2.

**Thí dụ 3: Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004**

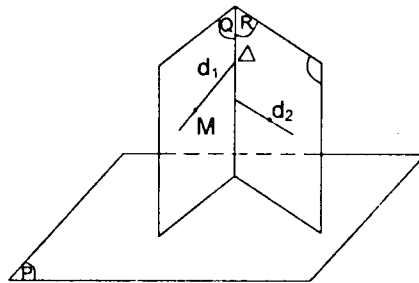
Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm  $A(-4; -2; 4)$  và đường thẳng

$$d: \begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = -1 + 4t \end{cases}$$

Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  đi qua  $A$  và vuông góc với  $d$ .

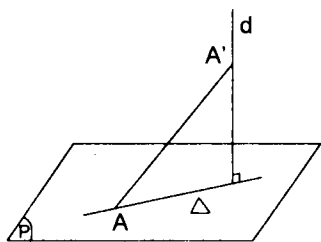
**Giải**

$d$  có vector chỉ phương  $\vec{u} = (2; -1; 4)$  và đi qua điểm  $M(-3; 1; -1)$ .



Vì  $\Delta$  qua A và vuông góc với (d) nên  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng (P). Đó là mặt phẳng qua A và nhận  $\vec{u} = (2; -1; 4)$  là vector pháp tuyến, vậy (P) có dạng

$$(P): 2(x+4) - (y+2) + 4(z-4) = 0 \Leftrightarrow 2x - y + 4z - 10 = 0 \quad (1)$$



Mặt khác, do  $\Delta$  qua A và cắt (d), nên  $\Delta$  nằm trong mặt phẳng (Q) xác định bởi A và (d) ( $A \notin d$ ). Mặt phẳng (Q) này nhận  $\vec{u}$  và  $\overrightarrow{AM} = (1; 3; -5)$  làm cặp vector chỉ phương, do vậy (Q) có vector pháp  $\vec{n}_Q$  xác định như sau:

$$\vec{n}_Q = [\vec{u}, \overrightarrow{AM}] = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = (-7; 14; 7) // (-1; 2; 1)$$

Do (Q) qua A = (-4; -2; 4) nên (Q) có dạng:

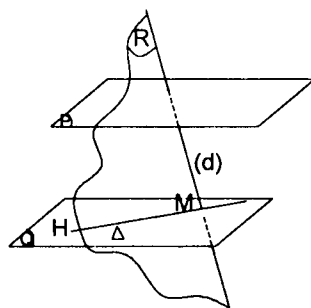
$$-(x+4) + 2(y+2) + (z-4) = 0 \Leftrightarrow -x + 2y + z - 4 = 0$$

Vậy đường thẳng  $\Delta$  phải tìm có dạng sau:

$$\Delta: \begin{cases} 2x - y + 4z - 6 = 0 \\ -x + 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

**Nhận xét:**

- Hãy so sánh với lời giải trong thí dụ 3, loại 1, §2.
- Hãy chứng minh hai đáp số trong thí dụ này và trong thí dụ 3, loại 1, §2 là hai cách biểu diễn khác nhau của cùng một đường thẳng.



**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Giao thông Vận tải 2005)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm H (1; 2; -1) và đường thẳng:

$$d: \frac{x-3}{1} = \frac{y-3}{3} = \frac{z}{2}$$

Lập phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua H, cắt d và song song với mặt phẳng

$$(P): x + y - z + 3 = 0$$

**Giải**

Vì d qua H và song song với (P), nên nó phải nằm trong (Q) là mặt phẳng song song với (P) và qua H. Vì (Q) // (P) nên (Q):

$$x + y - z + m = 0$$

Do Q qua H(1; 2; -1) nên ta có:

$$1 + 2 + 1 + m = 0 \Rightarrow m = -4$$

Từ đó (Q) có dạng  $x + y - z - 4 = 0 \quad (1)$

Gọi (R) là mặt phẳng qua H và (d) nên (R) nhận hai vector  $\vec{u} = (1; 3; 2)$  và

$\overrightarrow{HM}$  là cặp vector chỉ phương, ở đây  $\vec{u}$  là vector chỉ phương của (d) và  $M = (3; 3; 0)$

$\in d \Rightarrow \overrightarrow{HM} = (2; 1; 1)$ . Mặt phẳng (R) có vector pháp tuyến là:

$$\vec{n}_R = [\vec{u}, \vec{HM}] = \left( \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (1; 3; -5).$$

Vậy (R) có dạng  $(x-1) + 3(y-2) - 5(z+1) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5z - 12 = 0$ .

Vậy đường thẳng phải tìm có dạng:  $\begin{cases} x + y - z - 4 = 0 \\ x + 3y - 5z - 12 = 0 \end{cases}$ .

**Nhận xét:** Hãy so sánh lời giải trình bày trong thí dụ 7, loại 1, §2.

**Thí dụ 5:** (Sử dụng phương trình tổng quát của đường thẳng để tìm hình chiếu của một đường thẳng trên một mặt phẳng).

**(Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Bến Tre – 2006)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho đường thẳng:

$$(\Delta): \begin{cases} 2x + y + z + 1 = 0 \\ x + y + z + 2 = 0 \end{cases}$$

và mặt phẳng (P):  $4x - 2y + z - 1 = 0$ .

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của  $\Delta$  trên (P).

**Giải**

Hình chiếu  $\Delta$  của d trên (P) nằm trên mặt phẳng (Q): Đó là mặt phẳng chứa (d) và vuông góc với (P).

Vì (Q) chứa  $(\Delta)$ , nên nó thuộc chùm mặt phẳng:

$$\alpha(2x + y + z + 1) + \beta(x + y + z + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha + \beta)x + (\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta)z + \alpha + 2\beta = 0 \quad (1)$$

(với  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ ) khi đó (Q) có các vectơ pháp là:  $\vec{n}_Q = (2\alpha + \beta; \alpha + \beta; \alpha + \beta)$ .

Vì (P) vuông góc với (Q) nên  $\vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 0$ , ở đây  $\vec{n}_P = (4; -2; 1)$ .

Do đó ta có:

$$4(2\alpha + \beta) - 2(\alpha + \beta) + (\alpha + \beta) = 0 \Leftrightarrow 8\alpha + 4\beta - \alpha - \beta = 0 \Leftrightarrow 7\alpha + 3\beta = 0 \quad (2)$$

Từ (2) và do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , nên chọn  $\alpha = 3; \beta = -7$ .

Thay vào (1) ta có: (Q):  $-x - 4y - 4z - 11 = 0 \Leftrightarrow x + 4y + 4z + 11 = 0$

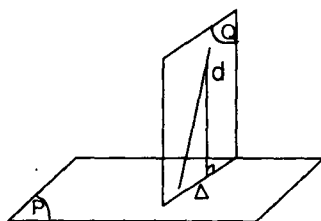
Vậy hình chiếu d của  $\Delta$  trên (P) có dạng sau:  $d: \begin{cases} 4x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 4y + 4z + 11 = 0 \end{cases}$ .

**Nhận xét:** Có thể tìm (Q) như sau:

Đường thẳng  $\Delta$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u}_\Delta = \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0; -1; 1)$ .

Mặt phẳng (Q) nhận  $\vec{u}_\Delta$  và vectơ pháp  $\vec{n} = (4; -2; 10)$  là cặp vectơ chỉ phương, nên (Q) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n}_Q = [\vec{u}_\Delta, \vec{n}] = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \right) = (1; 4; 4).$$



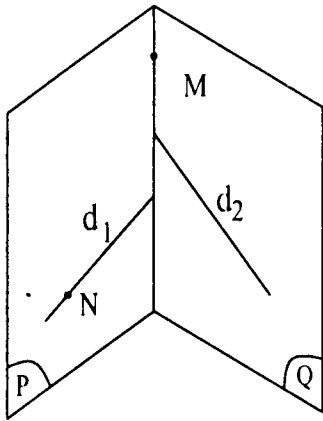
Do (Q) qua  $M(1; -3; 0) \in \Delta$ , nên (Q) có dạng:  $x-1+4(y+3)+4(z-0)=0$   
 $\Leftrightarrow x+4y+4z+11=0$ .

Ta thu lại kết quả trên!

### Thí dụ 6

Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm  $M(1; -1; 1)$  và cắt cả hai đường

$$\text{thẳng: } d_1: \begin{cases} x=1+2t \\ y=t \\ z=3-t \end{cases} ; d_2: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ y=2z-3=0 \end{cases}.$$



### Giải

Gọi (P) là mặt phẳng xác định bởi M và  $(d_1)$ ,  
 (Q) là mặt phẳng xác định bởi M và  $(d_2)$ .

Khi đó gọi  $d = (P) \cap (Q)$ .

Vì (Q) chứa  $d_2$ , nên (Q) thuộc chùm mặt phẳng  
 $\alpha(x+y+z-1) + \beta(y+2z-3) = 0, \alpha^2 + \beta^2 > 0$ .

Vì  $M \in (d_2) \Rightarrow M \in (Q)$ , và ta có:

$$\alpha(1-1+1-1) + \beta(-1+2-3) = 0 \Rightarrow -2\beta = 0 \\ \Rightarrow \beta = 0.$$

Do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  mà  $\beta = 0$  nên chọn  $\alpha = 1$ . Khi  
 đó (Q) có dạng sau:

$$(Q): x+y+z-1=0$$

Mặt phẳng (P) qua  $d_1$  mà qua  $N = (1; 0; 3) \in d_1$   
 và nhận cặp vector  $\vec{u}_1 = (2; 1; -1)$  và  $\vec{MN} = (0; 1; 2)$  là

cặp vector chỉ phương. Vì thế (P) có vector pháp tuyến:

$$\vec{n}_p = [\vec{u}_1, \vec{MN}] = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} = (3; -4; 2).$$

$$\text{Do đó: } (P): 3(x-1) - 4y + 2(z-3) = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y + 2z - 9 = 0$$

$$\text{Vậy đường thẳng d phải tìm có dạng: } d: \begin{cases} x+y+z-1=0 \\ 3x-4y+2z-9=0 \end{cases}.$$

Chú ý: Để thấy d có vector chỉ phương là  $\vec{u} = (-6; -1; 7)$ .

$\vec{u}_1$  và  $d_1$  cũng như  $\vec{u}$  và  $d_2$  không cùng phương  $\Rightarrow d$  và  $d_1$  cũng như  $d$  và  $d_2$  cắt  
 nhau (do d và  $d_1$  cùng nằm trong (P); d và  $d_2$  cùng nằm trong (Q)).

### Thí dụ 7: Viết phương trình đường vuông góc chung

1/ Trình bày cách giải tổng quát của bài toán viết phương trình đường vuông  
 góc chung của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.

2/ Áp dụng phần 1/ giải bài toán sau:

$$\text{Cho } d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z+2}{1} \text{ và } d_2: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 1+t \\ z = 3 \end{cases}.$$

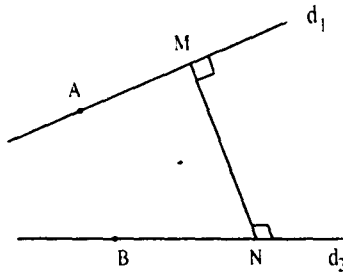
a/ Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  là hai đường thẳng chéo nhau.

b/ Viết phương trình đường vuông góc chung của  $d_1$  và  $d_2$ .

### **Giải**

Giả sử  $d_1$  và  $d_2$  là hai đường thẳng chéo nhau.

Giả sử  $d_1$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_1$  và đi qua điểm A;  
 $d_2$  có vector chỉ phương  $\vec{u}_2$  và đi qua điểm B. Gọi  
MN là đoạn vuông góc chung.



Ta có:  $\overline{MN} \perp d_1; \overline{MN} \perp d_2$ , vậy:  $\overline{MN} // [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$

Đặt  $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ .

Khi đó nếu gọi (P) là mặt phẳng qua A và nhận  $\vec{u}_1, \vec{u}$  là cặp vector chỉ phương; (Q) là mặt phẳng qua B và nhận  $\vec{u}_2, \vec{u}$  là cặp vector chỉ phương thì:  
 $MN = (P) \cap (Q)$ .

Từ đó suy ra cách giải bài toán đường vuông góc chung như sau:

a. Tìm  $\vec{u} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ .

b. Tìm vector pháp  $\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}] \Rightarrow$  phương trình của mặt phẳng (P).

c. Tìm vector pháp  $\vec{n}_Q = [\vec{u}_2, \vec{u}] \Rightarrow$  phương trình của mặt phẳng (Q).

d. Giả sử: (P):  $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ ; (Q):  $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$

$$\text{Khi đó: } d: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

là đường vuông góc chung cần tìm.

2/ Xét bài toán cụ thể trên: ta có  $\vec{u}_1 = (2; -1; 1)$  và  $A(0; 1; -2) \in d_1$

$\vec{u}_2 = (2; 1; 0)$  và  $B(-2; 1; 3) \in d_2$ .

Lúc đó  $\vec{u} = [\vec{u}_1; \vec{u}_2] = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-1; 2; 4)$ , nên

$\vec{n}_P = [\vec{u}_1, \vec{u}] = \left( \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \right) = (6; 9; -3) // (2; 3; -1)$ ,

$\vec{n}_Q = [\vec{u}_2, \vec{u}] = \left( \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-4; 8; -5)$ .

Do (P) qua A  $(0; 1; -2)$  và (Q) qua B  $(-2; 1; 3)$  nên

(P):  $2x + 3y - z - 5 = 0$  và (Q):  $4x - 8y + 5z - 3 = 0$ .

Vậy đường vuông góc cần tìm là:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z - 5 = 0 \\ 4x - 8y + 5z - 3 = 0 \end{cases}$$

**Loại 3:** Các bài toán khác về thiết lập phương trình đường thẳng:

Để giải các bài toán này ta tiến hành theo các bước sau:

- **Bước 1:** Dựa vào yêu cầu đầu bài, thực hiện các thao tác phụ, như kẻ thêm đường (thường là kẻ thêm đường song song hoặc đường vuông góc), để quy bài

toán cần giải về một trong hai bài toán cơ bản (loại 1 hoặc loại 2) viết phương trình đường thẳng.

- *Bước 2:* Thực hiện một phép giải cơ bản đã biết (được trình bày cẩn thận trong loại 1, loại 2).

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P):  $x - 2y + 2z - 5 = 0$ , hai điểm A(-3;0;1) và B(1;-1;3).

Trong các đường thẳng đi qua A và song song với (P), hãy viết phương trình đường thẳng mà khoảng cách từ B đến đó là nhỏ nhất.

**Giải**

Đường thẳng d qua điểm A và song song với (P) nên nó nằm trong mặt phẳng (Q) qua A và song song với (P). Rõ ràng (Q) cố định.

Vì  $(Q) \parallel (P)$  nên nó có dạng

$$(Q): x - 2y + 2z + m = 0 \quad (1)$$

Do (Q) qua A(-3;0;1) nên ta có:

$$-3 + 2 + m = 0 \Rightarrow m = 1.$$

Vậy (Q) có dạng:  $x - 2y + 2z + 1 = 0 \quad (2)$

Kẻ  $BH \perp (Q)$ . Khi đó H cố định.

Ta xác định H như sau: Do  $\overrightarrow{BH} \parallel \vec{n} = (1; -2; 2)$ ; ở đây  $\vec{n}$  là vector pháp tuyến của

$$(Q) \text{ nên } BH \text{ có dạng: } BH: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 - 2t \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Vì thế  $H = (1+t; -1-2t; 3+2t)$

Do  $H \in (Q)$ , nên ta có phương trình:

$$1 + t - 2(-1 - 2t) + 2(3 + 2t) + 1 = 0 \Leftrightarrow 9t + 10 = 0 \Leftrightarrow t = -\frac{10}{9}.$$

$$\text{Do đó } H\left(\frac{-1}{9}; \frac{11}{9}; \frac{7}{9}\right).$$

Kẻ  $BK \perp d$ , khi đó  $BK \geq BH$

Vậy  $d(B, d)$  đạt giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow K \equiv H$ .

Nói cách khác đường thẳng d cần tìm là đường thẳng qua hai điểm A và H.

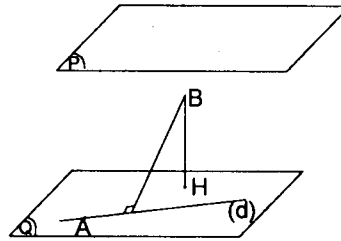
Vì thế  $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{26}{9}; \frac{11}{9}; -\frac{2}{9}\right) \parallel (26; 11; -2)$  là vector chỉ phương của d.

Do d qua A(-3;0;1), vậy d có phương trình chính tắc sau:  $\frac{x+3}{26} = \frac{y}{11} = \frac{z-1}{-2}$

***Nhận xét***

- Bằng phép vẽ thêm mặt phẳng (Q) song song với (P) và sử dụng dấu hiệu nhận biết giá trị nhỏ nhất, ta xác định được thêm một điểm nằm trên d.

- Bài toán quy về một trong các bài toán cơ bản loại 1.



## ĐỊNH ĐIỂM VÀ CÁC YẾU TỐ KHÁC TRONG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN

mục này xét các bài toán xác định điểm trong hình học không gian, đặc biệt là bài toán xác định hình chiếu của điểm trên mặt phẳng, trên đường thẳng; và xác định điểm đối xứng...

Bài toán đề cập trong mục này cũng thường có mặt trong các đề thi tuyển sinh đại học, Cao đẳng trong những năm 2002 – 2009.

**Lưu ý 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P):  $x - 2y + 2z - 1 = 0$  và đường thẳng  $d_1$ :

$$d_1: \frac{x+1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z+9}{6}; \quad d_2: \frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z+1}{-2}.$$

Tìm điểm M trên  $d_1$  sao cho khoảng cách từ M đến  $d_2$  bằng khoảng cách từ M đến mặt phẳng (P).

### Giải

Giả sử  $M(-1+t; t; -9+6t) \in d_1$  là điểm cần tìm.

$$\text{Khi đó ta có: } d(M, (P)) = \frac{|-1+t-2t+2(-9+6t)-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} = \frac{|11t-20|}{3} \quad (1)$$

Đường thẳng  $d_2$  có vectơ chỉ phương  $\vec{u}_2 = (2; 1; -2)$  và đi qua điểm  $N(1; 3; -1)$

$$\vec{NM} = (t-2; t-3; 6t-8)$$

$$\text{Ta có: } [\vec{NM}, \vec{u}_2] = \begin{vmatrix} t-2 & 6t-8 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (14-8t; 14t-20; 4-t).$$

$$\text{Do vậy: } d(M, (d_2)) = \frac{|\vec{NM}, \vec{u}_2|}{|\vec{u}_2|} = \frac{\sqrt{(14-8t)^2 + (14t-20)^2 + (4-t)^2}}{3}.$$

$$\text{Vì vậy: } d(M, (P)) = d(M, (d_2)) \Leftrightarrow \sqrt{261t^2 - 792t + 612} = |11t - 20|$$

$$\Leftrightarrow 261t^2 - 792t + 612 = 121t^2 - 440t + 400 \Leftrightarrow 35t^2 - 88t + 53 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=\frac{53}{35} \end{cases}$$

$$\text{Vậy có hai điểm cần tìm: } M_1(0; 1; -3); M_2\left(\frac{18}{35}; \frac{53}{35}; \frac{3}{35}\right).$$

**Thí dụ 2 (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2008)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho ba điểm  $A(0; 1; 2)$ ,  $B(2; -2; 1)$ ,  $C(-2; 0; 1)$  và mặt phẳng (P):  $2x + 2y + z - 3 = 0$ .

1/ Viết phương trình mặt phẳng (ABC).

2/ Tìm điểm  $M \in (P)$  sao cho  $MA = MB = MC$ .

### Giải

1/ Theo thí dụ 1, loại 1, §1 thì mặt phẳng (ABC) có phương trình:

$$x + 2y - 4z + 6 = 0$$

Ta có:

$$AB^2 = 4 + 9 + 1 = 14; AC^2 = 4 + 1 + 1 = 6$$

$$BC^2 = 16 + 4 = 20.$$

$$\Rightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2 \Rightarrow \widehat{BAC} = 90^\circ.$$

Gọi I là trung điểm của BC, thì  $I = (0; -1; 1)$  và  $IA = IB = IC$ . Vì  $MA = MB = MC$ , nên I chính là hình chiếu của điểm M trên (ABC).

Theo câu 1/ thì (ABC) có phương trình  $x + 2y - 4z + 6 = 0$ , nên vectơ pháp  $\vec{n} = (1; 2; -4)$  của (ABC) chính là vectơ chỉ phương của đường thẳng MI.

Đường thẳng MI qua I  $(0; -1; 1)$  nên MI có phương trình:

$$\begin{cases} x = t \\ y = -1 + 2t \\ z = 1 - 4t \end{cases}$$

Mặt khác M còn nằm trên (P):  $2x + 2y + z - 3 = 0$ , nên ta có phương trình:

$$2t + 2(-1 + 2t) + 1 - 4t - 3 = 0 \Rightarrow t = 2.$$

Vậy  $M = (2; 3; -7)$  là điểm cần tìm.

*Chú ý:*

Câu 2/ có thể giải độc lập như sau:

Gọi M  $(x; y; z)$  là điểm cần tìm. Khi đó ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 2x + 2y + z - 3 = 0 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 + (z-1)^2 \\ x^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = (x+2)^2 + y^2 + (z-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 2y + z = 3 \\ 4x - 6y - 2z = 4 \\ -4x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 2; y = 3; z = -7.$$

Vậy  $M = (2; 3; -7)$  ta thu lại kết quả trên.

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D - 2007)**

Trong không gian cho hai điểm A  $(1; 4; 2)$ , B  $(-1; 2; 4)$  và đường thẳng:

$$\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z}{2}.$$

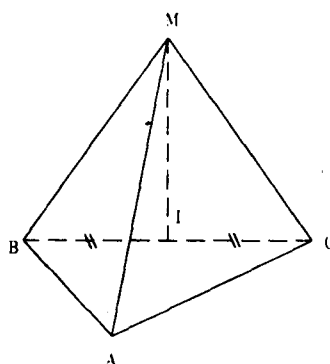
Tìm điểm M  $\in \Delta$  sao cho đại lượng  $MA^2 + MB^2$  nhận giá trị nhỏ nhất.

### Giải

Viết lại  $\Delta$  dưới dạng tham số sau:

$$\Delta: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = -2 + t \\ z = 2t \end{cases}$$

Khi đó M  $\in \Delta$ , nên M  $= (1 - t; -2 + t; 2t)$ .





Lúc đó ta có:

$$MA^2 + MB^2 = \left[ (1-t-1)^2 + (-2+t-4)^2 + (2t-2)^2 \right] + \left[ (1-t+1)^2 + (-2+t-2)^2 + (2t-4)^2 \right]$$

$$= 12t^2 - 48t + 76 = 12(t-2)^2 = 28(1) \Leftrightarrow t = 2.$$

Từ (1) suy ra:  $MA^2 + MB^2$  nhận giá trị bé nhất  $= 28 \Leftrightarrow t = 2 \Leftrightarrow M = (-1; 0; 4)$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A (0;1;2) và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-1}; \quad d_2: \begin{cases} x = 1+t \\ y = -1-2t \\ z = 2+t \end{cases}$$

Tìm tọa độ các điểm M  $\in d_1$ , N  $\in d_2$  sao cho A, M, N thẳng hàng.

**Giải**

Vì M  $\in d_1 \Rightarrow M = (2t; 1+t; -1-t)$

Vì N  $\in d_2 \Rightarrow N = (1+s; -1-2s; 2+s)$

Từ đó ta có:  $\overrightarrow{AM} = (2t; t; -3-t)$  và  $\overrightarrow{AN} = (1+s; -2-2s; s)$ .

Ta có A, M, N thẳng hàng  $\Leftrightarrow [\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AN}] = \vec{0}$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} t & -3-t & -1-t \\ -2-2s & s & 1+s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3-t & 2t \\ s & 1+s \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2t & t \\ 1+s & -2-s \end{vmatrix} = (0; 0; 0).$$

$$\Leftrightarrow (-ts-2t-6s-6; -3ts-t-3s-3; -5ts-5t) = (0; 0; 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ts + 2t + 6s + 6 = 0 & (1) \\ 3ts + t + 3s + 3 = 0 & (2) \\ 5t(1+s) = 0 & (3) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra  $t=0$  hoặc  $s=-1$ .

+ Nếu  $t=0$ , thay vào (1), (2) có:  $\begin{cases} 6s+6=0 \\ 3s+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow s=-1.$

+ Nếu  $s=-1$ , thay vào (1), (2) có:  $\begin{cases} t=0 \\ -2t=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=0.$

Vậy hệ (1), (2), (3)  $\Leftrightarrow \begin{cases} t=0 \\ s=-1. \end{cases}$

Do đó M = (0;1;-1)  $\in d_1$ ; còn N = (0;1;1)  $\in d_2$  là hai điểm cần tìm.

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm A (1;2;3) và đường thẳng:

$$d: \frac{x-2}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{1}.$$

Tìm tọa độ điểm A' đối xứng với điểm A qua d.

**Giải**

Gọi M là hình chiếu của A trên d.

Do M  $\in d \Rightarrow M = (2+2t; -2-t; 3-t)$

$$\Rightarrow \overrightarrow{AM} = (2t+1; -t-4; -t),$$

d có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (2; -1; 1)$

$$\text{Ta có } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2(2t+1) + t + 4 + t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = -1$$

$$\text{Vậy } M = (0; -1; 2)$$

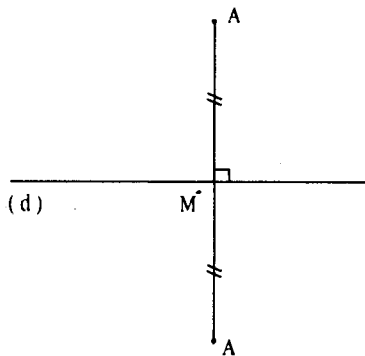
Do M là trung điểm của AA' nên ta có:

$$x_{A'} = 2x_M - x_A = 2 \cdot 0 - 1 = -1$$

$$y_{A'} = 2y_M - y_A = 2 \cdot (-1) - 4 = -6$$

$$z_{A'} = 2z_M - z_A = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

Vậy A' = (-1; -6; 1) là điểm đối xứng của A qua d.



**Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)**

Trong không gian cho đường thẳng d: 
$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases} \text{ và}$$

điểm M (2; 1; 4). Tìm tọa độ điểm H thuộc d sao cho đoạn thẳng MH có độ dài nhỏ nhất.

**Giải**

H chính là hình chiếu của M trên (d). Giải như thí dụ 5 ta có: H = (2; 3; 3).

*Chú ý:*

Có thể giải như sau: Do H = (1 + t; 2 + t; 1 + 2t)

$$\Rightarrow MH^2 = (t-1)^2 + (t+1)^2 + (2t-3)^2 = 6(t-1)^2 + 5$$

Vậy MH đạt giá trị nhỏ nhất  $\Leftrightarrow t=1 \Leftrightarrow H(2; 3; 3)$ .

**Thí dụ 7: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2}; d_2: \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+y-12=0 \end{cases}$$

Giả sử  $d_1 \cap (Oxz) = A$ ;  $d_2 \cap (Oxz) = B$ . Tìm diện tích tam giác OAB.

**Giải**

Từ hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+1}{2} \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow x=-5; y=0; z=-5.$$

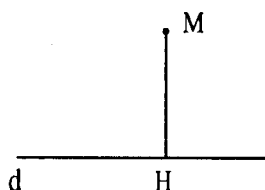
Vậy A (-5; 0; -5).

(Mặt phẳng Oxz có phương trình y = 0).

$$\text{Tương tự, từ hệ phương trình: } \begin{cases} x+y-z-2=0 \\ x+y-12=0 \end{cases} \Rightarrow x=12; y=0; z=10.$$

Vậy B = (12; 0; 10).

Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (-5; 0; -5)$ ;  $\overrightarrow{OB} = (12; 0; 10)$ .



Vì thế  $[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}] = \begin{vmatrix} 0 & -5 & -5 \\ 0 & 10 & 12 \\ 12 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0; -10; 0)$ .

Vậy  $S_{OAB} = \frac{1}{2} |[\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}]| = \frac{1}{2} \cdot 10 = 5$  (đvdt)

**Thí dụ 8: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A – 2005)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng và mặt phẳng (P) như

sau:

$$d: \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z-3}{1}; (P): 2x + y - 2z + 9 = 0.$$

1/ Tìm tọa độ điểm I thuộc d sao cho khoảng cách từ I đến (P) bằng 2.

2/ Tìm tọa độ điểm A, nếu  $A = d \cap (P)$ .

**Giải**

1/ Do  $I \in d \Rightarrow I = (1-t, -3+2t, 3+t)$ .

$$\text{Do } d(I, (P)) = 2 \Leftrightarrow \frac{|2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2}} = 2 \Leftrightarrow |2-2t| = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 4 \end{cases}.$$

Vậy trên d có hai điểm cần tìm  $I_1(3; -7; 1)$  và  $I_2(-3; 5; 7)$

2/ Xét phương trình  $2(1-t) + (-3+2t) - 2(3+t) + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

Vậy  $A = (0; -1; 4)$  là giao điểm của d với (P)

**Thí dụ 9: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm TP Hồ Chí Minh – 2005)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxy, cho mặt phẳng (P):  $x + y + z - 4 = 0$  và ba điểm A (3;0;0), B(0; -6;0) và C (0;0;6). Tìm tất cả các điểm M sao cho:

$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}|$  là nhỏ nhất.

**Giải**

Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Ta có:

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GC}| = |3\overrightarrow{MG}|$$

(do  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ ). Từ đó:

$$\text{Min } |\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} = \vec{0} \Leftrightarrow M \equiv G \Leftrightarrow M = (0; -2; 2).$$

**Thí dụ 11:**

Cho hai điểm A (-1;3;2); B(-9;4;9) và mặt phẳng (P):  $2x - y + z + 1 = 0$ . Tìm điểm K  $\in (P)$  sao cho AK+BK là nhỏ nhất.

**Giải**

Đặt  $f(x, y, z) = 2x - y + z + 1$ .

Ta có:  $f(-1; 3; -2) = -6 < 0$ ;  $f(-9; 4; 9) = -12 < 0$

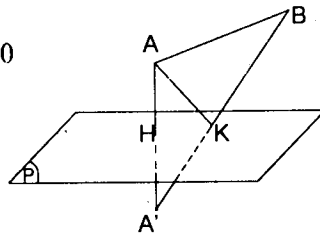
$\Rightarrow A, B$  ở cùng một phía của (P).

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua (P).

Giả sử  $A'B \cap (P) = K$  khi đó dễ thấy K chính là điểm cần tìm.

Gọi H là hình chiếu của A trên (P).

Đường thẳng qua A, H nhận vector pháp  $\vec{n} = (2; -1; 1)$  là vector chỉ phương, do đó nó có dạng:



$$\begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = 3 - t \\ z = -3t \end{cases}$$

Từ đó  $H = (-1+2t; 3-t; -2+t)$ , và do  $H \in (P)$  nên ta có phương trình

$$2(-1+2t) - (3-t) + (-2+t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow H = (1; 2; -1).$$

Vì  $H$  là trung điểm của  $AA' \Rightarrow A' = (3; 1; 0)$ .

Ta có:  $\overrightarrow{BA'} = (12; -3; -9) // (4; -1; -3)$  nên phương trình  $BA'$  có dạng: 
$$\begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = 1 - t \\ z = -3t \end{cases}$$

Do  $K \in (P)$  nên ta có phương trình:

$$2(3+4t) - (1-t) + (-3t) + 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \Leftrightarrow K = (-1; 2; 3).$$

## §4. BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ VỚI ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG TRONG KHÔNG GIAN

Cũng giống như các bài toán có tham số khác trong đại số, giải tích, lượng giác... các bài toán có tham số trong hình học nói chung và trong chuyên mục này nói riêng ta cũng tuân theo các quy tắc sau đây:

- *Bước 1:* Giải một bài toán hình học thuần túy và tất nhiên trong đáp số của bài toán này vẫn chứa tham số.

- *Bước 2:* Tìm các giá trị thích hợp của tham số để thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng  $(P): 2x - y + 2 = 0$  và đường thẳng:

$$d_m: \begin{cases} (2m+1)x + (m-1)y + m-1 = 0 \\ mx + (2m+1)z + 4m+2 = 0 \end{cases}$$

Tìm  $M$  để  $d_m$  song song với  $(P)$ .

Gọi  $\vec{u}_m$  là vectơ chỉ phương của  $d_m$ , thì

$$\vec{u}_m = \left( \begin{vmatrix} 1-m & 0 \\ 0 & 2m+1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2m+1 \\ 2m+1 & m \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2m+1 & 1-m \\ m & 0 \end{vmatrix} \right) = (-2m^2+m+1; -4m^2-4m-1; m^2-m).$$

Vì  $d_m // (P)$  nên điều kiện cần là  $\vec{u}_m \cdot \vec{n} = 0$ , ở đây  $\vec{n} = (2; -1; 0)$  là vectơ pháp tuyến của  $(P)$ .

$$\text{Ta có: } \vec{u}_m \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 2(-2m^2+m+1) - (-4m^2-4m-1) = 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Khi } m = -\frac{1}{2} \text{ thì } d_m \text{ có dạng: } d: \begin{cases} y = 1 \\ x = 0 \end{cases}.$$

Rõ ràng với mọi  $z \in \mathbb{R}$  thì  $A = (0; 1; z) \in d_m$  với  $m = -\frac{1}{2}$ , nhưng  $A \notin (P)$ .

Vậy  $d \parallel (P)$ , tức là  $m = -\frac{1}{2}$  thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

**Chú ý:**

Việc thử lại  $m = -\frac{1}{2}$  xem  $d_m$  với  $m = -\frac{1}{2}$  có song song với  $(P)$  không là điều cần thiết.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D - 2003)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng

$$d_k : \begin{cases} x + 3ky - z + 2 = 0 \\ kx - y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

Tìm  $k$  để đường thẳng  $d_k$  vuông góc với mặt phẳng  $(P): x - y - 2z + 5 = 0$ .

**Giải**

Đường thẳng  $d_k$  có vector chỉ phương:

$$\vec{u}_k = \left( \begin{vmatrix} 3k & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & k \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 3k \\ k & -1 \end{vmatrix} \right) = (3k - 1; -k - 1; -1 - 3k^2)$$

Rõ ràng  $\vec{u}_k \neq \vec{0}$  với mọi  $k$

$$\text{Ta có } d_k \perp (P) \Leftrightarrow \vec{u}_k \parallel \vec{n} \Leftrightarrow \frac{3k-1}{1} = \frac{-k-1}{-1} = \frac{-1-3k^2}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3k-1 = k+1 \\ 2(3k-1) = 1+3k^2 \end{cases} \Leftrightarrow k=1.$$

Vậy  $k=1$  là giá trị duy nhất của tham số  $k$  để  $d_k \perp (P)$ .

**Thí dụ 3:**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1 : \begin{cases} x - az - a = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases} \text{ và } d_2 : \begin{cases} ax + 3y - 3 = 0 \\ x + 3z - 6 = 0 \end{cases}$$

Tìm  $a$  để  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau.

**Giải**

$d_1$  và  $d_2$  cắt nhau khi và chỉ khi hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} x - az - a = 0 & (1) \\ y - z + 1 = 0 & (2) \\ ax + 3y - 3 = 0 & (3) \\ x + 3z - 6 = 0 & (4) \end{cases}$$

có nghiệm duy nhất. Từ (2) suy ra  $y = z - 1$ ; từ (4) suy ra  $x = 6 - 3z$ . Vậy:

$$\text{hệ (1), (2), (3), (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z - 1; x = 6 - 3z \\ 6 - 3z - az - a = 0 \\ 6a - 3az + 3z - 3 - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = z - 1; x = 6 - 3z \\ z(3 + a) = 6 - a \\ 3z(1 - a) = 6(1 - a) \end{cases} \quad \begin{matrix} (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Vậy hệ (1) (2) (3) (4) có nghiệm duy nhất  $\Leftrightarrow$  hệ (5) (6) có nghiệm duy nhất.

+ Nếu  $a = -3 \Rightarrow$  (5) vô nghiệm.

+ Nếu  $a = 1$ , khi đó (5) (6)  $\Leftrightarrow 4z = -5$  (7)

Vì (7) có nghiệm duy nhất  $\Rightarrow a = 1$  chấp nhận được.

$$\text{Nếu } a \neq -3 \text{ và } a \neq 1 \text{ thì: } (5)(6) \Leftrightarrow \begin{cases} z = \frac{6-a}{3+a} & (8) \\ z = 2 & (9) \end{cases}$$

Từ đó suy ra:  $\frac{6-a}{3+a} = 2 \Leftrightarrow a = 0$ .

Vậy  $a = 0$  và  $a = 1$  là hai giá trị để  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau.

*Chú ý:*

1/ Cách giải trên thuần túy dựa vào đại số.

2/ Ta có thể giải như sau:

$$d_1 \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}_1 = \left( \begin{vmatrix} 0 & -a \\ 0 & -1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -a & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right) = (0; 1; 1),$$

ngoài ra  $M(a; -1; 0) \in d_1$ .

$$d_2 \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}_2 = \left( \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & a \\ 3 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (9; -3a; -3),$$

ngoài ra  $N(0; 1; 2) \in d_2$ .

Ta có

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left( \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -3a & -3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 9 & -3a \end{vmatrix} \right) = (3a - 3; 9; -9); \vec{MN} = (-a; 2; 2).$$

$$\text{Do đó: } [\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = -3a^2 + 3a$$

Để  $d_1, d_2$  cắt nhau điều kiện cần là  $\vec{u}_1, \vec{u}_2$  phải đồng phẳng, tức là

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2] \cdot \vec{MN} = 0 \Leftrightarrow -3a^2 + 3a = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = 1. \end{cases}$$

Đảo lại: Nếu  $a = 0$ ;  $\vec{u}_1 = (0; 1; 1)$  và  $\vec{u}_2 = (9; 0; -3)$  không cùng phương nên  $d_1$  và  $d_2$ .

Nếu  $a = 1$  thì  $\vec{u}_1 = (0; 1; 1)$  và  $\vec{u}_2 = (9; -3; -3)$  không cùng phương nên  $d_1$  cắt  $d_2$

Vậy  $a = 0$  và  $a = 1$  là hai giá trị cần tìm của tham số  $a$  để  $d_1$  và  $d_2$  cắt nhau.

### BÀI TẬP TỰ GIẢI

#### Bài 1 (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng giao thông 2004)

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm  $G(1; 1; 1)$ .

1/ Viết phương trình mặt phẳng (P) qua G và vuông góc với đường thẳng OG.

2/ Mặt phẳng (P) ở câu 1/ cắt các trục Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C. Chứng minh ABC là tam giác đều.

$$\text{Đáp số: 1/ } \frac{x}{3} + \frac{y}{3} + \frac{z}{3} = 1.$$

**Bài 2: (Đề thi tuyển sinh cao đẳng sư phạm khối A – 2004)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho đường thẳng d và mặt phẳng (P):

$$(d): \begin{cases} 2x + y + z + 5 = 0 \\ 2x - z + 3 = 0 \end{cases} \quad (P): x + y + z - 7 = 0$$

Viết phương trình hình chiếu vuông góc của (d) trên (P).

Đáp số:  $\begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 6x - y - 5z + 7 = 0 \end{cases}$

**Bài 3:**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho mặt phẳng (P):  $4x - 3y + 11z - 26 = 0$  và hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+1}{3}; \quad d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2}.$$

1/ Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.

2/ Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  nằm trên (P) và cắt  $d_1, d_2$ .

Đáp số 2/  $\Delta: \frac{x+2}{5} = \frac{y-7}{8} = \frac{z-5}{-4}.$

**Bài 4:**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho điểm M (5;2; -3) và mặt phẳng (P):  $2x + 2y - z + 1 = 0$ .

1/ Xác định hình chiếu  $M_1$  của M trên (P).

2/ Viết phương trình mặt phẳng (Q) qua M và chứa đường thẳng.

$$\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-5}{-6}.$$

Đáp số: 1/  $M_1 (1; -2; -1)$ ; 2/  $x + 4y + z - 10 = 0$ .

**Bài 5:**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai điểm I(0;0;1) và K(3;0;0). Viết phương trình mặt phẳng qua I, K và tạo với mặt phẳng (xOy) một góc bằng  $30^\circ$ .

Đáp số:  $\begin{cases} \frac{x}{3} + \frac{y}{3\sqrt{2}} + \frac{z}{1} = 1 \\ \frac{x}{3} - \frac{y}{3\sqrt{2}} + \frac{z}{1} = 1. \end{cases}$

**Bài 6:**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1} \quad \text{và} \quad d_2: \begin{cases} 3x - z + 1 = 0 \\ 2x + y - 1 = 0 \end{cases}$$

1/ Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau.

2/ Viết phương trình đường thẳng d cắt cả  $d_1, d_2$  và song song với đường

thẳng  $\Delta: \frac{x-4}{1} = \frac{y-7}{4} = \frac{z-3}{-2}.$

Đáp số:  $\begin{cases} 4x - y - 5 = 0 \\ 2x + z - 6 = 0. \end{cases}$

**Bài 7: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Quảng Ngãi – 2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng có phương trình:

$$d_1: \begin{cases} 2x - y + 3z - 5 = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}; d_2: \begin{cases} 2x - 2y - 3z - 17 = 0 \\ 2x - y - 2z - 3 = 0 \end{cases}$$

và điểm  $A(3; 2; 5)$

- 1/ Tìm tọa độ điểm  $A'$  đối xứng với  $A$  qua  $d_1$ .
- 2/ Lập phương trình mặt phẳng đi qua  $d_1$  và song song với  $d_2$ .
- 3/ Tính khoảng cách giữa hai đường  $d_1$  và  $d_2$ .

Đáp số: 1/  $A' = (-17; -24; -11)$

2/  $4x + 3y + z - 5 = 0$

3/  $\frac{69}{\sqrt{26}}$ .

**Bài 8: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hùng Vương – 2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 5 - t \end{cases} \text{ và } d_2: \begin{cases} x + y + z - 7 = 0 \\ 2x + 3y + z - 16 = 0. \end{cases}$$

- 1/ Chứng minh  $d_1 // d_2$ .
- 2/ Viết phương trình mặt phẳng chứa  $d_1$  và  $d_2$ .

Đáp số: 2/  $3x + 5y + z - 25 = 0$ .

**Bài 9: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Y tế I-2006)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho hai đường thẳng  $d_1, d_2$  và mặt phẳng (P) có phương trình:

$$d_1: \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{1}; d_2: \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{5} = \frac{z}{-2}; (P): 2x - y - 5z + 1 = 0$$

- 1/ Chứng minh  $d_1$  và  $d_2$  chéo nhau. Tìm khoảng cách giữa  $d_1$  và  $d_2$ .
- 2/ Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với (P), cắt cả  $d_1$  và  $d_2$ .

Đáp số: 1/  $\frac{62}{\sqrt{195}}$ ; 2/  $\Delta: \frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z-3}{-5}$ .

**Bài 10: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hàng hải – 2006)**

Cho điểm  $A(3; -2; 5)$  và đường thẳng  $d: \begin{cases} x + y - 2z + 3 = 0 \\ x + 3y + 2z - 7 = 0. \end{cases}$

- 1/ Viết phương trình tham số của  $d$ .
- 2/ Gọi  $A'$  là hình chiếu của  $A$  trên  $d$ . Tìm tọa độ  $A'$ .

Đáp số: 1/  $\begin{cases} x = -8 + 4t \\ y = 5 - 2t \\ z = t \end{cases}; 2/ A' = (4; -1; 3).$



## Bài giảng số 6

# HÌNH CẦU

Bài giảng này đề cập đến những bài toán cơ bản thường gặp của hình cầu trong hình học không gian, cũng như trong hình học giải tích không gian. Mặc dù trong các đề thi toán vào các trường Đại học, Cao đẳng trong những năm 2002-2009, các bài toán hình cầu có mặt trong các bài toán hình của đề thi chiếm một tỉ lệ rất khiêm tốn khoảng 10%; nhưng các nội dung về hình cầu (trong hình học không gian và hình học giải tích không gian) vẫn có mặt trong chương trình thi tuyển sinh môn Toán trong các kỳ thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng do Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định.

### Bài giảng có hai phần

- Hình cầu trong hình học không gian.
- Hình cầu trong hình học giải tích không gian.

## §1. HÌNH CẦU TRONG HÌNH HỌC GIẢI TÍCH KHÔNG GIAN

### 1. Các kiến thức cơ bản

#### a. Phương trình mặt cầu

- Mặt cầu tâm tại điểm  $I(x_0; y_0; z_0)$  và bán kính  $R$  là

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2.$$

- Phương trình mặt cầu tổng quát có dạng:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0,$$

với  $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$

Dưới dạng này thì tâm mặt cầu là  $I(-a; -b; -c)$  và bán kính của nó là:

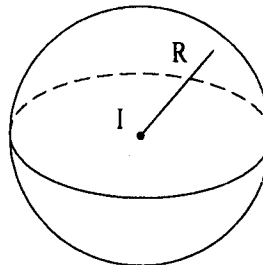
$$R = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}.$$

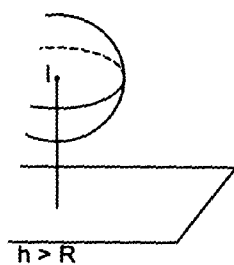
#### b. Vị trí tương đối của mặt cầu và mặt phẳng

Cho hình cầu (S):  $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$  và mặt phẳng (P):  $Ax + By + Cz + D = 0$

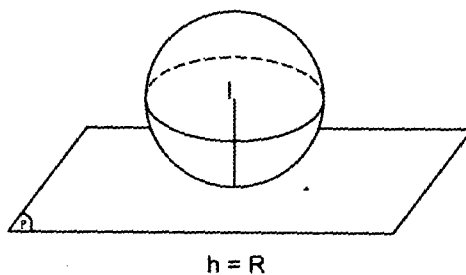
Khi đó:  $h = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$  là khoảng cách từ tâm  $I$  của (S) tới (P).

- Nếu  $h > R$  thì (S) và (P) không cắt nhau.
- Nếu  $h = R$  thì (S) và (P) tiếp xúc với nhau.
- Nếu  $h < R$  thì (S) và (P) cắt nhau theo một giao tuyến là một đường tròn.

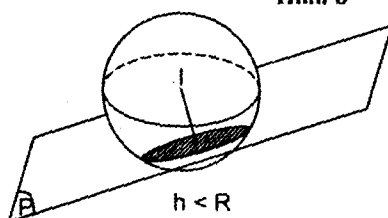




Hình a



Hình b



Hình c

Độ tâm K của đường tròn giao tuyến chính là hình chiếu vuông góc của tâm (P), còn bán kính r của hình tròn giao tuyến đó xác định như sau:

$$r = \sqrt{R^2 - h^2}.$$

### Đặc dạng toán cơ bản

**Bài 1:** Viết phương trình mặt cầu:

Viết phương trình mặt cầu người ta sử dụng hai phương pháp chính sau:

Xác định tâm I của mặt cầu và bán kính của nó.

Sử dụng phương trình tổng quát của mặt cầu.

Cách 1/ sử dụng khi việc xác định tâm I và bán kính R là tương đối dễ dàng (như trong các bài toán: Viết phương trình mặt cầu tiếp xúc với một mặt phẳng nào đó).

Cách 2/ sử dụng trong các trường hợp khi 1/ khó sử dụng. Để sử dụng được cách này ta cần thiết lập một hệ phương trình mà ẩn số là các tham số a, b, c, d (gọi là phương trình tổng quát của đường tròn cần tìm).

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2004)**

Cho ba điểm A (2;0;1), B (1;0;0), C(1;1;1) và mặt phẳng (D):  $x + y + z - 2 = 0$ . Viết phương trình mặt cầu đi qua A, B, C và có tâm thuộc (P).

### Giải

Giả sử phương trình tổng quát của mặt cầu qua A, B, C và có tâm thuộc (P) là

$$(S): x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0, \text{ với } a^2 + b^2 + c^2 > d \quad (1)$$

Khi đó tâm của (S) là điểm I (-a; -b; -c).

Theo bài ra ta có hệ phương trình sau để xác định a, b, c, d:

$$\begin{cases} -a - b - c - 2 = 0 & (2) \\ 4 + 1 + 4a + 2c + d = 0 & (3) \\ 3 + 2a + 26 + 2c + d = 0 & (4) \\ 1 + 2a + d = 0 & (5) \end{cases}$$

Giải hệ (2) (3) (4) (5) và có  $a = -1$ ;  $b = 0$ ;  $c = -1$ ;  $d = 1$ .

Thay vào (1) suy ra mặt cầu (S) có phương trình là

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Vậy (S) là mặt cầu tâm  $I(1;0;1)$  và bán kính  $R=1$ .

**Chú ý:**

Xét bài toán tương tự sau:

Lập phương trình mặt cầu (S) có tâm thuộc đường thẳng:

$$d: \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ y - 2 = 0 \end{cases}$$

và cắt mặt phẳng (P):  $y-z=0$  theo thiết diện là đường tròn lớn có bán kính bằng 4.

Vì mặt cầu (S) cắt (P) theo thiết diện là đường tròn lớn, nên tâm  $I(x_0; y_0; z_0)$  của (S) nằm trên (P) và bán kính R của (S) cũng bằng 4. Như vậy ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} x_0 + z_0 = 1 \\ y_0 - 2 = 0 \\ y_0 - z_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ y_0 = 2 \\ z_0 = 2 \end{cases}$$

Vậy (S) có phương trình  $(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 = 16$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D-2008)**

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho bốn điểm  $A(3;3;0)$ ,  $B(3;0;3)$ ,  $C(0;3;3)$ ,  $D(3;3;3)$ . Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn điểm A, B, C, D.

**Giải**

Gọi phương trình mặt cầu phải tìm là:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ax + 2by + 2cz + d = 0 \quad (1).$$

Vì mặt cầu qua A, B, C, D nên ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 18 + 6a + 6b + d = 0 & (2) \\ 18 + 6a + 6c + d = 0 & (3) \\ 18 + 6b + 6c + d = 0 & (4) \\ 27 + 6a + 6b + 6c + d = 0 & (5) \end{cases}$$

Từ (2) (3) (4) suy ra  $a = b = c$ , vậy ta có hệ sau:

$$\begin{cases} 18 + 12a + d = 0 \\ 27 + 18a + d = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{3}{2} \\ d = 0 \end{cases}.$$

Thay vào (1) ta có:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 3x - 3y - 3z = 0 \text{ là phương trình mặt cầu cần tìm.}$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Trong không gian cho hình lăng trụ đứng ABCD.A<sub>1</sub>B<sub>1</sub>C<sub>1</sub>D<sub>1</sub> với A(0; -3; 0), B(4; 0; 0), C(0; 3; 0) và B<sub>1</sub>(4; 0; 4).

Viết phương trình mặt cầu có tâm A và tiếp xúc với mặt phẳng (BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>).

**Giải**

Để thấy A<sub>1</sub>=(0; -3; 4) và C<sub>1</sub>(0; 3; 4). Mặt phẳng (BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>) nhận  $\overrightarrow{BC} = (-4; 3; 0)$  và  $\overrightarrow{BB_1} = (0; 0; 4)$  làm cặp vectơ chỉ phương. Do đó vectơ pháp tuyến  $\vec{n}$  của nó xác định như sau:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BB_1}] = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (12; 16; 0) // (3; 4; 0).$$

Rõ ràng (BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>) đi qua điểm (4; 0; 0) nên mặt phẳng này có phương trình:

$$3(x - 4) + 4y = 0 \Leftrightarrow 3x + 4y - 12 = 0.$$

Vì hình cầu tâm A tiếp xúc với (BCC<sub>1</sub>B<sub>1</sub>) nên khoảng cách từ A tới mặt phẳng này chính là bán kính R của hình cầu ta có:

$$R = d(A, (BCC_1B_1)) = \frac{|3 \cdot 0 + 4(-3) - 12|}{5} = \frac{24}{5}.$$

Vậy mặt cầu (S) cần tìm có phương trình:  $x^2 + (y - 3)^2 + z^2 = \frac{576}{25}$ .

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Kinh tế Kỹ thuật 1 – 2004)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho bốn điểm S(2; 2; 6), A(4; 0; 0), B(4; 4; 0), C(0; 4; 0).

1/ Chứng minh rằng S.ABCO là hình chóp tứ giác đều.

2/ Viết phương trình mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABCO.

**Giải**

Ta có  $\overrightarrow{OA} = (4; 0; 0); \overrightarrow{CB} = (4; 0; 0)$ , vậy

$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB}.$$

Ta lại có:  $\widehat{AOC} = 90^\circ \Rightarrow OABC$  là hình chữ nhật. Để thấy  $OA = OC = 4 \Rightarrow OABC$  là hình vuông.

Do S(2; 2; 6) nên hình chiếu của S trên (xOy) là I(0; 0; 6) là giao của OB và AC. Theo định nghĩa S. AOCB là chóp tứ giác đều  $\Rightarrow$  đpcm.

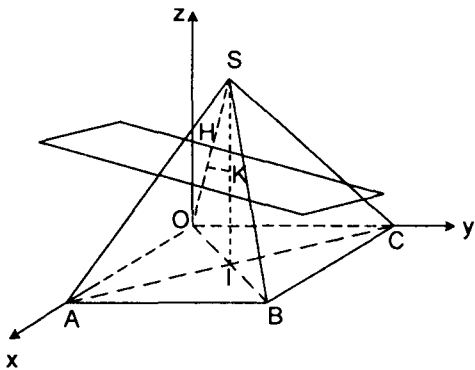
2/ Tâm K của mặt cầu ngoại tiếp hình chóp

tứ giác đều phải nằm trên SI, do đó:  $K = (2; 2; t)$ .

Ta có:  $KS = KO \Leftrightarrow KS^2 = KO^2 \Leftrightarrow (t - 6)^2 = 2^2 + 2^2 + t^2 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$ .

Vậy mặt cầu ngoại tiếp hình chóp có phương trình:

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 + \left(z - \frac{7}{3}\right)^2 = 8 + \frac{49}{9} = \frac{121}{9}.$$



Đó là mặt cầu có tâm tại điểm  $K \left( 2; 2; -\frac{7}{2} \right)$  và bán kính  $R = \frac{11}{3}$ .

*Chú ý: Có thể làm câu 2 như sau:*

Tâm K phải tìm là giao điểm của SI và mặt phẳng trung trực của SO.

$$SI \text{ có phương trình } \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

$\overline{SO} = (2; 2; 6)$ . Mặt phẳng trung trực của SO nhận  $\overline{SO}$  là vector pháp tuyến và đi qua trung điểm  $H = (1; 1; 3)$  của SO, nên nó có dạng:

$$2(x-1) + 2(y-1) + 6(z-3) = 0 \Leftrightarrow x + y + 3z - 11 = 0. (1)$$

Ta có:  $K = (2; 2; \frac{7}{3})$ , và thay vào (1) ta có:  $3t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{7}{3}$ .

Vậy  $K = (2; 2; \frac{7}{3})$ . Từ đó thu lại kết quả trên.

#### Thí dụ 5

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho mặt phẳng (P):  $2x + y - z + 5 = 0$  và các điểm  $A(0; 0; 4)$  và  $B(2; 0; 0)$ .

Viết phương trình mặt cầu đi qua O, A, B và tiếp xúc với (P)

#### Giải

Gọi M là trung điểm của AB thì  $M = (1; 0; 2)$ . Tâm I của mặt cầu đi qua O, A, B nằm trên đường thẳng vuông góc với (xOy) tại M, do đó  $I = (1; t; 2)$ .

Vì mặt cầu tiếp xúc với (P) nên:

$$IO = d(I, P)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{5 + t^2} = \frac{|2 + t - 2 + 5|}{\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow 6(5 + t^2) = (t + 5)^2 \Leftrightarrow (t - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1.$$

Vậy  $I(1; 1; 2)$ .

Mặt cầu cần tìm có phương trình:

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-2)^2 = 6.$$

#### Thí dụ 6

Viết phương trình mặt cầu (S) có tâm

$$\text{nằm trên đường thẳng } d: \begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ x - y + z - 1 = 0 \end{cases}$$

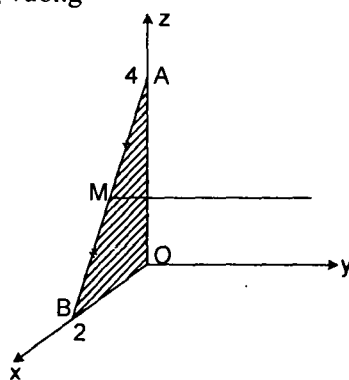
và tiếp xúc với hai mặt phẳng: (P):  $x + 2y + 2z + 3 = 0$  và (Q):  $x + 2y + 2z + 7 = 0$ .

#### Giải

Gọi  $I(x_0; y_0; z_0)$  là tâm hình cầu cần tìm. Khi đó  $I \in (d)$  nên ta có:

$$\begin{cases} x_0 + y_0 + z_0 + 1 = 0 \\ x_0 - y_0 + z_0 - 1 = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra:  $x_0 + y_0 = 0 \Leftrightarrow z_0 = -x_0$  và  $y_0 = -1$ . Vậy  $I(x_0; -1; -x_0)$ .



Do mặt cầu tiếp xúc với (P) và (Q), nên ta có:

$$\begin{aligned} R &= d(I, (P)) = d(I, (Q)) \\ \Leftrightarrow \frac{|x_0 - 2 - 2x_0 + 3|}{\sqrt{1+4+4}} &= \frac{|x_0 - 2 - 2x_0 + 7|}{\sqrt{1+4+4}} \\ \Leftrightarrow |1-x_0| &= |5-x_0| \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x_0 = 5-x_0 \\ 1-x_0 = x_0-5 \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 3. \end{aligned}$$

Vậy  $I = (3; -1; -3)$  và lúc đó  $R = \frac{2}{3}$ .

Do đó mặt cầu (S) có phương trình:  $(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z+3)^2 = \frac{4}{9}$ .

**Thí dụ 7:**

Viết phương trình mặt cầu có tâm tại điểm  $I(2; 3; -1)$  và cắt đường thẳng:

$$d: \begin{cases} 5x - 4y + 3z + 20 = 0 \\ 3x - 4y + z - 8 = 0 \end{cases}$$

tại hai điểm A, B sao cho  $AB=16$ .

**Giải**

Kẻ  $IH \perp AB$  thì  $HA=HB=8$ .

Đường thẳng d có vector chỉ phương là:

$$\vec{u} = \left( \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} \right) = (8; 4; -8) // (2; 1; -2).$$

Ngoài ra d đi qua điểm  $M(11; 0; -25)$ . Từ đó:

$$IH = d(I, d) = \frac{|\vec{u}, \vec{IM}|}{|\vec{u}|}.$$

Do  $\vec{IM} = (9; -3; -24)$ , nên

$$[\vec{u}, \vec{IM}] = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -24 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -24 & 9 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = (-30; 30; -15).$$

$$\text{Vậy } IH = \frac{\sqrt{(-30)^2 + 30^2 + (-15)^2}}{3} = 15.$$

Do đó bán kính R của hình cầu là:  $R = \sqrt{IH^2 + HA^2} = \sqrt{225 + 64} = 17$ .

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là:  $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 289$ .

**Chú ý:**

Ta có bài toán tương tự: Cho điểm  $I(1; 2; -2)$ , đường thẳng:

$$d: \begin{cases} 2x - y - 5 = 0 \\ y - z + 3 = 0 \end{cases},$$

và mặt phẳng (P):  $2x + 2y + z + 5 = 0$ .

Viết phương trình mặt cầu (S), tâm I sao cho (P) cắt (S) theo đường tròn giao tuyến có chu vi bằng  $8\pi$ .

Để thấy đường tròn giao tuyến có bán kính  $r = 8$ , nên bán kính mặt cầu  $R = 5$ .

**Loại 2:** Các bài toán liên quan đến tiếp diện của mặt cầu.

Để giải bài toán này chỉ cần lưu ý rằng: Mặt phẳng (P) tiếp xúc với hình cầu (S) tâm I, bán kính R khi và chỉ khi:

$$d(I, (P)) = R.$$

**Thí dụ 1: (Đề thi tốt nghiệp THPT – 2005)**

Trong không gian cho mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 4z - 3 = 0$  và hai đường thẳng:

$$d_1: \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 \\ x - 2z = 0 \end{cases} \text{ và } d_2: \frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z}{1}.$$

Viết phương trình tiếp diện với mặt cầu (S), biết rằng nó song song với  $d_1$  và  $d_2$ .

**Giải**

Viết lại (S) dưới dạng:

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 + (z+2)^2 = 9.$$

Vậy (S) là hình cầu tâm  $I(1; -1; -2)$  và bán kính  $R = 3$ .

$$d_1 \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}_1 = \left( \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right) = (-4; 2; -2) // (2; -1; 1).$$

$$d_2 \text{ có vectơ chỉ phương } \vec{u}_2 = (-1; 1; 1).$$

Vậy tiếp diện (P) nhận  $\vec{u}_1$  và  $\vec{u}_2$  làm cặp vectơ chỉ phương, nên (P) có vectơ pháp tuyến là:

$$\vec{n} = [\vec{u}_1, \vec{u}_2] = \left( \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \right) = (-2; -3; 1) // (2; 3; -1).$$

Vậy (P) có dạng:  $2x + 3y - z + D = 0$ .

Vì (P) là tiếp diện với (S), nên  $d(I, (P)) = R$

$$\Leftrightarrow \frac{|2 - 3 + 2 + D|}{\sqrt{14}} = 3 \Leftrightarrow |D + 1| = 3\sqrt{14} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 3\sqrt{14} - 1 \\ D = -3\sqrt{14} - 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy có hai tiếp diện cần tìm: } \begin{cases} 2x + 3y - z + 3\sqrt{14} - 1 = 0 \\ 2x + 3y - z - 3\sqrt{14} - 1 = 0 \end{cases}$$

**Thí dụ 2:**

Lập phương trình mặt phẳng chứa đường thẳng:

$$d: \begin{cases} 8x - 11y + 8z - 30 = 0 \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$$

và tiếp xúc với mặt cầu (S):  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 4z - 15 = 0$ .

**Giải**

Viết lại (S) dưới dạng:  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z+2)^2 = 29$ .

Vậy (S) có tâm tại  $I(-1; 3; -2)$  và bán kính  $R = \sqrt{29}$ . Tiếp diện (P) chứa d nên nó thuộc “Chùm mặt phẳng”:

$$\alpha(8x - 11y + 8z - 30) + \beta(x - y - 2z) = 0 \text{ với } \alpha^2 + \beta^2 > 0$$

$$\Leftrightarrow (8\alpha + \beta)x + (-11\alpha - \beta)y + (8\alpha - 2\beta)z - 30\alpha = 0. (1)$$

Do (P) tiếp xúc với (S) nên:  $d(I, (P)) = \sqrt{29}$

$$\Leftrightarrow \frac{|-8\alpha - \beta - 33\alpha - 3\beta - 16\alpha + 4\beta - 30\beta|}{\sqrt{(8\alpha + \beta)^2 + (11\alpha - \beta)^2 + (8\alpha - 2\beta)^2}} = \sqrt{29}$$

$$\Leftrightarrow 87|\alpha| = 29\sqrt{249\alpha^2 + 6\beta^2 + 6\alpha\beta} \Leftrightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta - \beta^2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) - 1 = 0$$

(vì nếu  $\beta = 0 \Rightarrow \alpha = 0$ , vô lí)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\alpha}{\beta} = 1 \\ \frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Nếu  $\frac{\alpha}{\beta} = 1$  thì chọn  $\alpha = \beta = 1$  và có (P):  $3x - 4y + 2z - 10 = 0$ .

+ Nếu  $\frac{\alpha}{\beta} = -\frac{1}{2}$  thì chọn  $\alpha = 1; \beta = -2$  và có (P):  $2x - 3y + 4z - 10 = 0$ .

**Loại 3:** Các bài toán về vị trí tương đối giữa đường thẳng với hình cầu:

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D - 2008)**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho bốn điểm A(3;3;0), B(3;0;0), C(0;3;3); D(3;3;3).

1/ Viết phương trình mặt cầu đi qua bốn đỉnh A, B, C, D.

2/ Tìm tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Giải**

1/ Xem thí dụ 2 loại 1, §1.

$$\text{Phương trình mặt cầu (S) là: } \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{27}{4}.$$

$$\text{Đây là hình cầu có tâm tại điểm } I\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) \text{ và bán kính } R = \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

2/ Mặt cầu (S) cắt mặt phẳng (ABC) theo giao tuyến là đường tròn. Đường tròn này chính là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Tâm H của nó chính là hình chiếu của I lên (ABC). Để thấy (ABC) qua A, B, C nên có phương trình:

$$x + y + z - 6 = 0.$$

Đường thẳng IH nhận vector pháp  $\vec{n} = (1; 1; 1)$  của (ABC) là vector chỉ phương nên có phương trình.

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2} + t \\ y = \frac{3}{2} + t \\ z = \frac{3}{2} + t \end{cases}$$

Từ đó suy ra H(2;2;2).



### Nhận xét

1/ Cách giải trên chính là cách giải “truyền thống” để tìm tâm của hình tròn giao tuyến do mặt cầu (S) cắt bởi mặt phẳng (P).

2/ Tuy nhiên, với thí dụ trên có cách giải rất độc đáo sau đây:

Để thấy ABC là tam giác đều cạnh bằng 3, nên tâm đường tròn ngoại tiếp H của nó cũng chính là trọng tâm của tam giác ABC vì thế:

$$H = \left( \frac{3+3+0}{3}; \frac{3+0+3}{3}; \frac{0+3+3}{3} \right) = (2; 2; 2).$$

### Thí dụ 2:

Trong không gian với hệ trục tọa độ Oxyz cho hai mặt cầu:

$$(S_1): x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \text{ và } (S_2): x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$$

1/ Chứng minh  $(S_1)$  và  $(S_2)$  cắt nhau.

2/ Gọi (S) là đường tròn giao tuyến của  $(S_1)$  và  $(S_2)$ , xác định tâm và tìm bán kính của (S).

### Giải

Viết lại  $(S_1)$  và  $(S_2)$  dưới dạng sau:

$$(S_1): x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1; (S_2): x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4.$$

Vậy  $(S_1)$  là hình cầu có tâm tại điểm  $I_1(0;0;1)$  và bán kính  $R_1=1$ ,

$(S_2)$  là hình cầu có tâm tại điểm  $I_2(0;2;0)$  và bán kính  $R_2=2$ .

Ta có  $I_1I_2 = \sqrt{5}$ . Do đó:  $R_1 - R_2 < I_1I_2 < R_1 + R_2$ .

Vậy  $(S_1)$  và  $(S_2)$  cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn (C).

2/ Các điểm  $M(x; y; z) \in (C)$  thỏa mãn hệ phương trình.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0. \end{cases}$$

Từ đó  $2y - z = 0$ .

Vậy đường tròn giao tuyến (C) nằm trong mặt phẳng (P):  $2y - z = 0$ .

Ta có  $I_1I_2 \perp (P)$  và giao điểm K của  $I_1I_2$  với (P) chính là tâm của đường tròn giao tuyến (C).

$$\text{Vì } \overrightarrow{I_1I_2} = (0; 2; -1) \text{ nên } I_1I_2 \text{ có phương trình: } \begin{cases} x = 0 \\ y = 2t \\ z = 1 - t. \end{cases}$$

Do đó  $K(0; 2t; 1-t) \in (P)$  nên ta có phương trình sau để xác định t

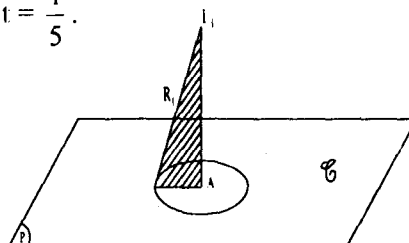
$$4t - 1 + t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{5}.$$

Vậy  $K = \left( 0; \frac{2}{5}; \frac{4}{5} \right)$  là tâm của (C).

Bán kính r của (C) xác định như sau:

$$r = \sqrt{R_1^2 - I_1K^2}.$$

$$\text{Do } R_1=1, \text{ còn } I_1K^2 = \left( \frac{2}{5} \right)^2 + \left( \frac{1}{5} \right)^2 = \frac{1}{5}.$$



Từ đó suy ra:  $r = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ .

**Thí dụ 3:**

Tìm điểm A trên mặt cầu (S)  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2z - 2 = 0$  sao cho khoảng cách từ A đến mặt phẳng (P):  $2x - 2y + z + 6$  là lớn nhất, nhỏ nhất.

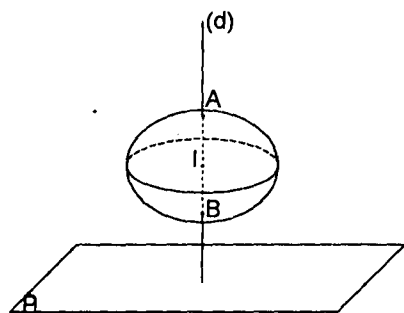
**Giải**

Đưa (S) về dạng sau:  $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 4$ .

Vậy (S) là mặt cầu tâm tại  $I(1; 0; -1)$  và bán kính  $R=2$ .

Đường thẳng (d) qua I nhận vector pháp tuyến  $\vec{n} = (2; -2; 1)$  của (P) là vector chỉ

phương nên nó có dạng:  $d: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2t \\ z = 1 + t \end{cases}$ .



Tìm giao điểm của d với mặt cầu (S) thông qua phương trình sau:

$$(1 + 2t - 1)^2 + (-2t)^2 + (1 + t - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow 9t^2 = 4 \Leftrightarrow t = \pm \frac{2}{3}.$$

Khi  $t = \frac{2}{3}$ , ta có giao điểm  $A = \left(\frac{7}{3}; -\frac{4}{3}; \frac{5}{3}\right)$ .

Khi  $t = -\frac{2}{3}$ , ta có giao điểm  $B = \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right)$ .

$$d(A, (P)) = \frac{13}{3} \text{ và } d(B, (P)) = \frac{1}{3}.$$

Vậy A, B tương ứng là điểm trên mặt cầu (S) xa và gần (P) nhất.

**Loại 2:** Vài bài toán về hình cầu có tham số.

**Thí dụ 1:**

Cho họ  $(S_m)$  xác định như sau:  $(S_m): x^2 + y^2 + z^2 - 4mx - 2my - 6z + m^2 + 4m = 0$

1/ Tìm m để  $(S_m)$  là phương trình của một mặt cầu.

2/ Chứng minh các tâm  $I_m$  của mặt cầu  $(S_m)$  luôn nằm trên một đường thẳng cố định (với các giá trị m tìm được ở câu 1).

**Giải**

$$1/ (S_m): (x - 2m)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4m^2 - 4m + 9$$

Ta nhận thấy  $4m^2 - 4m + 9 > 0 \forall m \in \mathbb{R}$  (vì  $\Delta' = 4 - 36 < 0$ )

Vậy với mọi giá trị của m, thì  $(S_m)$  luôn là phương trình của một mặt cầu với tâm:  $I_m(2m; m; 3)$

2/ Gọi  $I(x; y; z)$  là tâm của  $(S_m)$ , từ phần 1/ ta có:  $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 3 \end{cases} \quad (1)$

Vậy tâm của mặt cầu nói trên với mọi m luôn nằm trên đường thẳng cố định

xác định bởi (1)

Chú ý:

Có bài toán tương tự sau:

Xét họ  $(S_\alpha): x^2 + y^2 + z^2 - 2x \sin \alpha - 2y \cos \alpha - 3 = 0$

Chứng minh rằng tâm  $I_\alpha$  của  $(S_\alpha)$  (với  $\alpha$  biến thiên sao cho  $(S_\alpha)$  là mặt cầu) luôn nằm trên một đường tròn cố định.

Thật vậy ta có:  $(S_\alpha): (x - \sin \alpha)^2 + (y - \cos \alpha)^2 + z^2 = 4$ .

Như vậy với mọi  $\alpha$ ,  $(S_\alpha)$  luôn là mặt cầu với tâm:

$$I_\alpha = (\sin \alpha; \cos \alpha; 0)$$

Khi  $\alpha$  thay đổi  $I_\alpha$  luôn nằm trên mặt phẳng  $z = 0$ . Ngoài ra do  $x^2 + y^2 = 1$  nên  $I_\alpha$  nằm trên đường tròn tâm tại gốc tọa độ bán kính 1, đường tròn này nằm trên mặt phẳng  $z = 0$ .

**Thí dụ 2:**

Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz, cho đường thẳng:

$$d: \begin{cases} 2x - 2y - z + 1 = 0 \\ x + 2y - 2z - 4 = 0 \end{cases}$$

và mặt cầu (S)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + m = 0 \quad (d)$$

Tìm m để d cắt (S) tại hai điểm M, N sao cho  $MN = 8$ .

**Giải**

Ta có (S):  $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + z^2 = 13 - m \quad (1)$

Từ (1) suy ra (S) là mặt cầu  $\Leftrightarrow 13 - m > 0 \Leftrightarrow m < 13 \quad (2)$

Ta có  $IH = \sqrt{(13 - m) - 16} = \sqrt{-m - 3} \quad (3)$

Lại có  $IH = d(I, (d)) \quad (4)$

Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương :

$$\vec{u} = \left( \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (6; 3; 6).$$

Vậy  $\vec{u} = (6; 3; 6) // (2; 1; 2)$ .

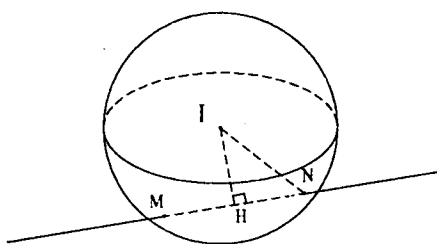
Mặt khác dễ thấy  $M(0; 1; -1) \in d$ , nên  $d(I, (d)) = \frac{[\vec{u}, \overline{MI}]}{|\vec{u}|}$ , với  $\overline{MI} = (-2; 2; 1)$ .

Ta có:  $[\vec{u}, \overline{MI}] = \left( \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} \right) = (-3; -6; 6).$

Do vậy  $d(I, (d)) = \frac{\sqrt{9 + 36 + 36}}{\sqrt{4 + 1 + 4}} = 3 \quad (5)$

Từ (3) (4) (5) suy ra:  $\sqrt{-m - 3} = 3 \Leftrightarrow m = -12 \quad (6)$

Rõ ràng (6) thỏa mãn (2) nên  $m = -12$  là giá trị duy nhất cần tìm của tham số m.



## §2. HÌNH CẦU TRONG HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Nếu như các bài toán hình cầu trong hình học giải tích không gian thiên về tính toán, thì các bài toán hình cầu trong hình học không gian thuần túy thiên về các tính chất định tính. Để giải được các bài toán trong mục này đòi hỏi học sinh phải nắm vững và sử dụng thành thạo các kiến thức của hình học không gian (đặc biệt là các kiến thức về quan hệ song song và quan hệ vuông góc).

### Các dạng bài tập cơ bản

**Loại 1:** Các bài toán về hình cầu:

#### Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)

Cho hai mặt phẳng (P) và (Q) vuông góc với nhau có giao tuyến là  $\Delta$ . Trên  $\Delta$  lấy hai điểm A và B cho  $AB = a$ . Trong mặt phẳng (P) lấy điểm C, trong (Q) lấy điểm D sao cho  $AC, BD$  cùng vuông góc với  $\Delta$ . Giả sử  $AC = BD = AB$ . Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D nằm trên một mặt cầu và tìm bán kính của hình cầu ấy.

#### Giải

Do  $(P) \perp (Q); (P) \cap (Q) = \Delta$ ,  
mà  $AC \perp \Delta \Rightarrow AC \perp (Q) \Rightarrow AC \perp AD$ .

Tương tự ta có  $DB \perp DC$ .

Vì thế gọi I là trung điểm của CD, thì trong các tam giác vuông CAD và CBD ta có:

$$IC = ID = IA;$$

$$IC = ID = IB.$$

Suy ra:  $IA = IB = IC = ID$ , tức là bốn điểm A, B, C, D nằm trên một mặt cầu tâm I, bán

$$\text{kinh } R = \frac{1}{2} CD \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } CD^2 = CA^2 + AD^2 = CA^2 + BA^2 + BD^2 = 3a^2.$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } R = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

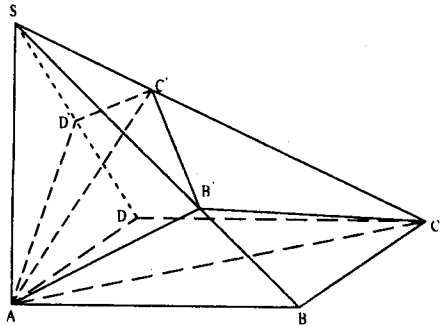
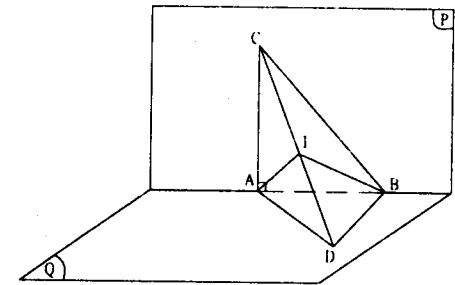
#### Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Kỹ thuật Công nghiệp – 2006)

Trong mặt phẳng (P) cho hình vuông ABCD. Trên đường thẳng Ax vuông góc với (P) lấy một điểm S bất kì. Dựng mặt phẳng (Q) qua A và vuông góc với SC. Mặt phẳng (Q) cắt SB, SC, SD lần lượt tại B', C', D'. Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D, A', B', C', D' cùng nằm trên một mặt cầu cố định.

#### Giải

$$\text{Vì } (Q) \perp SC \Rightarrow SC \perp AC' \quad (1)$$

$$\text{Do } SA \perp (P) \Rightarrow SA \perp CB.$$



Ta lại có  $CB \perp AB$  (giả thiết)  $\Rightarrow CB \perp (SAB) \Rightarrow CB \perp AB'$ .

Do  $(Q) \perp SC, \Rightarrow SC \perp AB'$ .

Từ đó  $AB' \perp (SBC) \Rightarrow AB' \perp SB$  (2)

Lý luận tương tự có  $AD' \perp SD$  (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra nếu kẻ  $AB', AC', AD'$  lần lượt vuông góc với  $SB, SC, SD$  thì mặt phẳng  $(Q)$  chính là mặt phẳng  $(AB'C'D')$ .

Trong  $(ABCD)$  ta có:

$$\widehat{ABC} = \widehat{AD'D} = 90^\circ \quad (4)$$

Theo trên  $AB' \perp B'C \Rightarrow \widehat{AB'C} = 90^\circ$  (5)

Tương tự lại có  $\widehat{AC'C} = \widehat{AD'D} = 90^\circ$  (6)

Từ (4) (5) (6) suy ra:  $A, B, C, D, A', B', C', D'$  cùng nằm trên mặt cầu đường kính  $AC \Rightarrow đpcm$ .

### Thí dụ 3:

Cho hình cầu  $(S)$  tâm  $O$  bán kính  $R = 5\text{cm}$ . Tam giác  $ABC$  với ba cạnh  $BC=13\text{cm}$ ,  $CA = 14\text{cm}$ ,  $AB = 15\text{cm}$ , trong đó cả ba cạnh cùng tiếp xúc với mặt cầu. Tìm khoảng cách từ tâm  $O$  đến mặt phẳng  $(ABC)$ .

### Giải

Giả sử  $AB, BC, CA$  lần lượt tiếp xúc với mặt cầu tại  $N, M, P$ . Như vậy ta có:

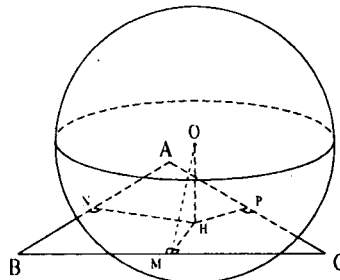
$ON \perp AB, OM \perp BC, OP \perp CA$ .

Kẻ  $OH \perp (ABC)$ . Theo định lý ba đường vuông góc ta có:

$HM \perp BC, HN \perp AB, HP \perp CA$ .

Vì  $ON = OM = OP = R \Rightarrow HM = HN = HP$ .

Vậy  $H$  là tâm đường tròn nội tiếp tam giác  $ABC$  với bán kính  $r = HM$ .



Áp dụng công thức  $r = \frac{S}{p}$ , ở đây  $S, p$  tương ứng là diện tích và nửa chu vi của

tam giác  $ABC$  ta có:

$$p = \frac{13+14+15}{2} = 21.$$

Theo công thức Hê-rông ta có:  $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$ .

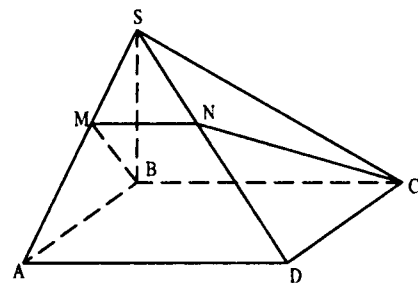
Từ đó suy ra  $r = 4\text{cm}$ . Do vậy theo định lý Pitago thì khoảng cách từ  $O$  tới  $(ABC)$  là:  $OH = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3\text{cm}$ .

### Thí dụ 4:

Cho hình chóp  $S.ABCD$  có đáy là hình vuông, và  $SB$  vuông góc với  $(ABCD)$ . Lấy điểm  $M$  trên  $SA$  ( $M \neq S, M \neq A$ ). Giả sử  $(BCM) \cap SD = N$ . Chứng minh rằng sáu điểm  $A, B, C, D, M, N$  không cùng nằm trên một mặt cầu.

### Giải

Do  $BC \parallel AD \Rightarrow BC \parallel (SAD) \Rightarrow (MBC) \cap (SAD) = MN$ , trong đó  $N \in SD$  và  $MN \parallel BC$ .



Do  $SB \perp (ABCD)$ ,  $AD \perp AB \Rightarrow SA \perp AD$  (định lý ba đường vuông góc)  $\Rightarrow$  MNDA là hình thang vuông tại A và M.

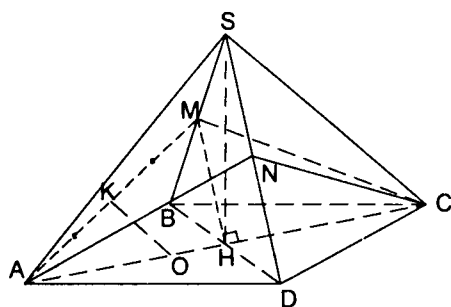
Giả sử 6 điểm A, B, C, D, M, N cùng nằm trên một mặt cầu (S). Như vậy mặt cầu (S) phải cắt mặt phẳng (SAD) theo một giao tuyến là đường tròn (C).

Vì A, D, M, N vừa nằm trên (S), vừa nằm trên (SAD)  $\Rightarrow$  A, D, M, N phải nằm trên (C). Nói khác đi AMND là tứ giác nội tiếp đường tròn (C).

Đó là điều vô lý vì AMND là hình thang vuông thực sự ( $MN \parallel AD$  và  $MN < AD$ ).

Vậy giả thiết phản chứng là sai, tức là 6 điểm A, B, C, D, M, N không cùng nằm trên một mặt cầu  $\Rightarrow$  đpcm.

**Thí dụ 5:**



Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có cạnh bên và cạnh đáy đều bằng a. Có một hình cầu đi qua A và tiếp xúc với SB, SD tại các trung điểm của chúng. Xác định tâm O của hình cầu và tính bán kính của hình cầu ấy theo a.

**Giải**

Vì hình cầu tiếp xúc với SB tại trung điểm của SB nên tâm O của hình cầu nằm trên trung điểm của SB.

Gọi M là trung điểm của SB. Từ giả thiết suy ra SAB và SBC đều là các tam giác đều cạnh a, nên  $AM \perp SB$ ,  $CM \perp SB$ , vậy (MAC) chính là mặt phẳng trung trực của SB. Do đó  $O \in (MAC)$ . Tương tự nếu gọi N là trung điểm của SD thì  $O \in (NAC)$ .

Do đó:  $O \in (MAC) \cap (NAC) \Rightarrow O \in AC$ .

Trong mặt phẳng (MAC) vẽ trung trực của MA, cắt AC tại O  $\Rightarrow OM = OA$ .

Dễ thấy  $\triangle MAO = \triangle NAO \Rightarrow OM = ON$ .

Từ đó ta có O chính là tâm của hình cầu cần tìm.

Gọi R là bán kính của hình cầu này thì  $R = OA$  (1)

Ta có:  $OA = \frac{AK}{\cos \angle KAO} = \frac{AK}{\cos \angle MAH}$  (2)

ở đây K và H lần lượt là trung điểm của AM và tâm của đáy ABCD.

Từ (1), (2) suy ra:  $R = \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3a\sqrt{2}}{8}$ .

**Loại 2:** Hình cầu nội và ngoại tiếp hình chóp:

- Hình cầu ngoại tiếp một hình chóp (hay hình chóp nội tiếp trong hình cầu) nếu đỉnh của hình chóp và các đỉnh của đáy nằm trên mặt cầu.

- Một hình chóp nội tiếp một hình cầu khi và chỉ khi đáy của nó là một đa giác nội tiếp trong hình tròn. Khi đó xác định tâm hình cầu ngoại tiếp ta làm như sau:

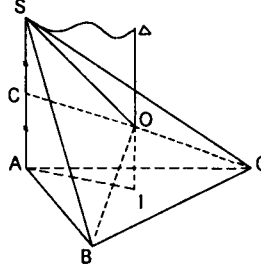
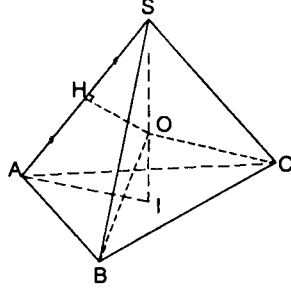
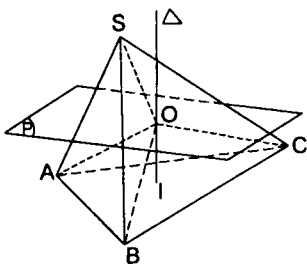
1/ Xác định tâm I của đường tròn nội tiếp đáy.

2/ Dựng đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với đáy tại I

3/ Vẽ mặt phẳng trung trực (P) của một cạnh bên bất kì.

4/ Giao điểm O của  $\Delta$  với (P) là tâm hình cầu cần tìm.

(Chú ý: trong 3/ mặt phẳng trung trực thay bằng đường trung trực nếu  $\Delta$  qua đỉnh của hình chóp; hoặc là có một cạnh bên song song với  $\Delta$ . Khi ấy sẽ vẽ trung trực của cạnh bên ấy trong mặt phẳng xác định bởi nó và  $\Delta$ ).



- Hình cầu nội tiếp trong hình chóp, nếu nó tiếp xúc với tất cả các mặt bên và mặt đáy của hình chóp.

**Thí dụ 1:**

Cho hình chóp lục giác đều S.ABCDEF cạnh đáy bằng a, góc của mặt bên và đáy là  $\alpha$ . Tìm bán kính hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp hình chóp.

**Giải**

Gọi H là tâm của đáy. Do S.ABCDEF là chóp đều, nên mọi điểm trên đường cao SH đều cách đều các đỉnh của đáy; cũng như cách đều 6 mặt bên. Do đó tâm O của hình cầu ngoại tiếp và tâm I hình cầu nội tiếp của hình chóp đều nằm trên SH.

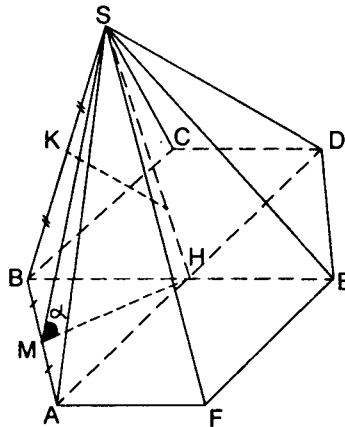
- Tâm O sẽ là giao điểm của đường trung trực của cạnh SB với SH. Bán kính R của hình cầu ngoại tiếp xác định như sau:

$$R = SO = \frac{SK}{\cos \widehat{KSO}},$$

ở đây K là trung điểm của SB. Ta có:

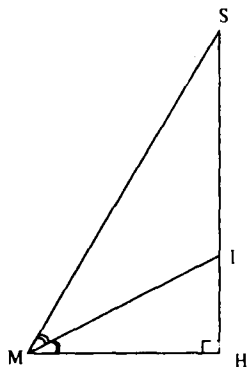
$$R = \frac{SB}{2 \cos \widehat{BSH}} = \frac{SB}{2 \frac{SH}{SB}} = \frac{SB^2}{2SH}.$$

Gọi M là trung điểm của AB, thì  $\widehat{SMH} = \alpha$ .



Ta có  $HM = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha$

$$\Rightarrow SB = \sqrt{SH^2 + HB^2} = \sqrt{\frac{3a^2}{4} \tan^2 \alpha + a^2} = \frac{a}{2} \sqrt{4 + 3 \tan^2 \alpha}.$$



$$\text{Vậy } R = \frac{a^2(4 + 3 \tan^2 \alpha)}{4 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \alpha} = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cot \alpha (4 + 3 \tan^2 \alpha).$$

Tâm I của hình cầu nội tiếp là giao điểm của đường phân giác trong của  $\widehat{SMH}$  với SH.

Ta có:  $IH = MH \tan \frac{\alpha}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \frac{\alpha}{2}$

Vậy bán kính r của hình cầu nội tiếp xác định như sau:

$$r = IH = \frac{a\sqrt{3}}{2} \tan \frac{\alpha}{2}.$$

**Nhận xét:**

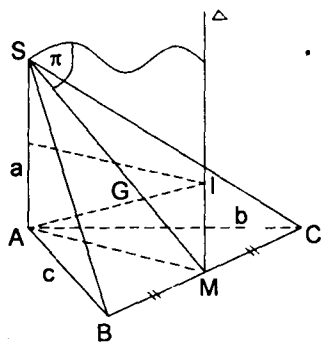
Thí dụ trên đã diễn tả phương pháp xác định tâm, cũng như tính bán kính của các hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp một hình chóp đều.

**Thí dụ 2:**

Cho hình chóp S.ABC trong đó đáy là tam giác vuông ABC đỉnh A. Giả sử SA vuông góc với đáy. Biết  $AB = c$ ,  $AC = b$ ,  $SA = a$ .

- 1/ Xác định tâm I và tính bán kính R của hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC
- 2/ Gọi G là trọng tâm tam giác SBC. Chứng minh A, G, I thẳng hàng.

**Giải**



Gọi M là trung điểm của BC. Do  $\widehat{BAC} = 90^\circ$  nên ta có  $MA = MB = MC$ . Qua M dựng đường thẳng  $\Delta$  vuông góc với  $(ABC)$  (tức là  $\Delta \parallel SA$ ). Trong mặt phẳng  $(\pi)$  xác định bởi SA và  $\Delta$ , ta dựng đường trung trực của SA. Đường này cắt  $\Delta$  tại I. Khi đó:  
I chính là tâm hình cầu ngoại tiếp hình chóp S.ABC.

Ta có:

$$R = IA = \sqrt{IM^2 + AM^2} = \sqrt{\frac{1}{4}SA^2 + \frac{1}{4}BC^2} = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

2/ Mặt phẳng  $(\pi)$ :  $AI \cap SM = G$ . Theo định lý Talet ta có  $\frac{SG}{SM} = \frac{SA}{IM} = 2$ .

Vậy G là trọng tâm tam giác SBC. Nói khác đi A, G, I thẳng hàng  $\Rightarrow$  đpcm.



**Thí dụ 3:**

1/ Giả sử R là bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp tam giác S.ABC.

Chứng minh  $r = \frac{3V}{S_{tp}}$ , ở đây V và  $S_{tp}$  tương ứng là thể tích và diện tích toàn

phần của hình chóp.

2/ Áp dụng giải bài toán sau: Cho hình chóp S. ABC trong đó SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và  $SA = SB = SC = a$ . Tìm bán kính hình cầu nội tiếp.

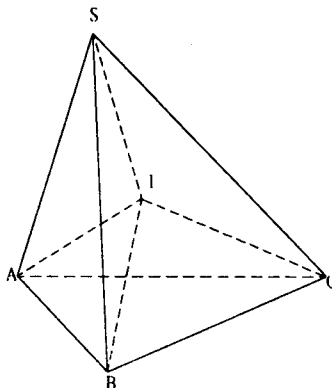
**Giải**

1/ Gọi I là tâm hình cầu nội tiếp và r là bán kính của nó. Ta có:

$$V_{SABC} = V_{I.SAB} + V_{I.SBC} + V_{I.SAC} + V_{I.ABC}$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}r(S_{SAB} + S_{SBC} + S_{SCA} + S_{ABC})$$

$$\frac{1}{3}rS_{tp} \Rightarrow r = \frac{3V}{S_{tp}}$$



2/ Áp dụng: Vì SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau nên  $V = \frac{1}{6}a^3$ .

Ta có:  $S_{SAB} = S_{SBC} = S_{SCA} = 3 \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{3a^2}{2}$ .

Do ABC là tam giác đều cạnh bằng  $a\sqrt{2}$  nên:

$$S_{ABC} = \frac{(a\sqrt{2})^2 \sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

Do đó  $S_{tp} = \frac{3a^2 + \sqrt{3}a^2}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2(\sqrt{3}+1)}{2}$ .

Vì thế bán kính hình cầu nội tiếp r của nó là:

$$r = \frac{3V}{S_{tp}} = \frac{3a^3}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}a^2(\sqrt{3}+1)}{2}} = \frac{a(3-\sqrt{3})}{2}$$

**Thí dụ 4:**

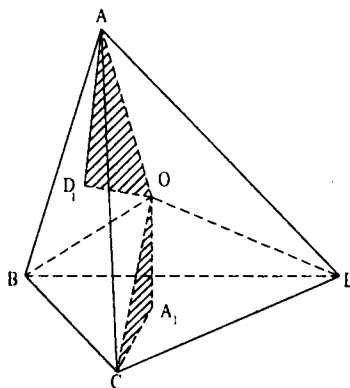
Cho tứ diện ABCD có các cặp cạnh đối bằng nhau:  $AB = CD$ ;  $AC = BD$  và  $AD = BC$ . Chứng minh rằng tâm hình cầu ngoại tiếp và nội tiếp của tứ diện trùng nhau.

**Giải**

Gọi O là tâm hình cầu ngoại tiếp hình tứ diện. Khi đó ta có:  $OA = OB = OC = OD$ .

Từ O kẻ  $OA_1, OB_1, OC_1, OD_1$  lần lượt vuông góc các mặt (BCD), (ACD), (ABD) và (ABC).

Do  $OB = OC = OD \Rightarrow A_1B = A_1C = A_1D$ .



Vậy  $A_1$  là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD. Tương tự  $B_1, C_1, D_1$  lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ACD, ABD và ABC.

Từ giả thiết suy ra  $\triangle ABC = \triangle BCD \Rightarrow$  các bán kính đường tròn ngoại tiếp của hai tam giác này bằng nhau  $\Rightarrow AD_1 = A_1C \Rightarrow$  tam giác vuông  $AD_1O =$  tam giác vuông  $CA_1O \Rightarrow OD_1 = OA_1$ . Tương tự có  $OA_1 = OB_1 = OC_1 = OD_1 \Rightarrow O$  là tâm hình cầu nội tiếp tứ diện ABCD  $\Rightarrow$  đpcm.

## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Cho ABCD là tứ diện có các cặp cạnh đối vuông góc với nhau. Chứng minh rằng trung điểm của các cạnh và các đường vuông góc chung của các cặp cạnh đối diện nằm trên một mặt cầu.

### Bài 2:

Cho tứ diện ABCD có 4 chiều cao kẻ từ 4 đỉnh là  $h_1, h_2, h_3, h_4$ . Gọi  $r$  là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4} = \frac{1}{r}.$$

### Bài 3:

Cho hình chóp S.ABCD đáy ABCD là hình vuông cạnh  $a$ . Hai mặt bên SAB và (SAD) cùng vuông góc với đáy,  $SA=a$ . Tìm bán kính hình cầu nội tiếp hình chóp

Đáp số:  $r = \frac{a(2-\sqrt{2})}{2}.$

### Bài 4:

Cho hình chóp tứ giác đều S.ABCD có tất cả các cạnh đáy và cạnh bên đều bằng  $a$ . Gọi  $A', B', C', D'$  lần lượt là trung điểm của các cạnh SA, SB, SC, SD.

- 1/ Chứng minh rằng các điểm A, B, C, D,  $A', B', C', D'$ , cùng thuộc mặt cầu (S)
- 2/ Tìm bán kính mặt cầu (S).

Đáp số:  $R = \frac{a\sqrt{10}}{4}.$

### Bài 5:

Cho tứ diện ABCD có  $AB = CD = c$ ;  $AC = BD = b$ ;  $AD = BC = a$ .  
Tìm diện tích mặt cầu ngoại tiếp tứ diện.

Đáp số:  $S = \frac{\pi}{2}(a^2 + b^2 + c^2).$

### Bài 6:

Cho hình hộp chữ nhật đáy là hình vuông cạnh đáy bằng  $2r$ , chiều cao là  $3,5r$ .  
Hỏi có thể xếp vào đó 13 quả cầu bán kính  $r$  hay không?

Đáp số: Có.

# BẤT ĐẲNG THỨC VÀ GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Bất đẳng thức và giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số luôn là một chủ đề hấp dẫn trong chương trình giảng dạy và học tập của bộ môn Toán ở nhà trường phổ thông. Trong các đề thi môn Toán của các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng, các bài toán thuộc dạng này luôn có mặt, đặc biệt trong những năm gần đây nó đều thuộc vào những bài toán khó (thường xuất hiện ở câu 5).

Bài giảng này đề cập đến những phương pháp cơ bản và thông dụng nhất để chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

## §1. SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

### 1. Các kiến thức cơ bản

*Bất đẳng thức Côsi cho hai hoặc ba số*

a/ Nếu a, b là các số không âm, khi đó ta có:

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra  $\Leftrightarrow a = b$ .

b/ Nếu a, b, c là các số không âm, khi đó ta có:

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc} \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

*Một dạng thông dụng của bất đẳng thức Côsi*

a/ Nếu a, b là các số dương, thì

$$(a+b)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \geq 4 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra  $\Leftrightarrow a = b$ .

b/ Nếu a, b, c là các số dương, thì:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geq 9 \quad \text{hay} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

### 2. Các dạng toán cơ bản

**Loại 1:** Các bài toán sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi

Đặc điểm của những bài toán này là có thể sử dụng trực tiếp ngay bất đẳng thức Côsi để chứng minh bất đẳng thức trong đề, mà không qua các phép biến đổi

trung gian phức tạp. Với những bài toán này các số a, b (hoặc a, b, c) trong các bất đẳng thức Côsi cho hai số (hoặc ba số) có thể lựa chọn được ngay từ đầu bài.

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Chứng minh rằng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x.$$

Khi nào bất đẳng thức xảy ra?

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số, ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2\sqrt{\left(\frac{12}{5}\right)^x \left(\frac{15}{4}\right)^x} \quad \text{hay} \quad \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x \geq 2 \cdot 3^x \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra:

$$\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x = \left(\frac{15}{4}\right)^x \Leftrightarrow \left(\frac{5}{15} \cdot \frac{12}{4}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x=0.$$

Lập luận hoàn toàn tương tự ta có:

$$\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2 \cdot 4^x \quad (2) \quad \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 2 \cdot 5^x \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) cũng như trong (3) xảy ra  $\Leftrightarrow x=0$

Từ (1) (2) (3) suy ra (sau khi cộng từng vế với vế của ba bất đẳng thức)

$$2\left[\left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x\right] \geq 2(3^x + 4^x + 5^x)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{12}{5}\right)^x + \left(\frac{15}{4}\right)^x + \left(\frac{20}{3}\right)^x \geq 3^x + 4^x + 5^x \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng xảy ra trong (1) (2) (3) tức là khi và chỉ khi  $x=0$ .

**Nhận xét:**

Dạng tổng quát của bài toán trên là: Nếu  $a, b, c \geq 0$  thì:

$$a + b + c \geq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Cho các số dương x, y, z thỏa mãn  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3}.$$

Khi nào dấu bất đẳng thức xảy ra?

**Giải**

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$1 + x^3 + y^3 \geq 3\sqrt[3]{1 \cdot x^3 \cdot y^3} = 3xy.$$

Từ đó suy ra:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} \geq \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{xy}} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra  $\Leftrightarrow 1 = x^3 = y^3 \Leftrightarrow x = y$ .

Lập luận hoàn toàn tương tự ta có:

$$\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} \geq \frac{\sqrt{3}}{yz} \quad (2); \quad \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \frac{\sqrt{3}}{zx} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow y=z$  và dấu bằng trong (3) xảy ra  $\Leftrightarrow z=x$ .

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq \left( \frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \right) \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra khi và chỉ khi đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3), tức là khi và chỉ khi  $x = y = z = 1$  (chú ý do  $xyz = 1$ ).

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{\sqrt{xy}} + \frac{1}{\sqrt{yz}} + \frac{1}{\sqrt{zx}} \geq 3 \sqrt[3]{\frac{1}{\sqrt{xy}\sqrt{yz}\sqrt{zx}}} = 3 \quad (5)$$

(do  $xyz = 1$ ). Dấu bằng trong (5) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

Từ (4) (5) suy ra:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy} + \frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz} + \frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx} \geq 3\sqrt{3} \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra  $\Leftrightarrow$  đồng thời có dấu bằng trong (4) và (5)

$\Leftrightarrow x = y = z = 1$ . Đó là đpcm.

**Nhận xét**

Thí dụ 2 là điển hình cho phương pháp sử dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi để chứng minh bất đẳng thức.

**Thí dụ 3 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)**

Cho  $x, y$  là các số thực không âm. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{(x-y)(1-xy)}{(1+x)^2(1+y)^2}$$

**Giải**

Do  $x, y \geq 0$ , nên hiển nhiên ta có:

$$|(x-y)(1-xy)| \leq |(x+y)(1+xy)| = (x+y)(1+xy).$$

Vì thế:

$$|P| = \frac{|(x-y)(1-xy)|}{(1+x)^2(1+y)^2} \leq \frac{(1+xy)(x+y)}{[(x+y)(1+xy)]^2} \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:  $(x+y)(1+xy) \geq 2\sqrt{(x+y)(1+xy)} \quad (2)$

Từ (1) (2) suy ra:  $|P| \leq \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq P \leq \frac{1}{4}$  (3)

Kết hợp với khi  $x = 1, y = 0$ , thì  $P = \frac{1}{4}$ ,

khi  $x = 0, y = 1$ , thì  $P = -\frac{1}{4}$ .

Tóm lại,  $P$  đạt giá trị lớn nhất  $= \frac{1}{4}$  và đạt giá trị nhỏ nhất khi  $P = -\frac{1}{4}$ .

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học Sài Gòn khối A - B 2007)**

Cho  $a, b, c$  là ba số dương thỏa mãn  $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu

thức:  $P = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ca}{b}$ .

**Giải**

Do  $a > 0, b > 0, c > 0$  nên  $P > 0$  và

$$P^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} + 2(a^2 + b^2 + c^2) \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{b^2 c^2}{a^2} \geq 2b^2; \quad \frac{a^2 b^2}{c^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} \geq 2a^2; \quad \frac{b^2 c^2}{a^2} + \frac{c^2 a^2}{b^2} \geq 2c^2.$$

Từ đó suy ra:  $P \geq 3(a^2 + b^2 + c^2)$  (2)

Do  $a^2 + b^2 + c^2 = 1 \Rightarrow P^2 \geq 3$ .

Vì  $P > 0$  nên ta có:  $P \geq \sqrt{3}$  (3)

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

Vậy  $P$  nhận giá trị nhỏ nhất  $= \sqrt{3}$  khi và chỉ khi  $a = b = c = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Quảng Bình - 2006)**

Cho  $a \geq 0, b \geq 0$ . Chứng minh  $3a^3 + 7b^3 \geq 9ab^2$ .

**Giải**

Theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$3a^3 + 7b^3 = 3a^3 + 3b^3 + 4b^3 \geq 3\sqrt[3]{36a^3b^6} = 3ab^2\sqrt[3]{36} \quad (1)$$

Do  $ab^2 \geq 0$ , còn  $\sqrt[3]{36} > 3$ , nên từ (1) suy ra

$$3a^3 + 4b^3 \geq 9ab^2 \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow ab^2 = 0$ .

Tức là trong hai số  $a, b$  có ít nhất một số bằng 0.

**Thí dụ 6 (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Cơ khí luyện kim - 2006)**

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh

$$\frac{a^3}{b} + \frac{b^3}{c} + \frac{c^3}{a} \geq ab + bc + ca.$$

**Giải**

ta cho tương đương với bất đẳng thức sau:

$$\left(\frac{a^3}{b} + ab\right) + \left(\frac{b^3}{c} + bc\right) + \left(\frac{c^3}{a} + ca\right) \geq 2(ab + bc + ca) \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{a^3}{b} + ab = a\left(\frac{a^2}{b} + b\right) \geq a \cdot 2a = 2a^2 \quad (2)$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \frac{a^3}{b} = ab \Leftrightarrow a = b.$$

$$\text{Tương tự ta có: } \frac{b^3}{c} + bc \geq 2b^2 \quad (3) \qquad \frac{c^3}{a} + ca \geq 2c^2 \quad (4)$$

Dấu bằng trong (3), trong (4) xảy ra tương ứng khi và chỉ khi  $b = c$ ;  $c = a$ .  
Cộng từng vế với vế của (2) (3) (4) ta có:

$$VT(1) \geq 2(a^2 + b^2 + c^2). \quad (5)$$

$$\text{Dấu bằng trong (5) xảy ra} \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)} \\ \Leftrightarrow a = b = c.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) = (a^2 + b^2) + (b^2 + c^2) + (c^2 + a^2) \geq 2(ab + bc + ca). \quad (6)$$

$$\text{Dấu bằng trong (6) xảy ra} \Leftrightarrow a = b = c.$$

Từ (5) và (6) suy ra  $VT(1) \geq VP(1) \Rightarrow đpcm$ .

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \text{đồng thời có dấu bằng trong (5) (6).} \\ \Leftrightarrow a = b = c.$$

**Thí dụ 7:**

Cho hai số dương  $x, y$  thay đổi và thỏa mãn điều kiện  $x + y \geq 4$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2}.$$

**Giải**

ta có:

$$A = \frac{3x^2 + 4}{4x} + \frac{2 + y^3}{y^2} = \frac{x}{4} + \frac{1}{x} + 2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8}\right) + \frac{x + y}{2}. \quad (1)$$

ứng dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{x}{4} + \frac{1}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{4} \cdot \frac{1}{x}} = 1. \quad (2)$$

trong (2) xảy ra khi và chỉ khi:

$$\frac{x}{4} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x = 2.$$

Lại theo bất đẳng thức Côsi ta có:  $\frac{1}{y^2} + \frac{y}{8} + \frac{y}{8} \geq 3\sqrt{\frac{1}{y^2} \cdot \frac{y}{8} \cdot \frac{y}{8}} = \frac{3}{4}$ . (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = \frac{y}{8} \Leftrightarrow y = 3$ .

Lại có:  $x + y \geq 4$  (giả thiết) (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow x + y = 4$ .

Từ (2) (3) (4) ta có:  $A \geq 1 + 2 \cdot \frac{3}{4} + 2 = \frac{9}{2}$ .

Vậy  $A \geq \frac{9}{2}$  (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra  $\Leftrightarrow$  đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4)  
 $\Leftrightarrow x = y = 2$ .

Như thế  $\min A = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = 2$ .

### Thí dụ 8

Cho  $x > 0, y > 0$  và  $x + y = 1$ . Chứng minh:

$$P = \frac{1}{x^3 + y^3} + \frac{1}{xy} \geq 4 + 2\sqrt{3}.$$

**Giải**

Ta có  $x + y = 1 \Rightarrow (x+y)^3 = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy(x+y) = 1 \Rightarrow x^3 + y^3 + 3xy = 1$ .

Vậy  $P = \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3 + 3xy}{xy} = 4 + \frac{3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3}{xy}$ . (1)

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\frac{3xy}{x^3 + y^3} + \frac{x^3 + y^3}{xy} \geq 2\sqrt{3} \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x^3 + y^3 = \sqrt{3xy} \end{cases}$ .

### Thí dụ 9:

Cho  $x > 0, y > 0$  và  $x^2 + y^2 = 1$ . Chứng minh

$$S = (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right) \geq 3\sqrt{2} + 4.$$

**Giải**

Ta có

$$\begin{aligned} S &= (1+x)\left(1+\frac{1}{y}\right) + (1+y)\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1+x+\frac{1}{y}+\frac{x}{y} + 1+\frac{1}{x}+y+\frac{y}{x} \\ &= \left(x+\frac{1}{2x}\right) + \left(y+\frac{1}{2y}\right) + \left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\right) + 2. \quad (1) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:



$$x + \frac{1}{x} \geq \sqrt{2} \quad (2); \quad y + \frac{1}{2y} \geq \sqrt{2} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) và (3) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2 \quad (4); \quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{2}{\sqrt{xy}} \geq \frac{2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{2\sqrt{2}}{1} \quad (5)$$

Dấu bằng trong (4) và (5) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

Thay (2), (3), (4), (5) vào (1) ta có:

$$S \geq 3\sqrt{2} + 4. \quad (6)$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra  $\Leftrightarrow$  đồng thời có dấu bằng trong (2) (3) (4) (5)

$$\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

**Thí dụ 10:**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1+y} + \frac{1}{1+z} = 2$ . Chứng minh rằng:  $xyz \leq \frac{1}{8}$ .

**Giải**

Từ giả thiết, ta có:

$$\frac{1}{1+x} = \left(1 - \frac{1}{1+y} + 1 - \frac{1}{1+z}\right) = \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z}.$$

Do đó theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{1}{1+x} \geq 2\sqrt{\frac{yz}{(1+y)(1+z)}} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{y}{1+y} = \frac{z}{1+z} \Leftrightarrow y = z$ .

Lập luận tương tự, ta có

$$\frac{1}{1+y} \geq 2\sqrt{\frac{xz}{(1+z)(1+x)}} \quad (2) \quad \frac{1}{1+z} \geq 2\sqrt{\frac{xy}{(1+x)(1+y)}} \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) xảy ra  $\Leftrightarrow x = z$  và  $x = y$ .

Nhân vế với vế (1) (2) (3) ta có:

$$\frac{1}{(1+x)(1+y)(1+z)} \geq 8 \frac{xyz}{(1+x)(1+y)(1+z)} \\ \Rightarrow xyz \leq \frac{1}{8} \Rightarrow \text{đpcm.}$$

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

**Loại 2:** Sử dụng bất đẳng thức Côsi kết hợp với biến đổi đại số

Với các bài tập dạng này không thể áp dụng trực tiếp bất đẳng thức Côsi để chứng minh như các bài tập thuộc dạng 1. Để có thể sử dụng được bất đẳng thức Côsi, trước hết ta cần thực hành các phép biến đổi đại số, mà chủ yếu là phép đặt ẩn phụ. Sau quá trình biến đổi ta đưa bất đẳng thức cần chứng minh về dạng mà có thể sử dụng trực tiếp được bất đẳng thức Côsi.

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A-2007)**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz=1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức sau:

$$P = \frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$y+z \geq 2\sqrt{yz} \Rightarrow x^2(y+z) \geq 2x\sqrt{x^2yz} = 2x\sqrt{x} \quad (\text{do } xyz=1)$$

Vậy ta có:

$$x^2(y+z) \geq 2x\sqrt{x} \quad (1); \quad y^2(z+x) \geq 2y\sqrt{y} \quad (2); \quad z^2(x+y) \geq 2z\sqrt{z} \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) ta có: } P \geq \frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}} + \frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}} + \frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow$  đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} a = y\sqrt{y} + 2z\sqrt{z} \\ b = z\sqrt{z} + 2x\sqrt{x} \\ c = x\sqrt{x} + 2y\sqrt{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{x} = \frac{4c+a-2b}{9} \\ y\sqrt{y} = \frac{4a+b-2c}{9} \\ z\sqrt{z} = \frac{4b+c-2a}{9} \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \text{Từ (4) (5) suy ra: } P &\geq \frac{2(4c+a-2b)}{9b} + \frac{2(4a+b-2c)}{9c} + \frac{2(4b+c-2a)}{9a} \\ &\Rightarrow P \geq \frac{2}{9} \left[ 4 \left( \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \right) + \left( \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \right) - 6 \right]. \end{aligned} \quad (6)$$

Do  $a > 0, b > 0, c > 0$ , nên lại theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{cases} \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{b}{a} \geq 3\sqrt{\frac{c}{b} \cdot \frac{a}{c} \cdot \frac{b}{a}} = 3 \\ \frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a} \geq 3\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{a}} = 3 \end{cases}$$

Từ (6) suy ra  $P \geq 2$  (7).

Dấu bằng trong (7) xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$  và có dấu bằng trong (4)

$$\Leftrightarrow x = y = z = 1.$$

Vậy  $\min P = 2 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**ví dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)**

ho  $x > 0, y > 0, z > 0$  và thỏa mãn điều kiện  $x(x+y+z) = 3xyz$ .

hứng minh:

$$(x+y)^3 + (x+y)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3.$$

**Giải**

Đặt  $a = x + y; b = x + z; c = y$ ; khi đó ta có  $a > 0, b > 0, c > 0$  và:

$$x = \frac{a+b-c}{2}; y = \frac{a+c-b}{2}; z = \frac{b+c-a}{2}.$$

Từ giả thiết  $x(x+y+z) = 3yz$ , ta có:

$$\frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} = 3 \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{b+c-a}{2}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)^2 - c^2 = 3(ab + ac - a^2 + bc + c^2 - ac - b^2 - bc + ab).$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - c^2 + 2ab = 6ab - 3a^3 + 3c^2 - 3b^2.$$

$$\Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

(1)

Bất đẳng thức cần chứng minh:

$$(x+y)^3 + (x+y)^3 + 3(x+y)(x+z)(y+z) \leq 5(y+z)^3.$$

$$\Leftrightarrow a^3 + b^3 + 3abc \leq 5c^3.$$

(2)

Theo (1) ta có:

$$c^2 = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab.$$

(3)

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:

$$ab \leq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

Do đó từ (3) có:

$$c^2 \geq (a+b)^2 - 3 \frac{(a+b)^2}{4} \text{ hay } c^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4}.$$

(4)

Do  $a, b, c > 0$ , nên từ (4) ta có:

$$a+b \leq 2c.$$

(5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra  $\Leftrightarrow a=b$ .

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow (a+b)(a^2 - ab + b^2) + 3abc \leq 5c^3$$

$$\Leftrightarrow (a+b)c^2 + 3abc \leq 5c^3 \text{ (theo (1))}$$

$$\Leftrightarrow (a+b)c + 3ab \leq 5c^2 \text{ (6). (do } c > 0)$$

Theo bất đẳng thức Côsi và theo (4) ta có:

$$3ab \leq \frac{3}{4}(a+b)^2 \leq 3c^2.$$

(7)

Từ (7) và do  $c > 0$  suy ra:  $(a+b)c \leq 2c^2$ .

(8)

Từ (7) (8) suy ra (5) đúng  $\Rightarrow$  đpcm.

**Nhận xét:**

Trong bài tập trên ta sử dụng bất đẳng thức Côsi ở dạng đơn giản nhất.

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (a + b)^2 \geq 4ab.$$

Tuy nhiên, phép biến đổi đại số ở đây đóng vai trò rất quan trọng.

**Thí dụ 3:**

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$abc \geq (b + a - c)(a + c - b)(b + c - a),$$

ở đây a, b, c là ba cạnh của tam giác.

**Giải**

Đặt  $x = b + c - a$ ;  $y = a + c - b$ ;  $z = a + b - c$ ; Khi đó  $x, y, z > 0$

$$\text{và ta có: } a = \frac{y+z}{2}; b = \frac{x+y}{2}; c = \frac{x+z}{2}.$$

Từ đó:  $abc \geq (b + c - a)(a + c - b)(a + b - c).$

$$\Leftrightarrow (y+z)(x+z)(y+x) \geq 8xyz. (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{cases} y + z \geq 2\sqrt{yz} \\ x + z \geq 2\sqrt{xz} \\ x + y \geq 2\sqrt{xy} \end{cases}$$

Từ đó suy ra:  $(y+z)(x+y)(y+z) \geq 8xyz.$

Vậy (1) đúng  $\Rightarrow$  đpcm.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$

$$\Leftrightarrow a = b = c$$

$\Leftrightarrow$  ABC là tam giác đều.

**Nhận xét:**

Ở đây ta sử dụng bất đẳng thức Côsi dạng đơn giản nhất:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$  với  $a, b > 0$ . Tuy nhiên, phương pháp biến đổi đại số để đưa bài toán về dạng có thể áp dụng được bất đẳng thức Côsi mới quan trọng.

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**

Cho hai số thực  $x \neq 0, y \neq 0$  thay đổi và thỏa mãn điều kiện

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy.$$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3}.$$

**Giải**

Đặt  $a = \frac{1}{x}$ ;  $b = \frac{1}{y}$ . Khi đó từ giả thiết:

$$(x + y)xy = x^2 + y^2 - xy, \text{ ta có}$$

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \frac{1}{ab} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{ab} + \frac{1}{b^2} \Leftrightarrow a + b = a^2 + b^2 - ab (1)$$

Ta có:  $A = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{y^3} = a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^2$  (do (1)).

Theo bất đẳng thức Côsi ta có:  $(a+b)^2 \geq 4ab \Rightarrow ab \leq \frac{1}{4}(a+b)^2$ . (2)

Do đó: từ (1) (2) ta có

$$a+b = a^2 + b^2 - ab = (a+b)^2 - 3ab \geq (a+b)^2 - \frac{3}{4}(a+b)^2 \Rightarrow a+b \geq \frac{1}{4}(a+b)^2$$

$$\Rightarrow (a+b)^2 - 4(a+b) < 0 \Rightarrow 0 \leq a+b \leq 4 \quad (3)$$

Từ (3) suy ra:  $A = (a+b)^2 \leq 16$  (4)

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow a+b=4$  và  $a=b \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ .

Tóm lại min  $A = 16 \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}$ .

### Thí dụ 5

Cho  $x > 0, y > 0, z > 0$  và  $xyz = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} + \frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} + \frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3}.$$

### Giải

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 \geq 2xy \\ y^2 + 1 \geq 2y \end{cases}$$

Từ đó suy ra:  $x^2 + 2y^2 + 3 \geq 2(xy + y + 1) \Rightarrow \frac{1}{x^2 + 2y^2 + 3} \leq \frac{1}{2(xy + y + 1)}$ . (1)

Lập luận tương tự có  $\frac{1}{y^2 + 2z^2 + 3} \leq \frac{1}{2(yz + z + 1)}$  (2)

$$\frac{1}{z^2 + 2x^2 + 3} \leq \frac{1}{2(xz + x + 1)}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (1) (2) (3) xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = 1; y = z = 1; z = x = 1$ .  
Cộng từng vế với vế của (1) (2) (3) và có:

$$P \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy + y + 1} + \frac{1}{yz + z + 1} + \frac{1}{zx + x + 1} \right). \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra khi và chỉ khi  $x = y = z = 1$ .

Vì  $xyz = 1$  nên viết lại (1) dưới dạng:

$$P \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{xy^2z + xyz + xy} + \frac{y}{xyz + xy + y} \right)$$

$$\text{hay } P \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{xy + y + 1} + \frac{xy}{xy + y + 1} + \frac{y}{xy + y + 1} \right) \Rightarrow P \leq \frac{1}{2}. \quad (5)$$

Vậy  $P_{\max} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**Thí dụ 6:**

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh

$$P = \frac{x}{2x+y+z} + \frac{y}{2y+z+x} + \frac{z}{2z+x+y} \leq \frac{3}{4}.$$

**Giải**

Đặt  $A = 2x + y + z$ ;  $B = x + 2y + z$ ;  $C = z + y + 2x$  Khi đó

$$x = \frac{3A - (B + C)}{4}; y = \frac{3B - (C + A)}{4}; z = \frac{3C - (A + B)}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Vậy } P &= \frac{3A - (B + C)}{4A} + \frac{3B - (C + A)}{4B} + \frac{3C - (A + B)}{4C} \\ &= \frac{1}{4} \left[ 9 - \left( \frac{A}{B} + \frac{B}{A} \right) - \left( \frac{A}{C} + \frac{C}{A} \right) - \left( \frac{B}{C} + \frac{C}{B} \right) \right] \leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$  đpcm

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow A = B = C \Leftrightarrow x = y = z$ .

**Loại 3:** Sử dụng bất đẳng thức cơ bản

$$(x + y) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) \geq 4; (x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9.$$

Rất nhiều bài toán chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số quy về hai bất đẳng thức cơ bản nói trên. Vì thế có thể xem như việc sử dụng hai bất đẳng thức này là một trong những cách sử dụng bất đẳng thức Côsi trong các bài toán cụ thể.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$ . Chứng minh:

$$\frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \leq 1.$$

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b} \quad (1) \text{ ở đây } a > 0, b > 0$$

(bất đẳng thức này suy trực tiếp từ hai bất đẳng thức Côsi

$$a + b \geq 2\sqrt{ab} \text{ và } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{2}{\sqrt{ab}}), \text{ ta có}$$

$$\frac{1}{x+y} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{4}{2x+y+z}. \quad (2)$$

Dấu bằng của (1) xảy ra  $\Leftrightarrow y = z$ .

Lại áp dụng (1) ta có:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \geq \frac{4}{x+y} \text{ và } \frac{1}{x} + \frac{1}{z} \geq \frac{4}{x+z} \Rightarrow \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4 \left( \frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right). \quad (3)$$

Dấu bằng trong (3) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

$$\text{Từ (2) (3) ta có: } \frac{2}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{2x+y+z}. \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

$$\text{Lập luận tương tự ta có: } \frac{1}{x} + \frac{2}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{16}{x+2y+z} \quad (5)$$

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{2}{z} \geq \frac{16}{x+y+2z}. \quad (6)$$

Cộng từng vế (4) (5) (6) suy ra:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq 4 \left( \frac{1}{2x+y+z} + \frac{1}{x+2y+z} + \frac{1}{x+y+2z} \right)$$

Từ giả thiết  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 4$  suy ra đpcm.

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = \frac{4}{3}.$$

### Thí dụ 2

Cho  $x > 0, y > 0, z > 0$  và  $x + y + z = 1$ .

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:  $S = \frac{x}{x+1} + \frac{y}{y+1} + \frac{z}{z+1}$ .

### Giải

Viết lại S dưới dạng:

$$S = 1 - \frac{1}{x+1} + 1 - \frac{1}{y+1} + 1 - \frac{z}{z+1} = 3 - \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right). \quad (1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có:

$$\begin{aligned} & \left[ (x+1) + (y+1) + (z+1) \right] \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \right) \geq 9 \\ \Rightarrow & \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} + \frac{1}{z+1} \geq \frac{9}{4} \quad (\text{do } x+y+z=1) \end{aligned}$$

$$\text{Từ (1) suy ra } S \leq \frac{3}{4} \quad (2).$$

$$\text{Dấu bằng trong (2) xảy ra } \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy } \max S = \frac{3}{4} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}.$$

### Thí dụ 3:

Cho  $a, b, c > 0$ . Chứng minh  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ .

### Giải

Ta có:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2} \Leftrightarrow 1 + \frac{a}{b+c} + 1 + \frac{b}{c+a} + 1 + \frac{c}{a+b} \geq \frac{9}{2}$$

$$2(a+b+c) \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9$$

$$\Leftrightarrow [(b+c) + (c+a) + (a+b)] \left( \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) \geq 9. (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản thì (1) đúng  $\Rightarrow$  đpcm.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c$ .

#### **Thí dụ 4**

Chứng minh rằng trong mọi tam giác ABC, ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq 2 \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \right),$$

ở đây a, b, c là ba cạnh, còn p là nửa chu vi tam giác.

### Giải

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-b} \geq \frac{4}{(p-a) + (p-b)} = \frac{4}{c}. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra  $\Leftrightarrow p-a = p-b \Leftrightarrow a = b$ .

Tương tự ta có:

$$\frac{1}{p-a} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{b} \quad (2)$$

$$\frac{1}{p-b} + \frac{1}{p-c} \geq \frac{4}{a}. \quad (3)$$

Dấu bằng trong (2) (3) xảy ra tương ứng khi a = b; b = c. Cộng từng vế (1) (2) (3) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c \Leftrightarrow$  ABC là tam giác đều.

#### **Thí dụ 5**

Cho  $x > 0, y > 0$  và  $x + y < 1$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^2}{1-x} + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} + x + y.$$

### Giải

Ta có thể viết lại (P) ở dạng

$$P = (1+x) + \frac{x^2}{1-x} + (1+y) + \frac{y^2}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2$$

$$= \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} - 2. \quad (1)$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản ta có:



$$\begin{aligned} & [(1-x) + (1-y) + (x+y)] \left( \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} \right) \geq 9 \\ & \Rightarrow \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1-y} + \frac{1}{x+y} \geq \frac{9}{2}. \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra } P \geq \frac{5}{2}. \quad (3)$$

$$\text{Dấu bằng trong (3) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 1-x=2x \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}.$$

$$\text{Vậy min } P = \frac{5}{2} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{3}.$$

#### **Thí dụ 6**

Cho  $x, y, z, t > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$P = \frac{x-t}{t+y} + \frac{t-y}{y+z} + \frac{y-z}{z+x} + \frac{z-x}{x+t}.$$

#### **Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } P &= \left( \frac{x-t}{t+y} + 1 \right) + \left( \frac{t-y}{y+z} + 1 \right) + \left( \frac{y-z}{z+x} + 1 \right) + \left( \frac{z-x}{x+t} + 1 \right) - 4 \\ &= \frac{x+y}{t+y} + \frac{t+z}{y+z} + \frac{x+y}{z+x} + \frac{t+z}{x+t} - 4 \\ &= (x+y) \left( \frac{1}{t+y} + \frac{1}{z+x} \right) + (z+t) \left( \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t} \right) - 4. \quad (1) \end{aligned}$$

Theo bất đẳng thức Côsi cơ bản, ta có:

$$\frac{1}{t+x} + \frac{1}{z+x} \geq \frac{4}{x+y+z+t}; \quad \frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+t} \geq \frac{4}{x+y+z+t}.$$

$$\text{Thay vào (1) ta có: } P \geq 4 \frac{(x+y)(z+t)}{x+y+z+t} - 4 \Rightarrow P \geq 0.$$

Vậy  $P \geq 0$ . Mặt khác chẳng hạn khi  $x=y=z=t=1$  thì  $P=0$ .

Do đó  $P_{\min} = 0$ .

**Loại 4:** Sử dụng phép thêm bớt khi sử dụng sử dụng bất đẳng thức Côsi:

Có hai cách thêm bớt chính: thêm bớt hằng số và thêm bớt biểu thức chứa biến. Xét các thí dụ minh họa sau đây.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2005)**

Cho  $x \geq 2, y \geq 3, z \geq 4$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$P = \frac{xy\sqrt{z-4} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz}.$$

#### **Giải**

$$\text{Ta có: } P = \frac{xy\sqrt{z-4} + yz\sqrt{x-2} + zx\sqrt{y-3}}{xyz}. \quad (1)$$

Thêm bớt hằng số và sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt{(z-4)4} \leq \frac{(z-4)+4}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{z-4}}{z} \leq \frac{1}{4}$$

$$\sqrt{(x-2)2} \leq \frac{(x-2)+2}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{x-2}}{x} \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{(y-3)3} \leq \frac{(y-3)+3}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{y-3}}{y} \leq \frac{1}{2\sqrt{3}}$$

$$a: P \leq \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right) \quad (2)$$

Trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow x=4, y=6, z=8$ ;

$$P = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \right).$$

$x, y, z > 0$  và  $x+y+z = \frac{3}{4}$ . Chứng minh rằng  $\sqrt[3]{x+3y} + \sqrt[3]{y+3z} + \sqrt[3]{z+3x} \leq 3$ .

**Giải**

Thêm bớt hằng số và theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$\sqrt[3]{x+3y} = \sqrt[3]{(x+3y) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{x+3y+1+1}{3} = \frac{x+3y+2}{3} \quad (1)$$

$$\sqrt[3]{y+3z} = \sqrt[3]{(y+3z) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{y+3z+1+1}{3} = \frac{y+3z+2}{3} \quad (2)$$

$$\sqrt[3]{z+3x} = \sqrt[3]{(z+3x) \cdot 1 \cdot 1} \leq \frac{z+3x+1+1}{3} = \frac{z+3x+2}{3} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3) và do  $x+y+z = \frac{3}{4}$  suy ra đpcm.

$$\text{Đẳng thức xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x+3y=1 \\ y+3z=1 \\ z+3x=1 \end{cases} \Rightarrow x=y=z=\frac{1}{4}.$$

**Ví dụ 3**

Cho  $x, y, z$  là ba số dương. Chứng minh:  $\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2}$ .

**Giải**

Bằng cách thêm bớt hằng số và sử dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{x^3}{y^3} + 1 \geq 3 \frac{x^2}{y^2} \quad (1)$$

$$\frac{y^3}{z^3} + \frac{y^3}{z^3} + 1 \geq 3 \frac{y^2}{z^2} \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{x^3} + \frac{z^3}{x^3} + 1 \geq 3 \frac{z^2}{x^2} \quad (3)$$

Cộng từng vế với vế của (1) (2) (3) ta có

$$2 \left( \frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} \right) + 3 \geq 3 \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow$  đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

Lại theo bất đẳng thức Côsi ta có

$$\left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \right) \geq 3. \quad (5)$$

Dấu bằng trong (5) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z > 0$ .

Từ (4) (5) suy ra:

$$\frac{x^3}{y^3} + \frac{y^3}{z^3} + \frac{z^3}{x^3} \geq \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{z^2} + \frac{z^2}{x^2} \quad (6) \Rightarrow \text{đpcm}$$

Dấu bằng trong (6) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z > 0$ .

**Thí dụ 4:**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $x + y + z = 1$ . Chứng minh

$$S = x + \sqrt{xy} + \sqrt[3]{xyz} \leq \frac{4}{3}.$$

**Giải**

Viết lại S dưới dạng:

$$S = x + \frac{1}{2}\sqrt{x \cdot 4y} + \frac{1}{4}\sqrt[3]{x \cdot 4y \cdot 16z}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:  $S \leq x + \frac{x+4y}{4} + \frac{x+4y+16z}{12}$

$$\Rightarrow S \leq \frac{16(x+y+z)}{12} = \frac{4}{3} \quad (\text{do } x+y+z=1) \Rightarrow \text{đpcm}.$$

$$\text{Dấu bằng xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y = 16z \\ x + y + z = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{16}{21} \\ y = \frac{4}{21} \\ z = \frac{1}{21} \end{cases}$$

**Thí dụ 5:**

Cho  $-1 \leq x \leq 1$ . Chứng minh

$$S = \sqrt[4]{1-x^2} + \sqrt[4]{1-x} + \sqrt[4]{1+x} \leq 3.$$

**Giải**

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\sqrt[4]{1-x^2} = \sqrt[4]{1-x} \cdot \sqrt[4]{1+x} \leq \frac{\sqrt[4]{1+x} + \sqrt[4]{1-x}}{2} \quad (1)$$

$$\sqrt[4]{1-x} = \sqrt[4]{1-x} \cdot 1 \leq \frac{\sqrt{1-x} + 1}{2} \quad (2)$$

$$\sqrt[4]{1+x} = \sqrt[4]{1+x} \cdot 1 \leq \frac{\sqrt{1+x} + 1}{2} \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3), ta có

$$S \leq 1 + \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \quad (4)$$

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow$  đồng thời có dấu bằng trong (1) (2) (3)  
 $\Leftrightarrow x = 0$ .

Lại có:  $\sqrt{1-x} = \sqrt{(1-x) \cdot 1} \leq \frac{(1-x) + 1}{2}$ ,

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{(1+x) \cdot 1} \leq \frac{(1+x) + 1}{2}.$$

Từ đó:  $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x} \leq 2$ . (5)

Dấu bằng trong (5) xảy ra  $\Leftrightarrow x = 0$ .

Từ (4) (5) đi đến  $S \leq 3$  (6)  $\Rightarrow$  đpcm.

Dấu bằng trong (6) xảy ra  $\Leftrightarrow x = 0$ .

**Thí dụ 6:**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz = 1$ . Chứng minh rằng

$$P = \frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{z^3}{(1+x)(1+y)} \geq \frac{3}{4}.$$

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq 3\sqrt[3]{\frac{x^3(1+y)(1+z)}{64(1+y)(1+z)}}$$

hay:  $\frac{x^3}{(1+y)(1+z)} + \frac{1+y}{8} + \frac{1+z}{8} \geq \frac{3}{4}x$ . (1)

Lập luận tương tự, ta có:

$$\frac{y^3}{(1+z)(1+x)} + \frac{1+z}{8} + \frac{1+x}{8} \geq \frac{3}{4}y, \quad (2)$$

$$\frac{z^3}{(1+x)(1+y)} + \frac{1+x}{8} + \frac{1+y}{8} \geq \frac{3}{4}z. \quad (3)$$

Cộng từng vế (1) (2) (3), ta có:  $P + \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}(x+y+z)$  (4)

Lại theo bất đẳng thức Côsi, ta có:  $x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3$  (do  $xyz = 1$ ) (5)

Từ (4) (5) suy ra:  $P \geq \frac{3}{4} \Rightarrow$  đpcm.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**Thí dụ 7:**

Cho  $x, y, z > 0$  và  $\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$ . Chứng minh rằng:

$$S = \frac{x^2}{x+y} + \frac{y^2}{y+z} + \frac{z^2}{z+x} \geq \frac{1}{2}.$$

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:  $\frac{x^2}{x+y} + \frac{x+y}{4} \geq x$  (1)

$$\frac{y^2}{y+z} + \frac{y+z}{4} \geq y$$
 (2)

$$\frac{z^2}{z+x} + \frac{z+x}{4} \geq z$$
 (3)

Cộng từng vế (1) (2) (3) và có:  $S \geq \frac{x+y+z}{2}$  (4)

Lại áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}; y+z \geq 2\sqrt{yz}; z+x \geq 2\sqrt{zx}$$

Vậy:  $x+y+z \geq \sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx} = 1$  (5)

Từ (4) (5) suy ra:  $S \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$  đpcm

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{3}$

**Nhận xét**

Trong các thí dụ 6, 7, 8 ta đã sử dụng phép thêm bớt biểu thức chứa biến khi sử dụng bất đẳng thức Côsi.

**Thí dụ 8**

Cho  $x, y, z$  là ba số dương và  $\frac{1}{3^x} + \frac{1}{3^y} + \frac{1}{3^z} = 1$ . Chứng minh rằng:

$$\frac{9^x}{3^x + 3^{y+z}} + \frac{9^y}{3^y + 3^{x+z}} + \frac{9^z}{3^z + 3^{x+y}} \geq \frac{3^x + 3^y + 3^z}{4}.$$

**Giải**

Đặt  $a=3^x$ ;  $b=3^y$ ;  $c=3^z \Rightarrow a, b, c > 0$ .

Từ giả thiết ta có:  $3^{x+y} + 3^{y+z} + 3^{z+x} = 3^{xyz} \Leftrightarrow ab + bc + ca = abc$  (1)

Khi đó bất đẳng thức cần chứng minh có dạng tương đương:

$$\frac{a^2}{a+bc} + \frac{b^2}{b+ca} + \frac{c^2}{c+ab} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{a^2+abc} + \frac{b^3}{b^2+abc} + \frac{c^3}{c^2+abc} \geq \frac{a+b+c}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{c^3}{(c+a)(c+b)} \geq \frac{(a+b+c)}{4} \quad (2) \text{ (do (1))}.$$

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$$\frac{a^3}{(a+b)(a+c)} + \frac{a+b}{8} + \frac{a+c}{8} \geq \frac{3a}{4} \quad (2)$$

$$\frac{b^3}{(b+c)(b+a)} + \frac{b+c}{8} + \frac{b+a}{8} \geq \frac{3b}{4} \quad (3)$$

$$\frac{c^3}{(c+a)(c+b)} + \frac{c+a}{8} + \frac{c+b}{8} \geq \frac{3c}{4} \quad (4)$$

Cộng từng vế (2) (3) (4)  $\Rightarrow$  2 đúng  $\Rightarrow$  đpcm.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b = c = 3 \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

## §2. SỬ DỤNG CHIỀU BIẾN THIÊN HÀM SỐ ĐỂ CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Đây là một trong những phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức.

Để sử dụng phương pháp này người ta tiến hành như sau:

- Với mỗi bất đẳng thức hãy chọn một hàm số thích hợp (các hàm số này thường có thể thấy ngay từ đầu bài, hoặc sau một vài phép biến đổi đơn giản sẽ tìm được nó).

- Khảo sát chiều biến thiên hàm số vừa tìm được trên miền xác định của nó (miền xác định này được tìm thấy dựa vào điều kiện của đầu bài). Thông thường ta sử dụng đạo hàm để lập ra bảng biến thiên.

- Từ bước 2 sẽ cho ta lời giải của phép chứng minh bất đẳng thức, hoặc giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số cần tìm.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1,$$

với  $x, y$  là các số thỏa mãn điều kiện:  $(x + y)^3 + 4xy \geq 2$ .

**Giải**

Dựa vào bất đẳng thức hiển nhiên  $(x + y)^2 \geq 4xy$ , nên từ

$$(x+y)^3 + 4xy \geq 2 \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 \geq (x+y)^3 + 4xy \geq 2 \Rightarrow (x+y)^3 + (x+y)^2 - 2 \geq 0$$

$$\Rightarrow [(x+y)-1][(x+y)^2 + (x+y) + 2] \geq 0 \quad (1)$$

Do  $(x+y)^2 + (x+y) + 2 = \left[(x+y) + \frac{1}{2}\right]^2 + \frac{7}{4} > 0$  và từ (1) suy ra:  $x+y \geq 1$ .

Vậy nếu cặp  $(x, y)$  thỏa mãn yêu cầu đầu bài thì  $x + y \geq 1$  (2)

Ta biến đổi A như sau:

$$A = 3(x^4 + y^4 + x^2y^2) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$= \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{2}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1. \quad (3)$$

Do  $x^4 + y^4 \geq \frac{(x^2 + y^2)^2}{2}$  nên từ (3) suy ra:

$$A \geq \frac{3}{2}(x^2 + y^2)^2 + \frac{3}{4}(x^4 + y^4) - 2(x^2 + y^2) + 1$$

$$\text{hay } A \geq \frac{9}{4}(x^2 + y^2)^2 - 2(x^2 + y^2) + 1.$$

Vì  $x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2}$  nên từ (2) ta có  $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{2}$ .

$$\text{Đặt } f(t) = \frac{9}{4}t^2 - 2t + 1 \text{ với } t \geq \frac{1}{2}$$

Ta có  $f'(t) = \frac{9}{2}t - 2$  Từ đó ta có bảng biến thiên sau :

t	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{2}$	
$f'(t)$			+
$f(t)$			

$$\text{Vậy } \min_{t \geq \frac{1}{2}} f(t) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{16} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra  $A \geq \frac{9}{16}$ . Mặt khác ta dễ thấy khi  $x = y = \frac{1}{2}$  thì  $A = \frac{9}{16}$ .

Tóm lại  $\min A = \frac{9}{16}$  (và có thể thấy điều đó xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = \frac{1}{2}$ ).

**Thí dụ 2 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Cho  $x, y \geq 0$  và  $x + y = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy.$$

**Giải**

Ta có:

$$S = (4x^2 + 3y)(4y^2 + 3x) + 25xy = 16x^2y^2 + 12(x^3 + y^3) + 34xy$$

$$= 16(x^2 + y^2) + 12(x + y)(x^2 - xy + y^2) + 34xy$$

$$= 16x^2y^2 + 12[(x + y)^2 - 3xy] + 34xy \quad (\text{do } x + y = 1)$$

$$= 16x^2y^2 - 2xy + 12 \quad (1) \quad (\text{cũng do } x + y = 1).$$

Đặt  $xy = t$  ta có: (do  $x \geq 0; y \geq 0$ )

$$0 \leq xy \leq \frac{(x+y)^2}{4} = \frac{1}{4} \Rightarrow 0 \leq t \leq \frac{1}{4}.$$

Vì thế xét hàm số  $f(t) = 16t^2 - 2t + 12$  với  $0 \leq t \leq \frac{1}{4}$

Ta có:  $f'(t) = 32t - 2$ .

Do đó ta có bảng biến thiên sau

t	0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$
$f'(t)$	-	0	+
$f(t)$		$\nearrow$	$\searrow$

Vậy  $\min_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(x) = f\left(\frac{1}{16}\right) = \frac{191}{16}$

$$\max_{\left[0; \frac{1}{4}\right]} f(x) = \max \left\{ f(0); f\left(\frac{1}{4}\right) \right\} = \max \left\{ 12; \frac{25}{2} \right\} = \frac{25}{2}.$$

Giá trị nhỏ nhất của S đạt được

$$\Leftrightarrow t = \frac{1}{16} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{16} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{2+\sqrt{3}}{4}; y=\frac{2-\sqrt{3}}{4} \\ x=\frac{2-\sqrt{3}}{4}; y=\frac{2+\sqrt{3}}{4} \end{cases}.$$

Giá trị lớn nhất của S đạt được  $\Leftrightarrow t = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=1 \\ xy=\frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x=y=\frac{1}{2}.$

**Thí dụ 3 (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2009)**

Cho  $0 < a < b < 1$ . Chứng minh:  $a^2 \ln b - b^2 \ln a > \ln a - \ln b$ .

**Giải**

Ta có:  $a^2 \ln b - b^2 \ln a > \ln a - \ln b \Leftrightarrow \ln b(a^2 + 1) > \ln a(1 + b^2)$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln a}{a^2 + 1} < \frac{\ln b}{b^2 + 1}. \quad (1)$$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{\ln t}{1+t^2}$ , với  $0 < t < 1$ .

Ta có:  $f'(t) = \frac{\frac{1+t^2}{t} - 2t \ln t}{(1+t)^2} = \frac{1+t^2 - 2t^2 \ln t}{t(1+t^2)^2}. \quad (2)$



$$\rightarrow 1+t-2t^2 \ln t > 0 \Rightarrow f(t) > 0 \quad \forall 0 < t < 1.$$

Vậy  $f(t)$  là hàm số đồng biến trên  $(0;1)$ . Do  $0 < a < b < 1$  nên

$$f(a) < f(b) \text{ hay } \frac{\ln a}{a^2+1} < \frac{\ln b}{b^2+1}.$$

Vậy (1) đúng  $\Rightarrow$  đpcm.

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2008)**

Cho  $x, y$  là các số thực và thỏa mãn  $x^2 + y^2 = 2$ .

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:  $P = 2(x^3 + y^3) - 3xy$ .

**Giải**

$$P = 2(x+y)(x^2 - xy + y^2) - 3xy = 2(x+y)(2 - xy) - 3xy. \quad (1)$$

Ta có:  $xy = \frac{(x+y)^2 - 2}{2}$ , vì thế sau khi đặt  $t = x+y$ , thì

$$P = 2t \left( 2 - \frac{t^2 - 2}{2} \right) - 3 \frac{t^2 - 2}{2} = 4t - t^3 + 2t - \frac{3}{2}t^2 + 3 = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3. \quad (2)$$

$$\text{Rõ ràng ta có: } x^2 + y^2 \geq \frac{(x+y)^2}{2} \Rightarrow (x+y)^2 \leq 4 \\ \Rightarrow -2 \leq t \leq 2.$$

Từ đó xét hàm số  $f(t) = -t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 6t + 3$  với  $-2 \leq t \leq 2 \Rightarrow f'(t) = -3t^2 - 3t + 6$ .

Ta có bảng biến thiên sau:

t	-2	1	2
$f'(t)$	0	+	0
$f(t)$			

$$\text{Vậy } \max_{[-2;2]} f(t) = f(1) = \frac{13}{2},$$

$$\min_{[-2;2]} f(t) = \min \{f(-2); f(2)\} = \min \{-7; 1\} = -7$$

$$\text{Vậy } \max P = \frac{13}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = \frac{1-\sqrt{3}}{2} \\ y = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}.$$

$$\min P = -7 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + y = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Cho  $x, y, z > 0$ . Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = x \left( \frac{x}{2} + \frac{1}{yz} \right) + y \left( \frac{y}{2} + \frac{1}{zx} \right) + z \left( \frac{z}{2} + \frac{1}{xy} \right).$$

**Giải**

Ta có:  $P = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{x^2 + y^2 + z^2}{xyz}. \quad (1)$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi, ta có:  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + zy + zx$ .

Từ đó theo (1) thì:

$$P \geq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} + \frac{xy + yz + zx}{xyz}$$

$$\Rightarrow P \geq \left( \frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \right) + \left( \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \right) + \left( \frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \right). \quad (2)$$

Dấu bằng trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{1}{t}$  với  $t > 0$

Ta có:  $f'(t) = t - \frac{1}{t^2} = \frac{t^3 - 1}{t^2} = \frac{(t-1)(t^2 + t + 1)}{t^2}$

Do  $t^2 + t + 1 > 0 \quad \forall t$  (nói riêng  $\forall t > 0$ , nên ta có bảng biến thiên sau:

t	0	1	
$f'_t(t)$	-	0	+
$f(t)$			

Vậy  $\min_{(0;+\infty)} f(t) = f(1) = \frac{3}{2}$  từ đó suy ra :

$$\frac{x^2}{2} + \frac{1}{x} \geq \frac{3}{2}; \frac{y^2}{2} + \frac{1}{y} \geq \frac{3}{2}; \frac{z^2}{2} + \frac{1}{z} \geq \frac{3}{2}. \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra:  $P \geq \frac{9}{2}. \quad (4)$

Dấu bằng trong (4) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

Do đó  $\min P = \frac{9}{2} \Leftrightarrow x = y = z = 1$ .

**Thí dụ 6 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)**

Cho  $a \geq b > 0$ . Chứng minh rằng:  $\left( 2^a + \frac{1}{2^a} \right)^b \leq \left( 2^b + \frac{1}{2^b} \right)^a$ .

**Giải**

Ta có:  $\left(2^a + \frac{1}{2^a}\right)^b \leq \left(2^b + \frac{1}{2^b}\right)^a$  (1)

$\Leftrightarrow \frac{(1+4^a)^b}{2^{a+b}} \leq \frac{(1+4^b)^a}{2^{a+b}} \Leftrightarrow (1+4^a)^b \leq (1+4^b)^a \Leftrightarrow \frac{\ln(1+4^a)}{a} \leq \frac{\ln(1+4^b)}{b}$   
(do  $a, b > 0$ ) (2)

Xét hàm số  $f(x) = \frac{\ln(1+4^x)}{x}$  với  $x > 0$ .

Ta có:  $f'(x) = \frac{4^x \ln 4^x - (4^x + 1) \ln(4^x + 1)}{x^2(4^x + 1)} < 0 \quad \forall x > 0$ .

Vậy  $f(x)$  là hàm nghịch biến khi  $x > 0$ . Do  $a \geq b > 0$  nên ta có:  $f(a) \leq f(b)$ .

Vậy (2) đúng  $\Rightarrow$  đpcm. Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow a = b$ .

**Thí dụ 11:**

Cho  $x > 0, y > 0, z > 0$  và thỏa mãn điều kiện  $x + y + z \leq \frac{3}{2}$ . Tìm giá trị nhỏ

nhất của biểu thức:  $P = x + y + z + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ .

**Giải**

Theo bất đẳng thức Côsi, ta có:

$(x + y + z) \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \right) \geq 9 \Rightarrow \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \geq \frac{9}{x + y + z}$   
 $P \geq x + y + z + \frac{9}{x + y + z} \quad (1)$

Dấu bằng trong (1) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$

Đặt  $t = x + y + z$ , khi đó  $0 < t \leq \frac{3}{2}$ .

Xét hàm số  $f(t) = t + \frac{9}{t}$  với  $0 < t \leq \frac{3}{2}$ .

Ta có  $f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2} = \frac{t^2 - 9}{t^2}$ . Ta có bảng biến thiên:

$t$		0		$\frac{3}{2}$		3
$f(t)$			-			0
$f(t)$						

Vậy min  $f(t) = f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{15}{2}$ .

Vậy  $\min P = \frac{15}{2} \Leftrightarrow t = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x = y = z = \frac{1}{2}$ .

**Thí dụ 7: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:  $y = \frac{\ln x^2}{x}$  trên đoạn  $[1; e^3]$ .

**Giải**

Ta có:  $y' = \frac{2 \ln x \cdot \frac{1}{x} - \ln^2 x}{x^2} = \frac{\ln x (2 - \ln x)}{x^2}$ .

Từ đó có bảng biến thiên sau:

x	1	$e^2$	$e^3$
$\ln x$	0	+	+
$2 - \ln x$	+	0	-
$y'$	0	+	0
y			

Vậy  $\max_{[1; e^3]} y = y(e^2) = \frac{4}{e^2} \Leftrightarrow x = e^2$ .

$\min_{[1; e^3]} y = \min \{y(1); y(e^3)\} = \min \left\{0; \frac{9}{e^3}\right\} = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

**Thí dụ 8: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  $y = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}}$  trên đoạn  $[-1; 2]$ .

**Giải**

Ta có  $y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - (x+1) \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Từ đó ta có bảng biến thiên sau:

x	-1	1	2
$y'$	+	0	-
y			

Vậy  $\max_{[-1; 2]} y = y(1) = \sqrt{2}$ ;  $\min_{[-1; 2]} y = \min \{y(-1); y(2)\} = \min \left\{0; \frac{3}{\sqrt{5}}\right\} = 0$ .

**Thí dụ 9: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$y = x + \sqrt{4 - x^2} \text{ với } -2 \leq x \leq 2.$$

**Giải**

Ta có:  $y' = 1 - \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} = \frac{\sqrt{4 - x^2} - x}{\sqrt{4 - x^2}}$ .

Khi  $-2 \leq x \leq 0$  thì  $\sqrt{4 - x^2} - x > 0$

Khi  $0 \leq x \leq 2$ , ta có:  $(4 - x^2) - x^2 = 4 - 2x^2$ . Do đó ta có  $y' > 0$  khi  $0 \leq x < 2\sqrt{2}$  và  $y' < 0$  khi  $\sqrt{2} < x \leq 2$ .

Tóm lại ta có bảng biến thiên sau:

x	-2	0	$\sqrt{2}$	2
y'		+	0	-
y				

Vậy  $\max y = y(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}$  ;

$\min y = \min \{y(-2); y(2)\} = \min \{-2; 2\} = -2$ .

**Nhận xét:**

Ta có thể giải như sau:

Do  $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow x + \sqrt{4 - x^2} \geq -2$  và  $y(-2) = -2$

Vậy  $\min y = -2$

Để tìm giá trị lớn nhất ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski.

**Bình luận:** Với các thí dụ 5, 7, 8, 9 việc sử dụng trực tiếp phương pháp chiều biến thiên hàm số để giải bài toán là rõ ràng và quá đơn giản.

Trong các thí dụ 4, 3, 2, 1 và 10 ta thường sử dụng đặt biến phụ để có hàm số tương ứng. Khi đặt ẩn phụ, điều lưu ý là cần tìm miền xác định cho biến mới đó.

**Thí dụ 10: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Giao thông Vận tải – 2005)**

Cho  $x, y, \geq 0$  và  $x+y=1$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = 3^{2x} + 3^y.$$

**Giải**

Ta có  $y = 1 - x$ , từ đó  $P = 3^{2x} + 3^{1-x} = 3^{2x} + \frac{3}{3^x}$  với  $0 \leq x \leq 1$ .

Đặt  $t = 3^x$ , khi đó  $1 \leq t \leq 3$ .

Xét hàm số:  $f(t) = t^2 + \frac{3}{t} \Rightarrow f'(t) = 2t - \frac{3}{t^2} = \frac{2t^3 - 3}{t^2}$ .

Từ đó có bảng biến thiên sau:

t	1	$\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$	3
f'(t)		-	0
f(t)		-	+

Vậy  $\max P = \max f(t)$

$$= \max_{1 \leq t \leq 3} \{f(1); f(3)\} = \max \{4; 10\} = 10 \Leftrightarrow t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\min P = \min_{1 \leq t \leq 3} f(t) = f\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2}}\right) = 3\sqrt[3]{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow t = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \\ y = 1 - \log_3 \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

### §3. CÁC PHƯƠNG PHÁP KHÁC CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC VÀ TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT CỦA HÀM SỐ

Trong mục này, chúng tôi đề cập đến một số phương pháp khác để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số. Mặc dù các bài tập sử dụng những phương pháp này hoặc là chưa có mặt, hoặc là có mặt chỉ một, hai lần trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây. Nhưng chúng tôi nghĩ rằng phương pháp mà sắp được giới thiệu ở đây là rất có ích trong việc chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số. Việc sử dụng nó để giải các bài toán trong các kì thi tuyển sinh sắp tới là khả năng hoàn toàn hiện thực và có tính khả thi lớn.

**a. Phương pháp miễn giá trị hàm số để chứng minh bất đẳng thức và tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.**

Phương pháp này đặc biệt hữu hiệu để tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của các hàm số có dạng sau đây (hoặc các dạng khác mà có thể đưa về chúng):

$$f(x) = \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x + c_1}{a_2 \sin x + b_2 \cos x + c_2}; f(x) = \frac{a_1 x^2 + b_1 x + c_1}{a_2 x^2 + b_2 x + c_2}.$$

Để giải các bài toán này, ta tiến hành theo lược đồ sau đây:

Giả sử  $y_0$  là một giá trị tùy ý của hàm số. Khi đó phương trình sau (ẩn x)

$$f(x) = y_0 \quad (1) \text{ có nghiệm.}$$

Từ dạng của (1) mà ta có các điều kiện thích hợp. Nói chung các điều kiện này có dạng  $\alpha \leq y_0 \leq \beta$ . (2)

Từ (2) suy ra  $\max f(x) = \beta$  và  $\min f(x) = \alpha$ .

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

Cho  $x^2 + y^2 = 1$ .

Chứng minh rằng:  $-6 \leq \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} \leq 3$ .

**Giải**

Vì  $x^2 + y^2 = 1$ , nên đưa bất đẳng thức đã cho về dạng sau:

$$-6 \leq \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} \leq 3. \quad (1)$$

Xét hai khả năng:

- Nếu  $y = 0$  (khi đó  $x = 1$ ). Lúc này (1) hiển nhiên đúng vì nó có dạng  $-6 < 2 < 3$

- Nếu  $y \neq 0$ , khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow -6 \leq \frac{2\left(\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 6\frac{x}{y}\right)}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 2\frac{x}{y} + 3} \leq 3 \Leftrightarrow -6 \leq \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3} \leq 3 \text{ với } \forall t \in \mathbb{R}$$

Gọi  $m$  là giá trị tùy ý của hàm số  $f(t) = \frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3}$  với  $t \in \mathbb{R}$ .

Khi đó phương trình sau (ẩn  $t$ )

$$\frac{2t^2 + 12t}{t^2 + 2t + 3} = m \quad (2)$$

có nghiệm. Do  $t^2 + 2t + 3 > 0, \forall t \in \mathbb{R}$ , nên

$$(2) \Leftrightarrow 2t^2 + 12t = mt^2 + 2mt + 3m$$

$$\Rightarrow (m - 2)t^2 + 2(m - 6)t + 3m = 0. \quad (3)$$

Nếu  $m = 2$  thì rõ ràng (3) có nghiệm.

Nếu  $m \neq 2$ , khi đó (3) có nghiệm khi và chỉ khi

$$\Delta' = (m - 6)^2 - 3(m - 2)m \geq 0 \Leftrightarrow m^2 + 3m - 18 \leq 0 \Leftrightarrow -6 \leq m \leq 3 \quad (m \neq 2)$$

Tóm lại ta có:  $-6 \leq m \leq 3$ .

Điều đó có nghĩa là:  $-6 \leq \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} \leq 3 \Rightarrow \text{đpcm.}$

Dấu bằng bên trái xảy ra khi:  $m = 3 \Leftrightarrow t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}; y = \frac{1}{\sqrt{10}} \\ x = -\frac{3}{\sqrt{10}}; y = \frac{-1}{\sqrt{10}} \end{cases}$$

Phần còn lại (dấu bằng bên phải xảy ra) xin dành cho bạn đọc.

**Thí dụ 2:**

Chứng minh rằng với mọi  $x \in \mathbb{R}$ , ta có:  $-\frac{1}{2} \leq \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} \leq 2$ .

**Giải**

Gọi  $m$  là giá trị tùy ý của hàm số:  $f(x) = \frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3}$  với  $x \in \mathbb{R}$ .

Khi đó phương trình sau (ẩn  $x$ ):  $\frac{2\sin x + \cos x + 1}{\sin x - 2\cos x + 3} = m$  (1)

có nghiệm. Do  $\sin x - 2\cos x + 3 \geq 3 - \sqrt{5} > 0 \quad \forall x$ , nên

$$(1) \Leftrightarrow 2\sin x + \cos x + 1 = m(\sin x + 2\cos x + 3)$$

$$\Leftrightarrow (2-m)\sin x + (1+2m)\cos x = 3m-1 \quad (2)$$

Theo lý thuyết phương trình lượng giác (phương trình bậc nhất đối với  $\sin x$  và  $\cos x$  thì (2) có nghiệm:

$$\Leftrightarrow (2-m)^2 + (1+2m)^2 \geq (3m-1)^2 \Leftrightarrow 2m^2 - 3m - 2 \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq m \leq 2. \text{ Đó là đpcm.}$$

**Chú ý:** Dấu bằng bên phải xảy ra  $\Leftrightarrow m = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = -1$  (theo (2))

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Bạn đọc tự xét khi nào dấu bằng bên phải xảy ra!

**b. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski**

Bất đẳng thức Bunhiacopski là một bất đẳng thức cũng rất thông dụng chỉ sau bất đẳng thức Côsi. Mặc dù nó chỉ xuất hiện một lần trong các đề thi, nhưng không vì thế mà ta xem nhẹ các dạng bài tập thuộc loại này.

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x + \sqrt{4-x^2} \text{ trên miền } -2 \leq x \leq 2.$$

**Giải**

Do  $x \geq -2$  nên hiển nhiên ta có:  $f(x) \geq -2$  với  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

Mặt khác  $f(-2) = -2 \Rightarrow \min f(x) = -2$

Ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopski để tìm giá trị lớn nhất của hàm số.

Áp dụng Bunhiacopski với hai dãy:

$$x; \sqrt{4-x^2} \text{ và } 1; 1 \text{ ta có:}$$

$$\left[ x^2 + (4-x^2) \right] (1^2 + 1^2) \geq (x + \sqrt{4-x^2})^2 \Rightarrow 8 \geq (x + \sqrt{4-x^2})^2 \Rightarrow \begin{cases} f(x) \leq 2\sqrt{2} \\ f(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = 2\sqrt{2}.$$

**Chú ý:**

1/ Hãy so sánh với lời giải sử dụng phương pháp chiều biến thiên hàm số.



2/ Các bạn hãy giải thích vì sao không sử dụng được bất đẳng thức *Bunhiacopski* để tìm giá trị bé nhất?

(Vì theo bất đẳng thức *Bunhiacopski* thì  $f(x) \geq 2\sqrt{2}$  nhưng không tồn tại  $x_0$  mà  $f(x_0) = -2\sqrt{2}$  ! Tại sao?)

**Thí dụ 2:**

Cho  $x, y, z$ , là các số thỏa mãn điều kiện  $xy + yz + zx = 4$ . Chứng minh:

$$x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{3}.$$

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopski* cho hai dãy số

$$x^2, y^2, z^2 \text{ và } 1, 1, 1$$

Ta có:  $(x^4 + y^4 + z^4)(1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2$

$$\Rightarrow 3(x^4 + y^4 + z^4) \geq (x^2 + y^2 + z^2)^2. \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{x^2}{1} = \frac{y^2}{1} = \frac{z^2}{1} \Leftrightarrow x^2 = y^2 = z^2$ .

Lại áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopski* cho hai dãy số:  $x, y, z$  và  $y, z, x$  ta có:

$$(x^2 + y^2 + z^2)(y^2 + z^2 + x^2) \geq (xy + yz + zx)^2$$

$$\Rightarrow (x^2 + y^2 + z^2)^2 \geq (xy + yz + zx)^2 = 16 \quad (2)$$

(do  $xy + yz + zx = 4$ )

Dấu bằng trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$ .

Từ (1) (2) suy ra:  $x^4 + y^4 + z^4 \geq \frac{16}{3} \Rightarrow \text{đpcm.}$

$$\text{Dấu bằng xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} xy + yz + zx = 16 \\ x^2 = y^2 = z^2 \\ \frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \frac{2\sqrt{3}}{3} \\ x = y = z = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases}$$

**Thí dụ 3**

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh:

$$\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y} \geq 1.$$

**Giải**

Áp dụng bất đẳng thức *Bunhiacopski* cho hai dãy

$$\sqrt{\frac{x}{y+2z}}, \sqrt{\frac{y}{z+2x}}, \sqrt{\frac{z}{x+2y}} \text{ và } \sqrt{x(y+2z)}, \sqrt{y(z+2x)}, \sqrt{z(x+2y)},$$

ta có:

$$\left(\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y}\right) [x(y+2z) + y(z+2x) + z(x+2y)] \geq (x+y+z)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{x}{y+2z} + \frac{y}{z+2x} + \frac{z}{x+2y}\right) \geq \frac{(x+y+z)^2}{x(y+2z) + y(z+2x) + z(x+2y)} \quad (1)$$

Dấu bằng trong (1) xảy ra

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{x}{y+2z}}{\frac{x}{x(2+2z)}} = \frac{\frac{y}{z+2x}}{\frac{y}{y(2+2x)}} = \frac{\frac{z}{x+2y}}{\frac{z}{z(2+2y)}} \Leftrightarrow x = y = z.$$

Ta có VP (1) =  $\frac{(x+y+z)^2}{3(xy+yz+zx)} \geq 1$  (2) do  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + zx$ .

Dấu bằng trong (2) xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

Dấu bằng xảy ra  $\Leftrightarrow x = y = z$ .

### c. Phương pháp sử dụng lượng giác

Trong một số trường hợp người ta có thể đổi biến để đưa biểu thức trong bất đẳng thức, hoặc trong hàm số cần lấy giá trị lớn nhất, nhỏ nhất về dạng lượng giác. Sử dụng các phép biến đổi lượng giác có thể làm cho việc chứng minh bất đẳng thức hoặc tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất dễ dàng hơn.

Hai phép đổi biến thông dụng, và hay dùng là: Đặt  $x = \sin t$  (hoặc  $x = \cos t$ );  $x = \tan t$  (hoặc  $\cot t$ )

#### Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = x + \sqrt{4-x^2} \text{ trên đoạn } [-2; 2]$$

#### Giải

Do  $-2 \leq x \leq 2$  nên có thể đặt  $x = \sin t$   $\left(-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$  từ đó ta có:

$$\max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = \max_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} F(t); \quad \min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = \min_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} F(t), \text{ ở đây}$$

$$F(t) = 2 \sin t + \sqrt{4 - \sin^2 t} = 2 \sin t + 2 |\cos t| = 2 \sin t + 2 \cos t$$

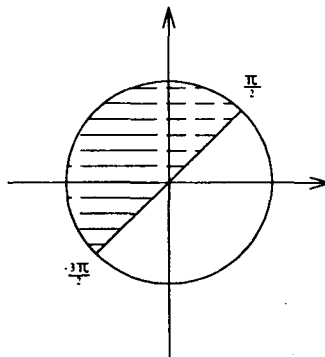
$$(\text{vì khi } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \text{ thì } \cos t \geq 0)$$

$$\Rightarrow |\cos t| = \cos t.$$

$$\text{Do đó } F(t) = 2\sqrt{2} \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right). \quad (1)$$

$$\text{Khi } -\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{3\pi}{4} \leq t - \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1 \quad (2)$$



Từ (1) (2) suy ra  $\max_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} F(t) = 2\sqrt{2}$ ,  $\min_{-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}} F(t) = -2$ .

Vậy  $\min_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = -2 \Leftrightarrow t - \frac{\pi}{4} = \frac{-3\pi}{4} \Leftrightarrow t = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = -2$ ,

$\max_{-2 \leq x \leq 2} f(x) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow t - \frac{\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{4} \Rightarrow x = \sqrt{2}$ .

**Chú ý:**

Hãy so sánh với lời giải của thí dụ trên bằng cách:

- Dùng bất đẳng thức *Bunhiacopski*.
- Dùng phương pháp chiều biến thiên hàm số.

**Thí dụ 2 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

Cho  $x^2 + y^2 = 1$ . Chứng minh rằng:  $-6 \leq \frac{2(x^2 + 6xy)}{x^2 + 2xy + 3y^2} \leq 3$ .

**Giải**

Do  $x^2 + y^2 = 1$ , nên đặt  $x = \sin t$ ,  $y = \cos t$ . Khi đó:

$$P = \frac{2(x^2 + 6xy)}{1 + 2xy + 2y^2} = \frac{2(\sin^2 t + 6\sin t \cos t)}{1 + 2\sin t \cos t + 2\cos^2 t} = \frac{1 - \cos 2t + 6\sin 2t}{\sin 2t + \cos 2t + 2}.$$

Đến đây sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số (giống như thí dụ 2, mục a) sẽ suy ra:  $-6 \leq P \leq 3$ .

**Thí dụ 3**

Giả sử  $x$  và  $y$  không đồng nhất bằng 0. Chứng minh

$$-2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2} \leq 2\sqrt{2} - 2.$$

**Giải**

Nếu  $y=0$  (khi đó  $x \neq 0$ ). Ta có:

$$\frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2} = 0, \text{ bất đẳng thức hiển nhiên đúng.}$$

Nếu  $y \neq 0$  khi  $-2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{x^2 - (x - 4y)^2}{x^2 + 4y^2} \leq 2\sqrt{2} - 2$

$$\Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 - \left(\frac{x}{2y} - 2\right)^2}{\left(\frac{x}{2y}\right)^2 + 1} \leq 2\sqrt{2} - 2 \quad (1)$$

Đặt  $\frac{x}{2y} = \tan t$ , khi đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 2 \leq \frac{\tan^2 t - (\tan t - 2)^2}{\tan^2 t + 1} \leq 2\sqrt{2} - 2 \\
 &\Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 2 \leq \cos^2 t (4 \tan t - 4) \leq 2\sqrt{2} - 2 \\
 &\Leftrightarrow -2\sqrt{2} - 2 \leq \sin 2t - \cos^2 t \leq 2\sqrt{2} - 2 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq \sin \left( 2t - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2} \quad (2)
 \end{aligned}$$

Vì (2) đúng  $\Rightarrow$  đpcm.

### BÀI TẬP TỰ GIẢI

Dùng bất đẳng thức Côsi giải các bài toán sau:

#### Bài 1:

Cho  $x, y, z > 0$ . Chứng minh

$$P = \frac{x}{2x+y+z} + \frac{2}{x+2y+z} + \frac{z}{x+y+2z} \leq \frac{3}{4}.$$

#### Bài 2:

Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz = xy + yz + zx$ . Chứng minh

$$P = \frac{1}{x+2y+3z} + \frac{1}{2x+3y+z} + \frac{1}{3x+y+2z} < \frac{3}{16}.$$

#### Bài 3:

Cho  $x, y, z > 0$  và  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ . Chứng minh

$$\frac{x}{y^2+z^2} + \frac{y}{y^2+x^2} + \frac{z}{y^2+x^2} \geq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$

#### Bài 4:

Cho  $x > 0, y > 0$  và  $x + y = 1$ . Chứng minh:  $\frac{x}{\sqrt{1-x}} + \frac{y}{\sqrt{1-y}} \geq \sqrt{2}$ .

#### Bài 5:

Cho  $a, b, c > 0$  và  $a^4 + b^4 + c^4 = 48$ . Chứng minh  
 $ab^2 + bc^2 + ca^2 \leq 24$ .

#### Bài 6:

Cho  $x, y, z$  là ba số dương và  $x + y + z = 1$ . Chứng minh

$$\sqrt{1-x} + \sqrt{1-y} + \sqrt{1-z} \leq \sqrt{6}.$$

#### Bài 7:

Cho  $x, y, z > 0$  và  $xyz = 1$ . Chứng minh:  $\frac{x^2}{1+y} + \frac{y^2}{1+z} + \frac{z^2}{1+x} \geq \frac{3}{2}$ .

#### Bài 8:

Cho  $x, y, z$  là ba số dương thỏa mãn  $x + y + z = 0$ . Chứng minh

$$\sqrt{2+4^x} + \sqrt{2+4^y} + \sqrt{2+4^z} \geq 3\sqrt{3}.$$

**Bài 9:**

Cho  $x, y, z$  là ba số dương và  $x + y + z \geq 3$  chứng minh

$$\frac{x}{\sqrt{y}} + \frac{y}{\sqrt{z}} + \frac{z}{\sqrt{x}} \geq 3.$$

Dùng phương pháp chiều biến thiên hàm số giải các bài toán sau:

**Bài 10:**

Cho  $0 < x < y < 1$ . Chứng minh

$$\frac{1}{y-x} \left( \ln \frac{y}{1-y} - \ln \frac{x}{1-x} \right) > 4.$$

**Bài 11:**

Cho  $x > y > 0$ . Chứng minh

$$\frac{\ln x}{x-1} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**Bài 13:**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số:

$$f(x) = \sin x \cos^2 x \text{ với } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

Đáp số:  $\frac{3\sqrt{3}}{16}$ .

**Bài 14:**

Cho  $1 \leq x \leq 2$  và  $3 \leq y \leq 4$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{x^4}{y^4} + \frac{y^4}{x^4} - \left( \frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} \right) + \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$$

Đáp số:  $\max P = \frac{4249}{16}$ ;  $\min P = \frac{1083}{54}$ .

**Bài 15:**

Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{6-x} - \sqrt{18+3x-x^2} \text{ với } -3 \leq x \leq 6$$

Đáp số:  $\max f(x) = 3$ ;  $\min f(x) = \frac{9-3\sqrt{2}}{2}$ .

**Bài 16:**

Cho  $f(x) = x^6 + 4(1-x^2)^3$  với  $-1 \leq x \leq 1$ . Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số.

Đáp số:  $\max f(x) = 4$ ;  $\min f(x) = \frac{4}{9}$ .

Dùng phương pháp bất đẳng thức Bunhiacopski giải các bài toán sau:

**Bài 17:**

Cho ba số không âm  $x, y, z$  và thỏa mãn điều kiện  $x + y + z = 1$ . Chứng minh

$$x^3 + y^3 + z^3 \geq \frac{1}{9}.$$

**Bài 18 :**

Cho  $x, y, z$  thỏa mãn  $x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) \leq \frac{4}{3}$ .

Chứng minh:  $-1 \leq x+y+z \leq 4$ .

**Bài 19 :**

Cho ba số dương  $x, y, z$  và  $xyz=1$ . Chứng minh

$$\frac{x^2}{x+y+y^3z} + \frac{y^2}{y+z+z^3x} + \frac{z^2}{z+x+x^3y} \geq 1.$$

Sử dụng lượng giác để giải các bài toán sau:

**Bài 20 :**

Cho  $x^2 + y^2 = 1, u^2 + v^2 = 1$ . Chứng minh

$$|x(u+v) + y(u-v)| \leq \sqrt{2}.$$

**Bài 21:**

Cho  $a, b, c \in \mathbb{R}$ . Chứng minh

$$\frac{|a-c|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+c^2}} \leq \frac{|a-b|}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+b^2}} + \frac{|b-c|}{\sqrt{1+b^2}\sqrt{1+c^2}}.$$

Sử dụng phương pháp miền giá trị hàm số giải các bài toán sau:

**Bài 22:**

Cho  $x, y \in \mathbb{R}$ . Chứng minh

$$-\frac{5}{14} \leq \frac{x+2y+1}{x^2+y^2+7} \leq \frac{1}{2}.$$

**Bài 23:**

Chứng minh rằng với mọi  $x \in \mathbb{R}$  ta có:

$$\frac{3}{2} \leq \frac{2x^2 + 7x + 23}{x^2 + 2x + 10} \leq \frac{5}{2}.$$

## Bài giảng số 8

# CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ PHỨC

Các bài toán về số phức là chủ đề mới xuất hiện lần đầu trong các đề thi tuyển sinh vào các trường Đại học và Cao đẳng năm 2009.

Bài giảng này giới thiệu các bài toán cơ bản nhất về số phức: Các bài toán về môđun số phức, dạng lượng giác của số phức và phương trình xét trên tập các số phức.

## § 1. CÁC PHÉP TÍNH VỀ SỐ PHỨC VÀ MÔĐUN CỦA SỐ PHỨC

### 1. Tóm tắt lý thuyết

- Các phép tính về số phức:

Cho hai số phức  $Z = a + bi$  và  $Z' = a' + b'i$ . Ta định nghĩa

$$Z + Z' = (a + a') + (b + b')i,$$

$$Z - Z' = (a - a') + (b - b')i.$$

Cho số phức  $Z = a + bi$ . Số phức  $\bar{Z} = a - bi$  gọi là số phức liên hợp với số phức trên.

- Môđun của số phức:

Cho số phức  $Z = a + bi$ , ta kí hiệu  $|Z|$  là môđun của số phức  $Z$  được xác định như sau:

$$|Z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

- Cho hai số phức  $Z = a + bi$  và  $Z' = a' + b'i$ . Ta định nghĩa

$$Z \cdot Z' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$$

- Cho số phức  $Z = a + bi \neq 0$  (tức là  $a^2 + b^2 > 0$ ). Ta định nghĩa

$$Z^{-1} = \frac{1}{a^2 + b^2} \bar{Z} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}.$$

Nếu  $Z \neq 0$  thì  $\frac{Z'}{Z} = Z' Z^{-1}$ .

### 2. Các dạng toán cơ bản

**Loại 1:** Các phép tính về số phức:

Các bài toán thường có dạng hoặc đòi hỏi tính toán trực tiếp một biểu thức về số phức, hoặc phải giải một phương trình dạng đơn giản để tìm số phức  $Z$ , mà thực chất của phép giải phương trình này chỉ đòi hỏi thực hiện các phép tính về số phức.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2009)

Tìm phần thực và phần ảo của số phức  $Z$ , nếu như ta có

$$(1 + i)^2 (2 - i)Z = 8 + i + (1 + 2i)Z.$$

**Giải**

Ta có  $(1+i)^2(2-i)Z = 8+i + (1+2i)Z$

$$\Leftrightarrow Z[(1+i)^2(2-i) - (1+2i)] = 8+i \Leftrightarrow Z[2i(2-i) - 1 - 2i] = 8+i$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{8+i}{2i+1} = \frac{(8+i)(1-2i)}{5} = 2-3i.$$

Vậy phần thực của  $Z$  là 2 và phần ảo là  $-3$ .

**Thí dụ 2:**

Xét các điểm  $A, B, C$  trong mặt phẳng phức theo thứ tự biểu diễn các số

$$\frac{4i}{i-1}; (1-i)(1+2i); \frac{2+6i}{3-i}.$$

1) Chứng minh  $ABC$  là tam giác vuông cân.

2) Tìm số phức biểu diễn bởi điểm  $D$ , sao cho  $ABCD$  là hình vuông.

**Giải**

$$1) \text{ Ta có } \frac{4i}{i-1} = \frac{4i(i+1)}{-2} = 2-2i. \text{ Vậy } A = (2; -2).$$

$$(1-i)(1+2i) = 3+i \Rightarrow B = (3; 1).$$

$$\frac{2+6i}{3-i} = \frac{(2+6i)(3+i)}{10} = 2i \Rightarrow C = (0; 2).$$

Từ đó suy ra  $BC^2 = 10$ ;

$BA^2 = 10$ ;  $CA^2 = 20$ , nên có

$$\begin{cases} BA = BC \\ AC^2 = AB^2 + BC^2 \end{cases}$$

Vậy  $ABC$  là tam giác vuông cân đỉnh  $B$ .

2) Gọi  $D$  là đỉnh thứ tư của hình vuông  $ABCD$ . Ta có

$$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow (-1; -3) = (x_D; y_D - 2)$$

$$\Leftrightarrow x_D = -1; y_D = -1$$

$$\Leftrightarrow D = (-1; -1)$$

Vậy số phức  $Z = -1-i$  được biểu diễn bởi điểm  $D$ .

**Thí dụ 3:**

Giải các phương trình sau:

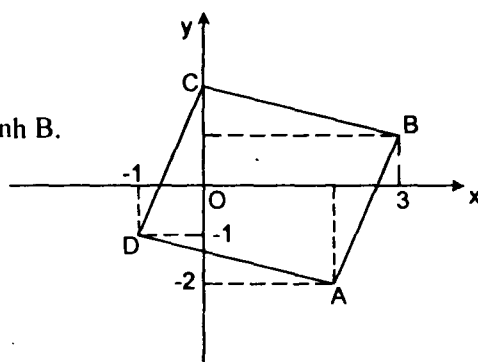
$$1) (2-i)\bar{Z} - 4 = 0;$$

$$2) \frac{2+i}{1-i}Z = \frac{-1+3i}{2+i}.$$

**Giải**

$$1) \text{ Ta có } (2-i)\bar{Z} - 4 = 0 \Leftrightarrow \bar{Z} = \frac{4}{2-i} = \frac{4(2+i)}{5}$$

$$\Leftrightarrow \bar{Z} = \frac{8}{5} + \frac{4}{5}i.$$





$$\Leftrightarrow Z = \frac{8}{5} - \frac{4}{5}i.$$

$$2) \text{ Ta có } \frac{2+i}{1-i} Z = \frac{-1+3i}{2+i} \Leftrightarrow Z = \left( \frac{-1+3i}{2+i} \right) : \left( \frac{2+i}{1-i} \right)$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(2+i)^2} = \frac{2+4i}{3+4i}$$

$$\Leftrightarrow Z = \frac{(2+4i)(3-4i)}{2} = \frac{22}{25} + \frac{4}{25}i.$$

**Nhận xét:**

Thực chất đây là các bài toán thực hiện các phép tính trên số phức.

**Thí dụ 4:**

Giải các phương trình sau:

$$1) Z + 2\bar{Z} = 2 - 4i,$$

$$2) Z^2 + \bar{Z} = 0.$$

**Giải**

$$1) \text{ Xét phương trình } Z + 2\bar{Z} = 2 - 4i \quad (1)$$

$$\text{Đặt } Z = x + yi \Rightarrow \bar{Z} = x - yi. \text{ Khi đó}$$

$$(1) \Leftrightarrow (x + yi) + (2x - 2yi) = 2 - 4i$$

$$\Leftrightarrow 3x - yi = 2 - 4i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = 4. \end{cases}$$

$$\text{Vậy } Z = \frac{2}{3} + 4i.$$

$$2) \text{ Xét phương trình } Z^2 + \bar{Z} = 0 \quad (1)$$

$$\text{Đặt } Z = x + yi \Rightarrow \bar{Z} = x - yi. \text{ Từ đó}$$

$$(1) \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 - y^2 + x) + (2xy - y)i = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y(2x - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} - y^2 = 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ x = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy (1) có các nghiệm sau :  $Z_1 = 0$ ;  $Z_2 = -1$  ;

$$Z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad Z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

**Nhận xét:** Ta đã sử dụng định nghĩa về sự bằng nhau của hai số phức

$$a + bi = a' + b'i \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}.$$

**Thí dụ 5:**

Giải phương trình:  $\left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^4 = 1.$

**Giải**

Xét phương trình  $\left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^4 = 1. \quad (1)$

Ta có (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^2 = 1 \\ \left(\frac{Z+i}{Z-i}\right)^2 = -1. \end{cases} \quad (2) \quad (3)$

Dễ thấy (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Z+i}{Z-i} = 1 \\ \frac{Z+i}{Z-i} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z+i = Z-i \\ Z+i = -Z+i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = -i \\ Z = 0 \end{cases} \quad (\text{loại})$

Tương tự (3)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{Z+i}{Z-i} = i \\ \frac{Z+i}{Z-i} = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z+i = iZ+1 \\ Z+i = -iZ-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \frac{1-i}{1+i} = 1 \\ Z = \frac{-1-i}{1+i} = -1. \end{cases}$

Vậy (1) có 3 nghiệm  $Z_1 = 0, Z_2 = 1, Z_3 = -1$

**Loại 2 :** Các bài toán về môđun của số phức:

Các bài toán thuộc dạng này có các dạng cơ bản sau :

- Tính các biểu thức có chứa môđun của số phức
- Tìm tập hợp điểm các số phức nếu như chúng thỏa mãn một điều kiện nào đó về môđun.

- Giải các phương trình có liên quan đến môđun số phức.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)

Cho  $Z_1, Z_2$  là nghiệm của phương trình  $Z^2 + 2Z + 10 = 0$ . Tính đại lượng  $A = |Z_1|^2 + |Z_2|^2$ .

**Giải**

Xét phương trình  $Z^2 + 2Z + 10 = 0 \quad (1),$

ta có:  $\Delta' = 1 - 10 = -9 = 9i^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta'} = 3i.$

Vậy (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = -1 + 3i \\ Z_2 = -1 - 3i. \end{cases}$

Ta có:  $|Z_1| = |Z_2| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$ . Vậy  $A = Z_1^2 + Z_2^2 = 20$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Cho số phức  $Z$  thỏa mãn:

$$|Z - (2 + i)| = \sqrt{10} \text{ và } Z\bar{Z} = 25. \text{ Hãy tìm } Z.$$

**Giải**

$$\text{Đặt } Z = x + yi \Rightarrow \bar{Z} = x - yi \Rightarrow Z\bar{Z} = (x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2.$$

$$\text{Ta có } |Z - (2 + i)| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 1)^2}.$$

Từ đó theo bài ra ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow P(B_2) = C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y = 10 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3; y = 4 \\ x = 5; y = 0. \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} Z = 3 + 4i \\ Z = 5 \end{cases}$  là hai số phức cần phải tìm.

**Thí dụ 3 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $Z$  biết rằng  $|Z - (3 - 4i)| = 2$

**Giải**

Giả sử  $Z = x + yi$ , khi đó:  $|Z - (3 - 4i)| = 2$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow |(x - 3) + (y + 4)i| = 2 &\Leftrightarrow \frac{1}{9} \left[ \left| \frac{(1 + 3t)^5}{2} \right|_0^1 - \frac{(1 + 3t)^3}{2} \right]_0^1 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 4)^2 = 4. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra các điểm  $M(x; y)$  biểu diễn số phức  $Z = x + yi$  nằm trên đường tròn tâm  $I(3; -4)$  bán kính  $R = 2$ .

**Chú ý:**

Ta có thể giải bài toán trên như sau:

Gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $Z$ , còn  $I(3; -4)$  là điểm biểu diễn số phức  $3 - 4i$ .

Khi đó ta có:

$$|Z - (3 - 4i)| = 2 \Leftrightarrow MI = 2 \quad (2)$$

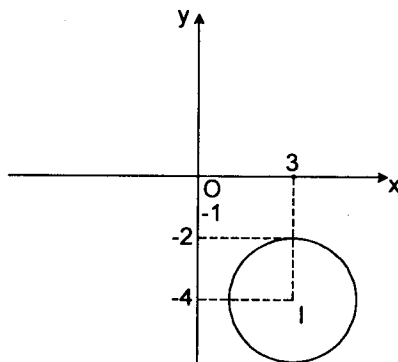
Từ (2) suy ra  $M$  nằm trên đường tròn tâm  $I$  bán kính 2. Ta thu lại kết quả trên.

**Thí dụ 4**

Tìm số phức  $Z$  nếu  $Z^2 + |Z| = 0$ .

**Giải**

$$\text{Đặt } Z = x + yi \Rightarrow |Z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ khi đó } Z^2 + |Z| = 0$$



$$\Leftrightarrow (x + yi)^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 \Leftrightarrow (x^2 + y^2) + \sqrt{x^2 + y^2} + 2xyi = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + \sqrt{x^2 + y^2} = 0 & (1) \\ 2xy = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (3) \\ -y^2 + |y| = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 & (5) \\ x^2 + |x| = 0 & (6) \end{cases}$$

Giải hệ (3) (4) và (5) (6) (dễ dàng) ta đi đến hệ (1) (2) có nghiệm

$$\begin{cases} x = 0; y = 0 \\ x = 0; y = -1 \\ x = 0; y = 1 \end{cases}$$

Vậy ba số phức cần tìm  $Z = 0$ ;  $Z = i$ ; và  $Z = -i$ .

#### Thí dụ 5

Tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $Z$  nếu như thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

$$1/ |Z + 2| = |i - Z|$$

$$2/ |Z - 4i| + |Z + 4i| = 10.$$

#### Giải

$$1/ \text{Ta có } |Z + 2| = |i - Z| \Leftrightarrow |Z - (-2)| = |Z - i| \quad (1)$$

Gọi  $M$  là điểm biểu diễn số phức  $Z$ ,  $A$  là điểm biểu diễn số  $-2$  (tức là  $A = (-2; 0)$ ,  $B$  là điểm biểu diễn số  $i$  (tức là  $B = (0; 1)$ ).

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow MA = MB \quad (2).$$

Từ (2) suy ra tập hợp những điểm  $M$  biểu diễn số phức  $Z$  nằm trên đường trung trực của đoạn  $AB$ .

Chú ý: 1/ Ở đây ta đã sử dụng nhận xét sau: Nếu  $M_1 M_2$  tương ứng là hai điểm biểu diễn các số phức  $Z_1$  và  $Z_2$  thì:

$$|Z_1 - Z_2| = M_1 M_2$$

+ Ta có thể giải cách khác như sau: Đặt  $Z = x + yi$ .

$$\text{Ta có: } |Z + 2| = |i - z|$$

$$\Leftrightarrow |(x + 2) + yi| = |x + (y - 1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(x + 2)^2 + y^2} = \sqrt{x^2 + (y - 1)^2}$$

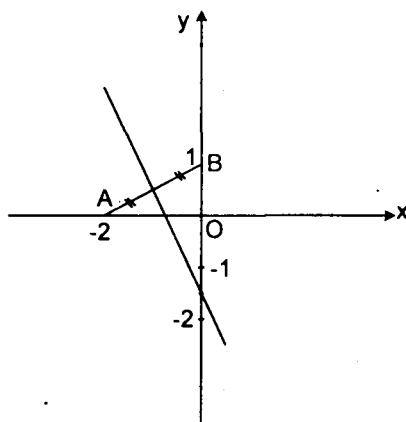
$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 4x + 4 = x^2 + y^2 - 2y + 1$$

$$\Leftrightarrow 4x + 2y + 3 = 0 \quad (3)$$

Vậy tập hợp các điểm  $M$  là đường thẳng (3).

Các bạn có thể thấy (3) chính là trung trực của  $AB$ .

$$2/ \text{Giả sử ta có: } |Z - 4i| + |Z + 4i| = 10.$$



Gọi M là điểm biểu diễn số phức Z, A = (0, -4) và B = (0; 4) tương ứng là các số phức -4i và 4i. Khi đó:

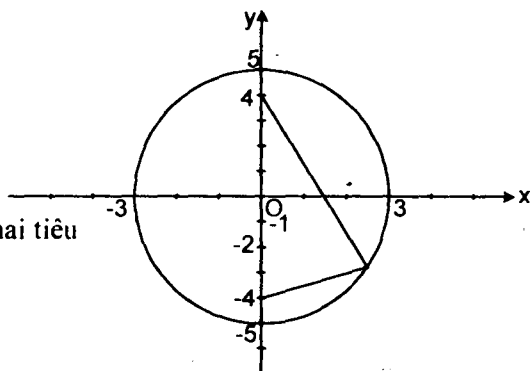
$$|Z - 4i| + |Z + 4i| = 10$$

$$\Leftrightarrow MA + MB = 10 (*)$$

Từ (\*) suy ra M nằm trên elip có hai tiêu điểm là A; B và trục lớn bằng 10.

Phương trình của elip có dạng:

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1.$$



#### Thí dụ 6:

Tìm tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức Z thỏa mãn điều kiện sau:

$$2|Z - i| = |Z - \bar{Z} + 2i|$$

#### Giải

Đặt  $Z = x + yi$ , thì

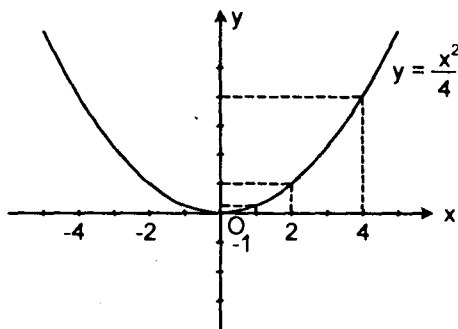
$$2|Z - i| = |Z - \bar{Z} + 2i|$$

$$\Leftrightarrow 2|x + (y - 1)i| = |2(y + 1)i|$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(y + 1)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = y^2 + 2y + 1 \Leftrightarrow y = \frac{x^2}{4}$$

Vậy tập hợp những điểm M là parabol  $y = \frac{x^2}{4}$



#### Nhận xét:

Với các thí dụ 3, 4, 5 nên sử dụng biểu diễn hình học của số phức.

Còn trong thí dụ 6, thì sử dụng bằng phép tính về môđun.

#### Thí dụ 7:

Tìm số phức thỏa mãn hệ:

$$\begin{cases} \left| \frac{Z - 1}{Z - i} \right| = 1 \\ \left| \frac{Z - 3i}{Z + i} \right| = 1. \end{cases}$$

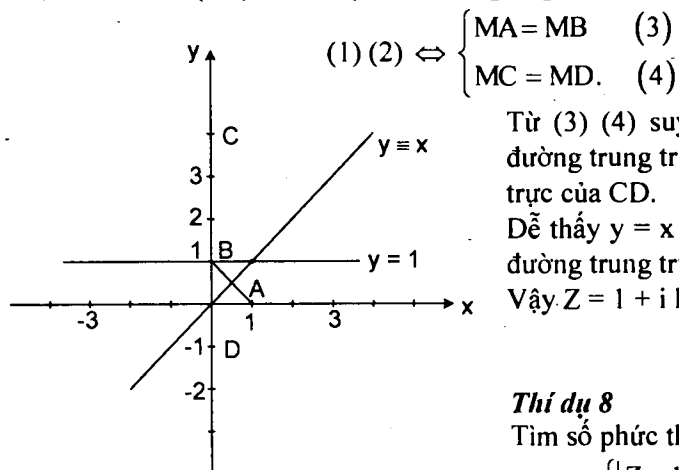
#### Giải

Với hai số Z, Z' (Z' ≠ 0) thì  $\left| \frac{Z}{Z'} \right| = \frac{|Z|}{|Z'|}$ , do đó hệ đã cho tương ứng với:

$$\begin{cases} |Z - 1| = |Z - i| & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} |Z - 3i| = |Z - (-i)| & (2) \end{cases}$$

Gọi M là điểm biểu diễn số phức Z, A=(1;0), B=(0;1) tương ứng biểu diễn các số 1 và i; C(0;3) và D=(0;-1) tương ứng biểu diễn các số phức 3i và -i thì:



Từ (3) (4) suy ra M là giao điểm của đường trung trực của AB và đường trung trực của CD.

Dễ thấy  $y = x$  và  $y = 1$  tương ứng là hai đường trung trực của AB và CD.

Vậy  $Z = 1 + i$  là số phức cần tìm.

### Thí dụ 8

Tìm số phức thỏa mãn hệ

$$\begin{cases} \left| \frac{Z-12}{Z-8i} \right| = \frac{5}{3} \\ \left| \frac{Z-4}{Z+8} \right| = 1. \end{cases}$$

### Giải

Đặt  $Z = x + yi$  khi đó:

$$\left| \frac{Z-4}{Z+8} \right| = 1 \Leftrightarrow |x-4+yi| = |x+8+yi|$$

$$\Leftrightarrow (x-4)^2 + y^2 = (x+8)^2 + y^2$$

$$\Leftrightarrow x = -6 \quad (1)$$

$$\left| \frac{Z-12}{Z-8i} \right| = \frac{5}{3} \Leftrightarrow |x-12+yi| = \frac{5}{3} |6+(y-8)i|$$

$$\Leftrightarrow |-6+yi| = \frac{5}{3} |6+(y-8)i| \quad (\text{do } x = -6)$$

$$\Leftrightarrow 36 + y^2 = \frac{25}{9} [36 + (y-8)^2]$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 25y + 136 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 17 \\ y = 8. \end{cases}$$

Vậy có hai số phức cần tìm:  $Z = -6 + 8i$  và  $Z = -6 + 17i$ .

**Nhận xét:**

Hai thí dụ 7 và 8 cùng loại nhưng ta dùng hai phương pháp giải thích hợp khác nhau (phương pháp biểu diễn hình học của số phức với thí dụ 7, phương pháp tính toán môđun với thí dụ 8).

## §2. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

### 1. Tóm tắt lý thuyết

Nếu  $\varphi$  là một argumen của số phức  $z$  thì mọi argumen của nó có dạng

$$z = \varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Nếu  $r > 0$  là môđun của số phức  $z$ , còn  $\varphi$  là một argumen của nó, thì

$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$  là dạng lượng giác của số phức  $z$ .

Nếu  $z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), r_1 > 0$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2), r_2 > 0,$$

thì  $z_1 z_2 = r_1 r_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$ ;

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Công thức Moivre: Nếu  $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), r > 0$

$$\text{thì } z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$$

### 2. Các dạng bài tập cơ bản

**Loại 1:** Các bài toán xác định argumen của số phức

Nhìn chung các loại bài tập này có cách giải chung như sau: Giả sử phải tìm một argumen của số phức  $z$ . Ta cần biến đổi sao cho  $z$  có dạng:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad \text{với } r > 0.$$

Khi đó  $\varphi$  là một argumen của  $z$ .

**Thí dụ 1**

Cho số phức  $Z = 1 - \sin \varphi + i \cos \varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{2})$

Tìm một argumen của số phức  $Z$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } Z &= 1 - \sin \varphi + i \cos \varphi = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \\ &= 2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + 2i \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[ \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \right] \\ &= 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Do } 0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right) > 0.$$

Vậy từ (1) suy ra  $\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$  là một argumen của  $Z$ .

**Thí dụ 2**

Cho số phức  $Z$  có môđun bằng 1 và  $\varphi$  là một argumen của nó.

1/ Tìm một argumen của số phức  $\frac{\bar{Z}}{Z}$ .

2/ Tìm một argumen của số phức  $Z + \bar{Z}$  nếu  $\cos \varphi \neq 0$ .

**Giải**

Từ giả thiết suy ra:  $Z = \cos \varphi + i \sin \varphi$ .

1/ Ta có  $\frac{\bar{Z}}{Z} = \frac{\cos \varphi - i \sin \varphi}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \frac{\cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi)}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = \cos(-2\varphi) + i \sin(-2\varphi)$ .

Vậy  $-2\varphi$  là một argumen của số phức  $Z_1 = \frac{\bar{Z}}{Z}$ .

2/ Ta có  $Z + \bar{Z} = \cos \varphi + i \sin \varphi + \cos \varphi - i \sin \varphi = 2 \cos \varphi$ .

+ Nếu  $\varphi > 0$ , khi đó  $Z + \bar{Z} = 2 \cos \varphi - 1 = 2 \cos \varphi (\cos 0 + i \sin 0)$

Vậy lúc này 0 là một argumen của số phức  $Z_2 = Z + \bar{Z}$ .

+ Nếu  $\varphi < 0$ , khi đó  $Z + \bar{Z} = (-2 \cos \varphi)(-1) = (-2 \cos \varphi)(\cos \pi + i \sin \pi)$

Do  $-2 \cos \varphi > 0$  nên  $Z_2 = Z + \bar{Z}$  có một argumen là  $\pi$ .

**Loại 2:** Các bài toán xác định số phức  $Z$  dựa vào điều kiện về argumen:

**Thí dụ 1**

Xét các số phức  $Z$  thỏa mãn điều kiện

$$|2Z - \sqrt{2} - i\sqrt{2}| = 1 \quad (1)$$

1/ Tìm tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn số phức  $Z$  thỏa mãn điều kiện (1)

2/ Trong các số phức đã cho (tức là thỏa mãn điều kiện (1)), tìm số phức có argumen dương và nhỏ nhất.

**Giải**

1/ Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \left| Z - \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right| = \frac{1}{2} \quad (2)$$

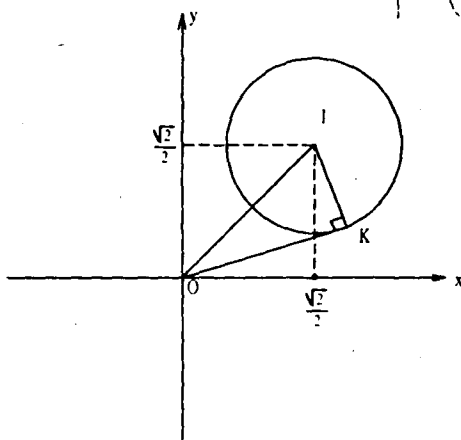
Gọi  $I \left( \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$  là điểm biểu diễn số

phức  $\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ . Khi đó

$$(2) \Leftrightarrow MI = \frac{1}{2} \quad (3)$$

Từ (3) suy ra tập hợp các điểm biểu diễn số phức  $Z$  thỏa mãn (1) là đường tròn tâm

$I$  bán kính  $\frac{1}{2}$ .





2/ Kẻ tiếp tuyến OK với đường tròn ở câu 1. Dễ thấy  $OI = 1$ , nên

$$\sin \widehat{IOK} = \frac{IK}{IO} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{IOK} = \frac{\pi}{6}.$$

Ta có:  $\widehat{Kox} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12}.$

Vậy số phức  $Z = OK \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$   
 $= \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right),$

là số phức thỏa mãn (1) và có argumen dương và nhỏ nhất.

**Thí dụ 2:**

Tìm số phức của  $Z$  sao cho  $\left| \frac{Z-i}{Z+3i} \right| = 1$  và  $Z+1$  có một argumen bằng  $-\frac{\pi}{6}$ .

**Giải**

Từ  $\left| \frac{Z-i}{Z+3i} \right| = 1 \Leftrightarrow |Z-i| = |Z+3i|$   
 $\Leftrightarrow |x + (y-1)i| = |x + (y+3)i|, \quad (\text{ở đây } Z = x + yi)$   
 $\Leftrightarrow x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+3)^2$   
 $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathbb{R} \\ y = -1 \end{cases}$

Vậy  $Z = x - i$

Ta có:  $Z + 1 = (x + 1) - i$  (1). Vì  $Z + 1$  có một argumen bằng  $-\frac{\pi}{6}$  nên  $Z+1$  có dạng:

$$Z + 1 = r \left[ \cos \left( -\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{6} \right) \right] \text{ với } r > 0 = \frac{r}{2} (\sqrt{3} - i) \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra  $\begin{cases} x+1 = \frac{r\sqrt{3}}{2} \\ -1 = -\frac{r}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = 2 \\ x = 2\sqrt{3} - 1. \end{cases}$

Vậy  $Z = 2\sqrt{3} - 1 - i$  là số phức cần tìm.

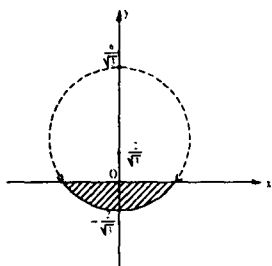
**Thí dụ 3:**

Xác định tập hợp các điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $Z$  sao cho số phức  $\frac{Z-2}{Z+2}$  có một argumen bằng  $\frac{\pi}{3}$ .

**Giải**

Giả sử  $Z = x + yi$ , thì:

$$\frac{Z-2}{Z+2} = \frac{(x-2)+yi}{(x+2)+yi} = \frac{[(x-2)+yi][(x+2)-yi]}{(x-2)^2+y^2} = \frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2} + \frac{4y}{(x-2)^2+y^2}i.$$



Do  $\frac{Z-2}{Z+2}$  có một argumen bằng  $\frac{\pi}{3}$ , nên ta có:

$$= \frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2} + \frac{4y}{(x-2)^2+y^2}i = \tau \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right), \tau > 0.$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{cases} \frac{x^2+y^2-4}{(x-2)^2+y^2} = \frac{\tau}{2} & (1) \\ \frac{4y}{(x-2)^2+y^2} = \frac{\tau\sqrt{3}}{2} & (2) \end{cases}$$

Từ (1) (2) dẫn đến  $y > 0$  (do  $\tau > 0$ ) và

$$\frac{4y}{(x-2)^2+y^2} = \sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 + \left(y - \frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2 \quad (3)$$

Kết hợp (3) và  $y > 0$  suy ra tập hợp các điểm M cần tìm là phần đường tròn tâm tại điểm  $I\left(0; \frac{2}{\sqrt{3}}\right)$  bán kính  $\frac{4}{\sqrt{3}}$  nằm phía trên trục thực (trục Ox)

**Loại 3:** Dạng lượng giác của số phức:

Khi giải các bài tập cần lưu ý đến các điều sau đây:

- Dạng lượng giác của số phức có dạng:  $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ , với  $r > 0$ .
- Thuộc các công thức nhân, chia và công thức Moivre đối với số phức dưới dạng lượng giác.

**Thí dụ 1:**

Tìm phần thực và phần ảo của mỗi số phức sau:

$$1/ Z_1 = \frac{(1+i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^9};$$

$$2/ Z_2 = \left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right)^5 i^3 (1+\sqrt{3}i)^7.$$

**Giải**

1/ Ta có:

$$1+i = \sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i \right) = \sqrt{2} \left( \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right),$$

$$\sqrt{3}+i = 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left( \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} \right).$$

Theo công thức Moivre ta có:

$$Z_1 = \frac{(1+i)^{12}}{(\sqrt{3}+i)^9} = \frac{(\sqrt{2})^{12} (\cos 3\pi + i \sin 3\pi)}{2^9 \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right)} = \frac{1}{2^3} \left( \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \right).$$

Vậy phần thực của  $Z_1$  là 0, phần ảo của nó là  $-\frac{1}{8}$ .

2/ Ta có:  $\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right);$

$$i^3 - i = \cos \left( -\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{2} \right);$$

$$1 + \sqrt{3}i = 2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 2 \left( \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Từ đó theo công thức Moivre ta có:

$$Z_2 = \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{3} \right) \right] \left[ \cos \left( -\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left( -\frac{3\pi}{2} \right) \right] \cdot 2^7 \left[ \cos \frac{7\pi}{3} + i \sin \frac{7\pi}{3} \right].$$

Theo quy tắc nhân số phức dưới dạng lượng giác ta có:

$$Z_2 = 2^7 \left[ \cos \left( -\frac{5\pi}{6} \right) + i \sin \left( -\frac{5\pi}{6} \right) \right]$$

Vậy phần thực của  $Z_2$  là  $-2^6 \cdot \sqrt{3} = -64\sqrt{3}$ , phần ảo của  $Z_2$  là  $-64$ .

**Thí dụ 2**

Biết rằng số phức  $Z$  thỏa mãn  $Z + \frac{1}{Z} = 1$ . Hãy tính  $Z^{2010} + \frac{1}{Z^{2010}}$ .

**Giải**

Từ

$$Z + \frac{1}{Z} = 1 \Leftrightarrow Z^2 - Z + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \\ Z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right). \end{cases}$$

a/ Nếu  $Z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow Z^{2010} = \cos \frac{2010\pi}{3} + i \sin \frac{2010\pi}{3}$ . (1)

Ta có:  $\frac{1}{Z} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3} = \cos \left( -\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{\pi}{3} \right)$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z^{2010}} = \cos \left( -\frac{2010\pi}{3} \right) + i \sin \left( -\frac{2010\pi}{3} \right). (2)$$

Từ (1) (2) suy ra:  $Z^{2010} + \frac{1}{Z^{2010}} = 2 \cos(670\pi) = 2$ .

b/ Nếu  $Z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \Rightarrow \frac{1}{Z} = \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} \Rightarrow Z^{2010} + \frac{1}{Z^{2010}} = 2.$

Tóm lại ta luôn có :  $Z^{2010} + \frac{1}{Z^{2010}} = 2.$

### Thí dụ 3

Cho số phức  $Z = \left(\frac{7+i}{4-3i}\right)^m$ . Tìm m nguyên dương để Z là số thực; là số ảo.

#### Giải

Ta có:  $\frac{7+i}{4-3i} = \frac{(7+i)(4+3i)}{25} = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)$

Theo công thức Moivre ta có:  $Z = 2^{\frac{m}{2}}\left(\cos\frac{m\pi}{4} + i \sin\frac{m\pi}{4}\right) \quad (1)$

Từ (1) suy ra:

$$Z \text{ là số thực} \Leftrightarrow \sin\frac{m\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \frac{m}{4} = k \Leftrightarrow m = 4k; \text{ với } k = 1, 2, \dots$$

$$Z \text{ là số ảo} \Leftrightarrow \cos\frac{m\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow m = 4k + 2, \text{ với } k = 0, 1, 2, \dots$$

## §3. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TRÊN TẬP SỐ PHỨC

Trong mục này sẽ xét việc giải phương trình trong đó ẩn số của mỗi phương trình là một số phức Z. Để giải được phương trình trên tập số phức cần nắm vững các kiến thức sau:

1/ Biết cách khai căn bậc hai của một số phức  $Z = a+bi$ .

2/ Biết cách giải phương trình bậc hai  $ax^2+bx+c=0$ , trong đó các hệ số a, b, c nói chung là các số phức.

3/ Thành thạo cách giải phương trình và hệ phương trình hữu tỉ.

Cần nhớ rằng việc giải phương trình trên tập số phức về cơ bản giống như giải phương trình trên tập số thực, chỉ có cái khác là phép tính ở đây là các phép tính cộng, trừ, nhân, chia và khai căn số phức.

#### Các dạng bài tập cơ bản

**Loại 1:** Giải phương trình bậc hai trên tập các số phức:

Phương pháp giải: Sử dụng công thức nghiệm như công thức nghiệm đối với phương trình bậc hai trên tập các số thực.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2009)

Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$\frac{4Z-3-7i}{Z-i} = Z-2i.$$

**Giải**

Với điều kiện  $Z \neq i$ , phương trình đã cho tương đương với phương trình sau:

$$4Z - 3 - 7i = (Z - i)(Z - 2i) \\ \Leftrightarrow Z^2 - (3i + 4)Z + 1 + 7i = 0 \quad (1)$$

Ta có  $\Delta = (3i + 4)^2 - 4(1 + 7i) = 3 - 4i$

Giả sử  $Z = x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) là căn bậc hai của  $\Delta$  khi đó ta có hệ sau để xác định  $x, y$ :

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy - 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2; y = -1 \\ x = -2; y = 1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = \frac{3i + 4 + (2 - i)}{2} = 3 + i \\ Z_2 = \frac{3i + 4 - (2 - i)}{2} = 1 + 2i. \end{cases}$$

Vậy  $Z_1, Z_2$  là nghiệm của hệ phương trình đã cho.

**Thí dụ 2**

Giải phương trình trên tập số phức:

$$(1 - i)^2 - 2(1 + 2i)Z - 4 = 0.$$

**Giải**

Do  $1 - i \neq 0$  nên ta có:

$$(1 - i)Z^2 - 2(1 + 2i)Z - 4 = 0 \Leftrightarrow Z^2 - 2\frac{1 + 2i}{1 - i}Z - (1 + i) = 0$$

$$\Leftrightarrow Z^2 - (1 + 2i)(1 + i)Z - 2(1 + i) = 0 \Leftrightarrow Z^2 + (1 - 3i)Z - 2(1 + i) = 0. \quad (1)$$

Ta có:  $\Delta = (1 - 3i)^2 + 8(1 + i) = 2i$

Gọi  $x + yi$  ( $x, y \in \mathbb{R}$ ) là căn bậc hai của  $2i$  ta có

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = 1 \\ x = -1; y = -1. \end{cases}$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = \frac{3i - 1 + 1 + i}{2} = 2i \\ Z_2 = \frac{3i - 1 - 1 - i}{2} = -1 + i. \end{cases}$$

**Thí dụ 3:**

Giải phương trình sau trên tập số phức:

$$(2 - 3i)Z^2 + (4i - 3)Z + 1 - i = 0.$$

**Giải**

Ta có:  $(2 - 3i) + (4i - 3) + 1 - i = 0$ .

Vậy phương trình đã cho có nghiệm  $Z_1 = 1$  và nghiệm

$$Z_2 = \frac{c}{a} = \frac{1 - i}{2 - 3i} = \frac{1}{13}(1 - i)(2 - 3i) = -\frac{1 + 5i}{13}.$$

**Nhận xét:**

- Các quy tắc nhân nghiệm và định lý Viet vẫn đúng trong trường hợp xét phương trình bậc hai trên tập số phức.

- Xét thí dụ sau: Xét phương trình bậc hai ở thí dụ 2

$$Z^2 + (1 - 3i)Z - 2(1 + i) = 0 (*)$$

Ta có:

$$2i + (-1 + i) = 3i - 1$$

$$2i(-1 + i) = -2(1 + i).$$

Vậy theo định lý Vi-t suy ra: (\*) có hai nghiệm  $Z_1 = 2i$  và  $Z_2 = -1 + i$ .

Ta có cách khác giải thí dụ 2.

**Loại 2:** Phương trình quy về bậc hai và hệ phương trình:

**Thí dụ 1:** Giải phương trình với  $Z$  là số phức

$$(Z^2 + Z)^2 + 4(Z^2 + Z) - 12 = 0.$$

**Giải**

$$\text{Đặt } t = Z^2 + Z, \text{ ta có: } t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -6 \\ t = 2 \end{cases}$$

Vậy phương trình đã cho tương đương với:

$$\begin{cases} Z^2 + Z + 6 = 0 \\ Z^2 + Z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = \frac{-1 + \sqrt{23}i}{2}; Z_2 = \frac{-1 - \sqrt{23}i}{2} \\ Z_3 = 1; Z_4 = -2. \end{cases}$$

Phương trình đã cho có bốn nghiệm kể trên.

**Thí dụ 2 :** Giải phương trình với  $Z$  là số phức:  $Z^4 - Z^3 + \frac{Z^2}{2} + Z + 1 = 0$ .

**Giải**

Vì  $Z = 0$  không phải là nghiệm của phương trình đã cho, nên ta có:

$$Z^2 - Z + \frac{1}{2} + \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z^2} = 0 \Leftrightarrow \left(Z - \frac{1}{Z}\right)^2 - \left(Z - \frac{1}{Z}\right) + \frac{5}{2} = 0. (1)$$

Đặt  $t = \left(Z - \frac{1}{Z}\right)$ , thì (1) có dạng:

$$t^2 - t + \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 2t + 5 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1+3i}{2} \\ t = \frac{1-3i}{2} \end{cases}$$

+ Nếu  $t = \frac{1+3i}{2}$ , ta có:  $Z - \frac{1}{Z} = \frac{1+3i}{2} \Leftrightarrow 2Z^2 - (1+3i)Z - 2 = 0$  (2)

Vì  $\Delta = 8+6i$ , có căn bậc hai là  $3+i$  và  $-3-i$ , nên

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} Z_1 = \frac{1+3i+3+i}{4} = 1+i \\ Z_2 = \frac{1+3i-3-i}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i. \end{cases}$$

+ Nếu  $t = \frac{1-3i}{2}$ , ta có  $2Z^2 - (1-3i)Z - 2 = 0$

Giải như trên ta có:  $Z_3 = 1 - i$ ;  $Z_4 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$ .

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm kể trên

**Thí dụ 3** : Giải hệ phương trình hai ẩn  $Z_1, Z_2$  sau trên tập các số phức :

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 4 + i \\ Z_1^2 + Z_2^2 = 5 - 2i. \end{cases}$$

**Giải**

Ta có:

$$Z_1 Z_2 = \frac{(Z_1 + Z_2)^2 - (Z_1^2 + Z_2^2)}{2} = \frac{(4+i)^2 - (5-2i)}{2} = 5 + 5i.$$

Vậy đưa hệ đã cho về dạng tương đương:

$$\begin{cases} Z_1 + Z_2 = 4 + i & (1) \\ Z_1 Z_2 = 5 + 5i. & (2) \end{cases}$$

Theo định lí Viet,  $Z_1$  và  $Z_2$  là các nghiệm của phương trình sau (xét trên tập số phức)

$$t^2 - (4+i)t + 5+5i = 0 \quad (3)$$

Giải như các thí dụ 1, 2 ta có:

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 3 - i \\ t_2 = 1 + 2i. \end{cases}$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm như sau:

$$\begin{cases} Z_1 = 3 - i; Z_2 = 1 + 2i \\ Z_1 = 1 + 2i; Z_2 = 3 - i. \end{cases}$$

**Thí dụ 4**

Giải hệ phương trình hai ẩn  $Z, W$  trên tập số phức:

$$\begin{cases} Z + W = 3(1+i) \\ Z^3 + W^3 = 9(-1+i). \end{cases}$$

**Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} Z^3 + W^3 &= (Z+W)^3 - 3ZW(Z+W) \Rightarrow 9(-1+i) = 27(1+i)^3 - 3ZW \cdot 3(1+i) \\ &\Rightarrow ZW(1+i) = 3(1+i)^3 - (-1+i) = -5+5i \Rightarrow ZW = 5i. \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho tương đương với hệ sau:  $\begin{cases} Z + W = 3(1+i) \\ ZW = 5i. \end{cases}$

Theo định lí Viet thì  $Z, W$  là các nghiệm của phương trình bậc hai sau (xét trên tập số phức)

$$t^2 - 3(1+i)t + 5i = 0 \quad (3).$$

$$(3) \Leftrightarrow \begin{cases} t_1 = 2 + i \\ t_2 = 1 + 2i \end{cases}$$

Vậy hệ phương trình có hai nghiệm:

$$\begin{cases} Z = 2 + i; W = 1 + 2i \\ Z = 1 + 2i; W = 2 + i. \end{cases}$$

### BÀI TẬP TỰ GIẢI

#### Bài 1:

Tìm số phức  $Z$  nếu  $(2 + 3i)Z = Z - 1$ .

Đáp số:  $Z = -\frac{1}{10} + \frac{3}{10}i$ .

#### Bài 2

Giả sử  $M$  là điểm trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức  $Z$ . Tìm tập hợp những điểm  $M$  thỏa mãn một trong những điều kiện sau:

1/  $|Z - 1 + i| = 2$ .

2/  $|2 + Z| > |Z - 2|$ .

3/  $1 \leq |Z + 1 - i| \leq 2$ .

Đáp số:

1/ Đường tròn tâm  $I(1; -1)$  bán kính  $R = 2$

2/ Tập hợp các điểm  $M(x, y)$  mà  $x > 0$

3/ Hình vành khăn tâm tại  $I(-1; 1)$  và các bán kính lớn và nhỏ lần lượt là 2 và 1.

#### Bài 3:

Xác định tập hợp các điểm  $M$  biểu diễn các số phức  $Z$  thỏa mãn một trong các điều kiện sau:

1/  $|Z + \bar{Z} + 3| = 4$

2/  $|Z^2 - (\bar{Z})^2| = 4$ .

Đáp số: 1/  $x = \frac{1}{2}$  và  $x = -\frac{7}{2}$ .

2/  $\begin{cases} xy = 1 \\ xy = -1. \end{cases}$

3/

Xác định tập hợp các điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $Z$  thỏa mãn hệ thức:

$$\left| \frac{Z}{Z - i} \right| = 3.$$

Đường tròn tâm  $I\left(0; \frac{9}{8}\right)$  bán kính  $R = \frac{3}{8}$ .



**Bài 5:**

Tìm tất cả các điểm của mặt phẳng phức biểu diễn các số phức  $Z$  sao cho:

$$\frac{Z+i}{\overline{Z+i}} \text{ là số thực.}$$

**Đáp số:** Gồm hai trục tọa độ bỏ đi điểm  $A(0;1)$ .

**Bài 6**

Cho số phức  $Z$  có môđun bằng 1 và  $\varphi$  là một argumen của nó. Hãy tìm một argumen của các số phức sau:

$$1/ -\frac{1}{2\overline{Z}}$$

$$2/ Z^2 - Z, \text{ nếu } \sin \frac{\varphi}{2} \neq 0$$

$$3/ Z^2 + \overline{Z}, \text{ nếu } \cos \frac{3\varphi}{2} \neq 0.$$

**Đáp số:**

$$1/ \pi + 4$$

$$2/ \frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}, \text{ nếu } \sin \frac{\varphi}{2} > 0;$$

$$\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}, \text{ nếu } \sin \frac{\varphi}{2} < 0.$$

$$3/ \frac{\varphi}{2}, \text{ nếu } \cos \frac{3\pi}{2} > 0;$$

$$\frac{\varphi}{2} + \pi, \text{ nếu } \cos \frac{3\pi}{2} < 0.$$

**Bài 7:**

Giải phương trình  $Z^2 - (\cos \varphi + i \sin \varphi)Z + \cos \varphi \sin \varphi = 0$ .

**Đáp số:**  $Z_1 = \cos \varphi$ ;  $Z_2 = i \sin \varphi$ .

**Bài 8:**

Giải phương trình  $(Z^2 + 3Z + 6)^2 + 2Z(Z^2 + 3Z + 6) - 3Z^2 = 0$ .

**Đáp số:**  $Z_1 = -3 + \sqrt{3}$ ;  $Z_2 = -3 - \sqrt{3}$ ;  $Z_3 = -1 + \sqrt{5}i$ ;  $Z_4 = -1 - \sqrt{5}i$ .

**Bài 9:**

Giải phương trình:

$$Z^4 - 4Z^3 + 7Z^2 - 16Z + 12 = 0$$

**Hướng dẫn:** Đưa về dạng  $(Z-1)(Z-3)(Z^2+4)=0$ .

**Đáp số:**  $Z_1 = 1$ ;  $Z_2 = 3$ ;  $Z_3 = 2i$ ;  $Z_4 = -2i$ .

**Bài 10:**

Giải hệ phương trình  $\begin{cases} Z - W = i \\ iZ - W = 1 \end{cases}$

**Đáp số:**  $Z = -1$ ,  $W = -1 - i$ .

## Bài giảng số 9

# XÁC SUẤT

Mặc dù bài toán về xác suất chưa hề có mặt trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng trong các năm từ 2002 - 2009, nhưng kể từ năm 2009 các bài toán về xác suất là một trong các chủ đề có mặt trong chương trình thi môn Toán trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng do Bộ Giáo dục và Đào tạo quy định (nó được quy định là một trong các nội dung ra thi ở câu số 7 của đề thi). Vì lẽ đó có nhiều khả năng các bài toán về xác suất sẽ có mặt trong các đề thi môn Toán vào các trường Đại học và Cao đẳng trong những mùa thi tới.

Bài giảng này đề cập đến các bài toán tìm xác suất của một biến cố ngẫu nhiên theo hai phương pháp chính:

- Tìm xác suất của một biến cố nhờ định nghĩa về xác suất.
- Tìm xác suất của một biến cố dựa vào các phép tính cơ bản của lý thuyết xác suất

## §1. TÌM XÁC SUẤT CỦA MỘT BIẾN CỐ NHỜ ĐỊNH NGHĨA VỀ XÁC SUẤT

Đây là một trong hai phương pháp để tìm xác suất của một biến cố ngẫu nhiên.

Để sử dụng được phương pháp đơn giản này ta cần tính hai đại lượng sau :

- 1/  $|\Omega|$  là số lượng các phần tử của không gian mẫu.
- 2/  $|\Omega_A|$  là số lượng các phần tử của tập hợp các khả năng thuận lợi của biến cố.

Khi đó xác suất của biến ngẫu nhiên A là:  $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$ .

Chú ý rằng việc tính hai đại lượng trên thực chất là giải hai bài toán về các phép đếm – bài toán quan trọng của lý thuyết của các bài toán tổ hợp (xem bài giảng 11).

### Thí dụ 1:

Cho một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên một lần 3 viên bi. Tính xác suất trong hai trường hợp sau:

- 1/ Lấy được 3 viên bi màu xanh.
- 2/ Lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh.

### Giải

Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các cách lấy ra 3 viên bi trong số 12 viên bi. Ta có:

$$|\Omega| = C_{12}^3 = 220.$$

1/ Gọi A là biến cố “lấy được 3 viên bi màu xanh”. Do có 5 viên bi màu xanh nên ta có:

$$|\Omega_A| = C_5^3 = 10.$$

Vậy theo định nghĩa của xác suất, ta có:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}.$$

2/ Gọi B là biến cố “lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh”

Để lấy được ít nhất 2 viên bi màu xanh ta có hai cách:

- Hoặc lấy ra cả 3 viên bi xanh. Theo câu 1 số cách lấy ra là  $C_5^3 = 10$ .

- Hoặc lấy ra 2 viên bi xanh, 1 viên bi đỏ. Theo quy tắc nhân ta có số cách lấy ra là:  $C_5^2 \cdot C_7^1 = 10 \cdot 7 = 70$ .

Theo quy tắc cộng ta có:  $|\Omega_B| = 70 + 10 = 80$ .

Theo định nghĩa của xác suất ta có:

$$P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{80}{220} = \frac{4}{11}.$$

**Thí dụ 2:**

Trong 100 vé xổ số có 1 vé trúng 100000đ, 5 vé trúng 50000đ, và 10 vé trúng 10000đ. Một người mua ngẫu nhiên ba vé.

1/ Tìm xác suất để người mua trúng thưởng 30000đ.

2/ Tìm xác suất để người mua trúng thưởng 200000đ.

**Giải**

Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các cách mua 3 vé trong 100 vé. Ta có:

$$|\Omega| = C_{100}^3.$$

1/ Gọi A là biến cố “người mua trúng thưởng 30000đ”

Để trúng thưởng 30000đ, thì cả ba vé đều trúng thưởng và mỗi vé trúng thưởng 10000đ. Do đó:

$$|\Omega_A| = C_{10}^3.$$

Theo định nghĩa của xác suất, thì:  $P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{10}^3}{C_{100}^3} = \frac{2}{2695}.$

2/ Gọi B là biến cố “người mua trúng thưởng 200000đ”

Để trúng thưởng 200000đ thì do chỉ có 1 vé trúng 100000đ nên cả 3 vé người mua đều trúng thưởng, trong đó 1 vé trúng thưởng 100000đ và 2 vé trúng mỗi vé 50000đ. Theo quy tắc nhân ta có:

$$|\Omega_B| = C_1^1 \cdot C_5^2 = 10.$$

Từ đó:  $P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{10}{C_{100}^3} = \frac{1}{156200}.$

**Thí dụ 3**

1/ Gieo đồng thời hai con xúc sắc. Tính xác suất để:

a/ Tổng số chấm xuất hiện trên hai con là 9.

b/ Số chấm xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2.

2/ Gieo đồng thời ba con xúc sắc. Tính xác suất để tổng số chấm xuất hiện trên ba con là 10.

### Giải

1/ Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các khả năng xảy ra. Ở đây có hai con xúc sắc, mỗi con có 6 khả năng xuất hiện, vậy  $|\Omega| = 6.6 = 36$ .

a/ Gọi A là biến cố “tổng các chấm xuất hiện trên 2 con là 9”. Các khả năng thuận lợi là: (3;6), (4;5), (6;3), (5;4). Vậy  $|\Omega_A| = 4$ .

Từ đó:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}.$$

b/ Gọi B là biến cố “tổng số chấm xuất hiện trên hai con hơn kém nhau 2”. Các khả năng thuận lợi là: (1;3), (2;4), (3;5), (4;6), (3;1), (4;2), (6;4). Vậy

$$|\Omega_B| = 8.$$

$$\text{Từ đó: } P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$

2/ Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các khả năng xảy ra. Lập luận như trong phần 1/ ta có:  $|\Omega| = 6.6.6 = 216$ .

Gọi C là biến cố “tổng số chấm xuất hiện trên ba con là 10”. Các khả năng thuận lợi của C chính là tổ hợp có tổng bằng 10 sau đây:

(1;3;6), (1;4;5), (2;2;6), (2;3;5), (3;3;4) và các hoán vị có thể của các tổ hợp ấy. Do vậy

$$|\Omega| = 6 + 6 + 3 + 6 + 3 = 24.$$

(Đề ý rằng (1;3;6), (1;4;5), (2;3;5) mỗi cái có 6 hoán vị nhưng (2;2;6) và (3;3;4) mỗi cái chỉ có ba hoán vị).

Từ đó suy ra:

$$P(C) = \frac{|\Omega_C|}{|\Omega|} = \frac{24}{216} = \frac{1}{9}.$$

### Nhận xét

Trong thí dụ trên, để tính  $|\Omega_A|$ ,  $|\Omega_B|$ ,  $|\Omega_C|$  ta đã sử dụng phép liệt kê các phần tử của tập hợp.

### Thí dụ 4 :

Có 9 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 10. Chọn ngẫu nhiên ra hai tấm thẻ. Tính xác suất để tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn.

### Giải

Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các cách chọn 2 tấm thẻ trong số 9 tấm thẻ. Ta có:

$$|\Omega| = C_9^2 = 36.$$

Gọi A là biến cố “tích của hai số trên hai tấm thẻ là một số chẵn”.

Có hai cách chọn thỏa mãn yêu cầu trên.

- Hoặc là cả hai tấm thẻ mang số chẵn. Vì có 4 số chẵn trong khoảng từ 1 đến 9, nên số cách chọn ở khả năng này là:

$$C_4^2 = 6.$$

- Hoặc là chọn một tấm thẻ mang số chẵn, một tấm thẻ mang số lẻ. Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$C_4^1 \cdot C_5^1 = 20.$$

Từ đó theo quy tắc cộng ta có:

$$|\Omega_A| = 6 + 20 = 26.$$

Theo định nghĩa xác suất suy ra:

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}.$$

### **Thí dụ 5**

Có 30 tấm thẻ đánh số từ 1 đến 30. Chọn ngẫu nhiên ra 10 tấm thẻ. Tìm xác suất để có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

### **Giải**

Gọi  $\Omega$  là tập hợp các cách chọn 10 tấm thẻ trong 30 tấm thẻ. Ta có

$$|\Omega| = C_{30}^{10}.$$

Trong 30 tấm thẻ có 15 tấm thẻ mang số chẵn, 15 tấm thẻ mang số lẻ, 3 tấm thẻ mang số chia hết cho 10.

Gọi A là biến cố “có 5 tấm thẻ mang số lẻ, 5 tấm thẻ mang số chẵn trong đó chỉ có đúng 1 tấm thẻ chia hết cho 10”.

Để tính A ta làm như sau: Đầu tiên chọn 5 tấm trong 15 tấm mang số lẻ, chọn 4 tấm trong 12 tấm mang số chẵn nhưng không chia hết cho 10, sau cùng chọn 1 trong 3 tấm mang số chia hết cho 10. Theo quy tắc nhân, ta có:

$$|\Omega_A| = C_{15}^5 C_{12}^4 C_3^1.$$

$$\text{Vậy: } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{C_{15}^5 \cdot C_{12}^4 \cdot C_3^1}{C_{30}^{10}} = \frac{99}{667}.$$

### **Thí dụ 6:**

Một đoàn tàu có 4 toa đỗ ở sân ga. Có 4 hành khách từ sân ga lên tàu, mỗi người độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa.

1/ Tìm xác suất để mỗi toa có đúng 1 người lên tàu.

2/ Tìm xác suất để 1 toa có 3 người, một toa có 1 người và hai toa không có người.

### **Giải**

Xét dãy số  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , trong đó  $x_i$  chỉ số toa mà người  $i$  lên tàu.

(thí dụ dãy 2, 1, 2, 3) chỉ rằng người thứ 1 lên toa số 2, người thứ hai lên toa số 1, người thứ ba lên toa số 2, người thứ tư lên toa số 3).

Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các dãy  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$  (tức là tập hợp tất cả các khả năng lên tàu của 4 hành khách).

Do mỗi  $x_i \in \{1, 2, 3, 4\}$  tức là mỗi  $x_i$  đều có 4 khả năng lựa chọn, vậy

$$|\Omega| = 4^4 = 256.$$

1/ Gọi A là biến cố “mỗi toa tàu có đúng 1 người lên tàu”. Để ý rằng một cách khách lên tàu tương ứng một – một với cách chọn dãy  $(x_1, x_2, x_3, x_4)$ , trong đó  $x_i, x_j$  đôi một khác nhau. Số dãy như vậy là  $4!$ , như vậy:

$$|\Omega_A| = 4! = 24.$$

$$\text{Từ đó: } P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{24}{256} = \frac{3}{32}.$$

2/ Gọi B là biến cố “ có 1 toa tàu có 3 người lên, 1 toa có 1 người lên, 2 toa không có người”. Để tính  $|\Omega_B|$  ta sử dụng quy tắc nhân như sau:

- Chọn 1 toa trong 4 toa để có 3 khách lên, số cách chọn:  $n_1 = C_4^1 = 4$ .

- Chọn 1 toa còn lại trong 3 toa để có 1 khách lên, số cách chọn:  $n_2 = C_3^1 = 3$ .

- Với toa có 3 khách lên chọn 3 khách trong 4 khách ngồi toa đó: Số cách chọn  $n_3 = C_4^3 = 4$ .

- Người còn lại cho vào toa có 1 khách, số cách chọn  $n_4 = 1$ .

Theo quy tắc nhân ta có:

$$|\Omega_B| = n_1 n_2 n_3 n_4 = 48.$$

$$\text{Từ đó: } P(B) = \frac{|\Omega_B|}{|\Omega|} = \frac{48}{256} = \frac{3}{16}.$$

### **Thí dụ 7:**

Một người bỏ ngẫu nhiên ba lá thư vào ba chiếc phong bì đã ghi địa chỉ. Tính xác suất để ít nhất có một lá thư bỏ đúng phong bì của nó.

### **Giải**

Xét các dãy số  $(x_1, x_2, x_3)$ , trong đó  $(x_1, x_2, x_3)$  là một hoán vị của ba số 1, 2, 3, ở đây  $x_i = i$  tức là lá thư thứ  $i$  đã bỏ đúng địa chỉ.

Gọi  $\Omega$  là tập hợp tất cả các khả năng bỏ 3 lá thư vào 3 phong bì. Ta có ngay:

$$|\Omega| = 3! = 6.$$

Gọi A là biến cố “có ít nhất một lá thư bỏ đúng phong bì”. Các khả năng thuận lợi của A là: (1,2,3); (1,3,2); (3,2,1); (2,1,3).

Vậy  $|\Omega| = 4$ .

Từ đó

$$P(A) = \frac{|\Omega_A|}{|\Omega|} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

### **Nhận xét:**

Ở đây ta đã sử dụng phương pháp liệt kê mọi phần tử của  $\Omega_A$  để tính  $|\Omega_A|$ .

## **§2. TÌM XÁC SUẤT CỦA BIẾN CỐ BẰNG CÁCH SỬ DỤNG CÁC PHÉP TÍNH XÁC SUẤT**

Để giải các bài toán bằng phương pháp sử dụng các phép tính xác suất ngoài việc dùng định nghĩa của xác suất, chúng ta còn phải sử dụng thành thạo các quy tắc cộng xác suất, nhân xác suất và xác suất của biến cố đối.

### **Thí dụ 1**

Gieo một cặp hai con xúc sắc 10 lần. Tìm xác suất để ít nhất có 1 lần có hai con đều ra mặt “ngũ”.

### **Giải**

Gọi  $A_i$  là biến cố “lần thứ  $i$  không xuất hiện hai con xúc sắc ra mặt ngũ”. Dễ thấy theo quy tắc nhân

$$P(A_i) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}; \quad i = \overline{1, 10}.$$

Vậy biến cố  $\overline{A_i}$  Lần thứ  $i$  không xuất hiện có hai con ra mặt “ngũ” có xác suất:

$$P(\overline{A_i}) = 1 - P(A_i) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}.$$

Gọi  $A$  là biến cố “Có ít nhất một lần có hai mặt ngũ thì  $\overline{A}$  là biến cố “cả 10 lần, không có lần nào có hai con ra mặt ngũ”

Ta có:  $\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot \dots \cdot \overline{A_{10}}$

Theo quy tắc nhân xác suất (để ý rằng  $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_{10}}$  là các biến cố độc lập với nhau) thì

$$P(\overline{A}) = P(\overline{A_1}) P(\overline{A_2}) \dots P(\overline{A_{10}}) = \left(\frac{35}{36}\right)^{10}.$$

Vậy theo công thức tính xác suất của biến cố đối, thì

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{10}.$$

### Thí dụ 2:

Một sọt cam rất lớn được phân loại theo cách sau: Chọn ngẫu nhiên 20 quả cam làm mẫu đại diện. Nếu mẫu không có quả cam hỏng nào thì sọt cam được xếp loại 1; nếu mẫu có 1 hoặc 2 quả cam hỏng thì sọt cam được xếp loại 2, còn lại được xếp loại 3. Giả sử tỉ lệ cam hỏng là 3%. Hãy tính xác suất để:

- 1/ Sọt cam được xếp loại 1.
- 2/ Sọt cam được xếp loại 2.
- 3/ Sọt cam được xếp loại 3.

### Giải

Tỉ lệ cam hỏng là 3%, tức là xác suất lấy ra quả cam hỏng là 0,03; còn xác suất lấy ra 1 quả cam tốt là 0,97.

1/ Giả thiết sọt cam rất lớn có nghĩa là phép lấy các quả cam ra là các biến cố độc lập.

Gọi  $A$  là biến cố “sọt cam xếp loại 1”. Theo quy tắc nhân, ta có:

$$P(A) = (0,97)^{20}.$$

2/ Gọi  $B$  là biến cố “sọt cam xếp loại 2”

Gọi  $B_1$  là biến cố “trong 20 quả cam lấy ra một quả cam hỏng”

Gọi  $B_2$  là biến cố “trong 20 quả cam lấy ra hai quả cam hỏng”.

Khi đó  $B = B_1 \cup B_2$ , trong đó  $B_1, B_2$  là hai biến cố xung khắc. Theo quy tắc cộng xác suất ta có:

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2). \quad (1)$$

Trong 20 quả cam lấy ra có 1 quả hỏng, tức là có 1 lần lấy ra quả cam hỏng và 19 lần lấy ra quả cam tốt; 20 quả cam hỏng có thể lấy ra theo  $C_{20}^1$  cách. Vậy theo quy tắc nhân ta có:

$$P(B_1) = C_{20}^1 (0,03)(0,97)^{19}. \quad (2)$$

Tương tự ta có:

$$P(B_2) = C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18}. \quad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) ta có:

$$P(B) = C_{20}^1 (0,03)(0,97)^{19} + C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18}.$$

3/ Gọi C là biến cố “sọt cam xếp loại 3”, thì C là biến cố đối của biến cố  $A \cup B$  vậy  $P(C) = 1 - P(A \cup B)$  (4)

Do A, B là hai biến cố xung khắc, nên theo quy tắc cộng, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B). \quad (5)$$

Thay (5) vào (4), ta có:

$$\begin{aligned} P(C) &= 1 - P(A) - P(B) \\ &= 1 - (0,57)^{20} - C_{20}^1 (0,03)(0,97)^{19} + C_{20}^2 (0,03)^2 (0,97)^{18} \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

Trong thí dụ trên ta đã sử dụng xen kẽ quy tắc cộng, quy tắc nhân xác suất và quy tắc tính xác suất của biến cố đối.

**Thí dụ 3:**

Một máy bay có 5 động cơ, trong đó 3 động cơ ở cánh phải và 2 động cơ ở cánh trái. Mỗi động cơ ở cánh phải có xác suất bị hỏng là 0,1. Còn mỗi động cơ ở cánh trái có xác suất bị hỏng là 0,05, các động cơ hoạt động độc lập. Tìm xác suất để máy bay thực hiện chuyến bay an toàn trong các trường hợp sau đây:

1/ Máy bay chỉ bay được nếu có ít nhất 3 động cơ làm việc.

2/ Máy bay chỉ bay được nếu trên mỗi cánh của máy bay có ít nhất một động cơ làm việc.

### **Giải**

1/ Xét trường hợp máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu như có ít nhất hai động cơ làm việc.

Gọi A là biến cố “máy bay thực hiện chuyến bay an toàn”, thì biến cố  $\bar{A}$  là máy bay bay không an toàn. Theo quy tắc biến cố đối, ta có:

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) \quad (1)$$

Máy bay không an toàn nếu:

- Hoặc là cả 5 động cơ bị hỏng. Theo quy tắc nhân xác suất để điều này xảy ra với xác suất:

$$(0,1)^3 (0,05)^2.$$

- Hoặc là chỉ có một động cơ ở cánh phải làm việc, còn lại mọi động cơ bị hỏng. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất điều này xảy ra với xác suất.

$$C_3^1 (0,05)(0,95)(0,1)^3.$$

Theo quy tắc cộng xác suất ta có:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= (0,1)^3 (0,05)^2 + C_3^1 (0,1)^2 (0,9)(0,05)^2 + C_2^1 (0,05)(0,95)(0,1)^3 \\ &= 0,00016. \end{aligned} \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:

$$P(A) = 1 - 0,00016 = 0,99984.$$



2/ Xét trường hợp máy bay thực hiện chuyến bay an toàn nếu như ở mỗi cánh ít nhất có 1 động cơ hoạt động. Gọi B là biến cố “máy bay thực hiện chuyến bay an toàn”, thì

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}). \quad (3)$$

Máy bay bay không an toàn nếu:

- Hoặc là cả ba động cơ bên phải bị hỏng. Điều này xảy ra có xác suất  $(0,1)^3$ .
- Hoặc là cả hai động cơ bên trái bị hỏng. Điều này xảy ra với xác suất  $(0,05)^2$ .

Theo quy tắc cộng ta có:  $P(\bar{B}) = (0,1)^3 + (0,05)^2 = 0,0035$ . (4)

Thay (4) vào (3) ta có  $P(B) = 1 - 0,0035 = 0,9965$ .

*Nhận xét:*

Qua thí dụ này ta thấy rõ vai trò của phương pháp tính  $P(A)$  qua  $P(\bar{A})$  (sử dụng xác suất của biến cố đối).

**Thí dụ 4:**

Một vận động viên bắn súng, bắn ba viên đạn. Xác suất để trúng cả ba viên vòng 10 là 0,0008, xác suất để 1 viên trúng vòng 8 là 0,15 và xác suất để 1 viên trúng vòng dưới 8 là 0,4. Biết rằng các lần bắn là độc lập với nhau. Tìm xác suất để vận động viên đạt ít nhất 28 điểm.

**Giải**

Gọi A là biến cố “1 viên trúng vòng 10” Khi đó từ giả thiết, ta có:

$$0,0008 = (P(A))^3 \Rightarrow P(A) = 0,2. \quad (1)$$

Gọi B là biến cố “1 viên trúng vòng 9”

C là biến cố “1 viên trúng vòng 8” và D là biến cố “1 viên trúng vòng dưới 8”. Theo giả thiết ta có:  $P(C) = 0,15$ ;  $P(D) = 0,4$ . (2).

Rõ ràng A, B, C, D là 4 biến cố đôi một xung khắc với nhau, nên ta có:

$$1 = P(A \cup B \cup C \cup D) = P(A) + P(B) + P(C) + P(D). \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3) suy ra  $P(B) = 1 - (0,2 + 0,15 + 0,4) = 0,25$ . (4).

Gọi X là biến cố “vận động viên đạt ít nhất 28 điểm”.

Để đạt ít nhất 28 điểm thì:

- Hoặc là 2 viên trúng vòng 10; 1 viên trúng vòng 8. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, điều này xảy ra với xác suất  $C_3^2 (0,2)^2 (0,15)$ .

- Hoặc là hai viên trúng vòng 9; 1 viên trúng vòng 10. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, điều này xảy ra với xác suất  $C_3^2 (0,25)^2 (0,2)$ .

- Hoặc là hai viên trúng vòng 10, 1 viên trúng vòng 9. Ta có điều này xảy ra với xác suất

$$C_3^2 (0,2)^2 (0,25).$$

- Hoặc cả ba viên trúng vòng 10 với xác suất theo giả thiết 0,008.

Theo quy tắc cộng xác suất của các biến cố xung khắc, ta có:

$$\begin{aligned} P(X) &= C_3^2 (0,2)^2 (0,15) + C_3^2 (0,25)^2 (0,2) + C_3^2 (0,2)^2 (0,25) + 0,008 \\ &= 0,018 + 0,0357 + 0,03 + 0,008 = 0,0935. \end{aligned}$$

Vậy vận động viên bắn súng đạt ít nhất 28 điểm với xác suất là 0,0935.

**Nhận xét:**

Đây là một thí dụ thuần túy sử dụng quy tắc cộng và nhân xác suất.

**Thí dụ 5:**

Trong 1 lớp học có 6 bóng đèn, mỗi bóng có xác suất bị cháy là  $\frac{1}{4}$ . Lớp học đủ ánh sáng nếu có ít nhất 4 bóng đèn sáng. Tìm xác suất để lớp học có đủ ánh sáng.

**Giải**

Gọi A, B, C tương ứng là các biến cố “lớp có 6 bóng đèn sáng”, “lớp có 5 bóng đèn sáng” và “lớp có 4 bóng đèn sáng”.

Mỗi bóng có xác suất sáng là  $\frac{3}{4}$ . Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, ta có:

$$P(A) = \left(\frac{3}{4}\right)^6; P(B) = C_6^5 \left(\frac{3}{4}\right)^5 \left(\frac{1}{4}\right)$$

$$P(C) = C_6^4 \left(\frac{3}{4}\right)^4 \left(\frac{1}{4}\right)^2.$$

Gọi X là biến cố “lớp học đủ ánh sáng”. Ta có:

$$P(X) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,8305.$$

**Thí dụ 6:**

Một bài thi trắc nghiệm gồm 12 câu hỏi, mỗi câu hỏi có 5 phương án trả lời, nhưng chỉ có 1 phương án đúng. Mỗi câu trả lời đúng được 4 điểm và mỗi câu trả lời sai bị trừ đi 1 điểm. Một học sinh kém làm bài bằng cách chọn hù họa một câu trả lời. Tìm xác suất để:

1/ Học sinh đó được 13 điểm

2/ Học sinh đó bị điểm âm.

**Giải**

1/Gọi x là số câu trả lời đúng, 12-x là số câu trả lời sai.

Để được 13 điểm ta cần có:

$$4x - (12-x) = 13$$

$$\Leftrightarrow x = 5.$$

Bài toán trở thành: Tìm xác suất để học sinh đó có 5 câu trả lời đúng.

Xác suất để có câu trả lời đúng là  $\frac{1}{5}$  (và sai là  $\frac{4}{5}$ ). Theo quy tắc cộng và nhân xác suất để học sinh đó được 13 điểm là:

$$P = C_{12}^5 \left(\frac{1}{5}\right)^5 \left(\frac{4}{5}\right)^7 \approx 0,0532.$$

2/ Anh ta bị điểm âm khi

$$4x - (12 - x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{12}{5} \Leftrightarrow x = 0, 1, 2 \text{ (do } x \text{ nguyên).}$$

Gọi A là biến cố “trả lời sai toàn bộ”, B là biến cố “trả lời đúng 1 câu”, C là biến cố “trả lời đúng 2 câu”. Lập luận như phần 1/ ta có:

$$P(A) = \left(\frac{4}{5}\right)^{12} \approx 0,0687; P(B) = C_{12}^1 \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^{11} \approx 0,2064;$$

$$P(C) = C_{12}^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^{10} \approx 0,2835.$$

Gọi X là biến cố “bị điểm âm”, thì  $X = A \cup B \cup C$ , trong đó rõ ràng A, B, C là các biến cố đôi một xung khắc. Theo quy tắc cộng xác suất, ta có:

$$P(X) = P(A) + P(B) + P(C) = 0,5583.$$

### Thí dụ 7:

Một người say rượu bước 8 bước. Mỗi bước anh ta tiến lên phía trước 1m hoặc lùi lại phía sau 1m với xác suất như nhau. Tìm xác suất để

1/ Anh ta trở lại điểm xuất phát.

2/ Anh ta cách điểm xuất phát hơn 4m.

### Giải

1/ Anh ta quay lại điểm xuất phát nếu như trong 8 bước có 4 bước tiến, 4 bước lùi. Theo quy tắc cộng và nhân xác suất, xác suất xảy ra trong trường hợp này là:

$$P = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 \left(\frac{1}{2}\right)^4 = C_8^4 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{70}{256}.$$

2/ Gọi x là số bước tiến lên và 8-x sẽ là số bước lùi. Khoảng cách giữa anh say rượu và điểm xuất phát là:

$$|x - (8 - x)| = |2x - 8|$$

Từ đó theo giả thiết ta có:

$$|2x - 8| > 4 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 6 \\ x < 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = 0; 1; 7; 8 \text{ (do } x \text{ nguyên)}$$

Vì thế áp dụng các quy tắc cộng và nhân xác suất, thì xác suất trong trường hợp này là:

$$P = C_8^8 \left(\frac{1}{2}\right)^8 + C_8^7 \left(\frac{1}{2}\right)^7 \left(\frac{1}{2}\right) + C_8^1 \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right)^7 + C_8^0 \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{9}{128}$$

### Nhận xét:

Qua 7 thí dụ trên các bạn đã thấy rõ tính hiệu quả của phương pháp sử dụng “các định lý về phép tính xác suất” để tìm xác suất của một biến cố.

### Thí dụ 8: (Thí dụ sử dụng công thức “Cộng suy rộng”)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Chọn ngẫu nhiên một vé xổ số có 5 chữ số. Tìm xác suất để số của vé ấy không có chữ số 1 hoặc không có chữ số 5.

### Giải

Gọi A là biến cố “vé không có chữ số 1”. Ta có ngay theo định nghĩa của xác suất và quy tắc nhân xác suất.

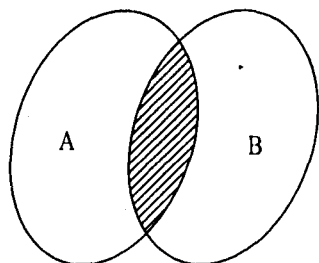
$$P(A) = \left(\frac{9}{10}\right)^5.$$

Gọi B là biến cố “vé không có chữ số 5”, thì ta cũng có:

$$P(B) = \left(\frac{9}{10}\right)^3.$$

Khi đó biến cố tích AB là “vé không có chữ số 1 và chữ số 5” ta dễ dàng tính được:

$$P(AB) = \left(\frac{8}{10}\right)^5.$$



Để ý rằng ở đây A và B không phải là hai biến cố xung khắc, nên theo quy tắc “cộng mờ rộng” ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 2\left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{8}{10}\right)^5.$$

Chú ý: Nếu A, B là hai biến cố tùy ý, ta có:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Điều này có minh họa hình học như biểu đồ Ven ở bên

### §3. ĐẠI LƯỢNG NGẪU NHIÊN RỜI RẠC

Giả sử X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$  trong đó  $p_i$  là xác suất để X nhận các giá trị  $x_i$ .

- Kỳ vọng của X được kí hiệu là  $E(X)$  và xác định như sau:

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i.$$

- Phương sai của X ký hiệu là  $V(X)$  được xác định bằng công thức:

$$V(X) = \sum_{i=1}^n (x_i - E(X))^2 \cdot p_i.$$

- Độ lệch chuẩn của X được ký hiệu là  $\sigma(X)$  xác định bởi công thức:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Để giải các bài toán trong mục này, có hai bước như sau:

**Bước 1** : Lập bảng phân phối xác suất của đại lượng ngẫu nhiên X.

**Bước 2** : Tùy theo đầu bài đòi hỏi mà ta tính các đại lượng  $E(X)$ ,  $V(X)$  hoặc  $\sigma(X)$  theo yêu cầu.

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:**

Gieo đồng thời hai con xúc sắc cân đối, cùng chất. Gọi X là tổng số chấm xuất hiện trên hai mặt của con xúc sắc. Lập bảng tính quy luật phân bố xác suất của X và tính  $E(X)$

### Giải

Đại lượng ngẫu nhiên  $X$  nhận giá trị trong tập  $\{2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ .  
Ta cần tính  $P(X = i) = p_i, i = \overline{2, 12}$ .

Đây chính là các bài toán tìm xác suất dựa vào định nghĩa của xác suất (xem §1). Từ đó ta có bảng quy luật phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$  sau đây:

$X$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

(Bạn đọc tự tính toán theo phép giải đã trình bày kĩ trong mục §1).

Vì thế

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i = 7.$$

### Thí dụ 2

Có hai vận động viên bắn cung A và B tập bắn. Mỗi người bắn hai lần. Xác suất bắn trúng hồng tâm (10 điểm) của A trong mỗi lần bắn là 0,4, còn của B là 0,5. Gọi  $X$  là số lần bắn trúng hồng tâm của A trừ đi số lần bắn trúng hồng tâm của B.

1/ Tìm phân bố xác suất của  $X$ , rồi tính  $E(X)$ .

2/ Tìm phân bố xác suất của  $|X|$  rồi tính  $E(|X|)$ .

### Giải

1/ Rõ ràng  $X$  nhận các giá trị trong tập  $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$

$$\begin{aligned} P(X = -2) &= p(A \text{ bắn trượt 2 lần, } B \text{ bắn trúng hồng tâm 2 lần}) \\ &= 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,5 \cdot 0,5 = 0,09 \end{aligned}$$

Tương tự các bạn có thể tính  $P(X = -1)$ ,  $P(X = 0)$ ,  $P(X = 1)$ ,  $P(X = 2)$  bằng phép sử dụng phép tính xác suất đã trình bày trong mục §2 và ta đi đến bảng phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$  như sau:

$X$	-2	-1	0	1	2
$p_i$	0,09	0,30	0,37	0,2	0,04

$$\begin{aligned} \text{Từ đó } E(X) &= -2(0,09) - 0,30 + 0,2 + 2 \cdot 0,04 \\ &= -0,2. \end{aligned}$$

2/ Đại lượng ngẫu nhiên  $|X|$  nhận giá trị trong tập  $\{0; 1; 2\}$

Theo phần 1/ ta có:

$$P(|X| = 0) = P(X = 0) = 0,37$$

$$P(|X| = 1) = P(X = -1) + P(X = 1) = 0,30 + 0,2 = 0,5$$

$$P(|X| = 2) = P(X = -2) + P(X = 2) = 0,09 + 0,04 = 0,13$$

Vì thế có bảng phân bố xác suất cho đại lượng ngẫu nhiên  $|X|$  sau đây:

$ X $	0	1	2
$p_i$	0,37	0,5	0,13

$$\text{Từ đó: } E(|X|) = 0,5 + 2 \cdot 0,13 = 0,76.$$

### Thí dụ 3:

Trong một chiếc hòm có 5 bóng đèn, trong đó có 2 bóng tốt, 3 bóng hỏng. Ta chọn ngẫu nhiên từng bóng đèn để thử (thử xong không trả lại) cho đến khi thu được 2 bóng tốt. Gọi  $X$  là số lần thử cần thiết.

1/ Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ .

2/ Trung bình cần mấy lần thử.

### Giải

1/ Rõ ràng đại lượng ngẫu nhiên  $X$  nhận giá trị trong tập  $\{2; 3; 4\}$

Để tìm các giá trị  $p_i = P(X = i)$  ( $i = 2, 3, 4$ ) ta phải giải các bài toán tìm xác suất sau:

+ Tìm  $p_2 = P(X = 2)$

Muốn thử hai lần chọn được hai bóng tốt, thì lần đầu phải chọn được bóng tốt.

Xác suất để có được điều này là  $\frac{2}{5}$ ; lần thứ hai còn lại là 4 bóng, trong đó có 1

bóng tốt, vậy xác suất để lần thứ hai cũng chọn được bóng tốt là  $\frac{1}{4}$ . Theo quy tắc nhân ta có:

$$p_2 = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{10}.$$

+ Tìm  $p_3 = P(X = 3)$ :

Muốn vậy phải xét hai khả năng:

- Hoặc là lần đầu lấy bóng hỏng, hai lần tiếp theo bóng tốt.

- Hoặc là lần đầu lấy bóng tốt, lần 2 bóng hỏng, lần 3 bóng tốt.

Kết hợp cả việc sử dụng định nghĩa để tính xác suất, cũng như các quy tắc cộng và nhân xác suất ta có:

$$p_3 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{5}.$$

Vì  $p_2 + p_3 + p_4 = 1 \Rightarrow p_4 = P(X = 4) = 1 - p_2 - p_3$

$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{5} = \frac{7}{10}.$$

Vậy ta có bảng phân bố xác suất sau đây:

$X$	2	3	4
$p_i$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{7}{10}$

Từ đó:  $E(X) = 2 \cdot \frac{1}{10} + 3 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot \frac{7}{10} = 3,6$ .

Trung bình cần thử 3,6 lần (về ý nghĩa thực tế tức là giữa 3 và 4 lần)

**Nhận xét:**

1/ Như vậy trong các bài toán về “đại lượng ngẫu nhiên rời rạc” thực chất là ta phải giải hàng loạt các bài toán về “tìm xác suất của một biến cố”.

2/ Để tính  $p_4$  trong thí dụ trên ( $p_n$  trong các thí dụ đại lượng ngẫu nhiên rời rạc nhận  $n$  giá trị  $x_1, x_2, \dots, x_n$  với các xác suất tương ứng  $p_1, p_2, \dots, p_n$ ), ta chỉ cần tính  $p_2, p_3$  rồi dùng công thức  $p_4 = 1 - p_2 - p_3$ .

$$(p_n = 1 - \sum_{i=1}^{n-1} p_i).$$

3/ Nếu không dùng chú ý trên bạn có thể tính  $p_4$  như sau:

$p_4 = P(X = 4)$  muốn vậy phải xét 5 khả năng, sau:

- Hai lần đầu bóng hỏng, hai lần sau bóng tốt.
- Hai lần đầu bóng hỏng, lần thứ ba bóng tốt, lần thứ tư bóng hỏng.
- Lần đầu bóng tốt, lần thứ hai bóng hỏng, lần thứ ba bóng hỏng, lần thứ tư bóng tốt.
- Lần đầu bóng hỏng, lần hai bóng tốt, lần ba bóng hỏng, lần bốn bóng tốt.
- Lần đầu bóng hỏng, lần thứ hai bóng tốt, lần thứ ba bóng hỏng, lần thứ tư bóng hỏng.

Khi đó ta có:

$$p_4 = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$$

Dĩ nhiên cách tính này rõ ràng không cần thiết!

4/ Chú ý: ta chỉ cần thử tối đa đến lần thứ tư thì xác định ngay được tình trạng của bóng thứ 5, vì thế nếu 4 lần thử trước mới tìm được 1 bóng tốt, thì bóng còn lại chắc chắn là bóng tốt.

Dĩ nhiên nếu yêu cầu khắt khe, bóng gọi là bóng sáng nếu mắt ta phải nhìn thấy nó “sáng thật”, thì phải thử đến lần thứ năm!!!

## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Một hộp đựng 12 viên bi, trong đó có 7 viên bi màu đỏ, 5 viên bi màu xanh. Lấy ngẫu nhiên mỗi lần 3 viên bi. Tìm xác suất trong hai trường hợp sau:

- 1/ Lấy được 3 viên bi màu đỏ.
- 2/ Lấy được ít nhất hai viên bi đỏ.

Đáp số: 1/  $\frac{7}{44}$                       2/  $\frac{7}{11}$ .

### Bài 2:

Cho tám quả cân 1kg, 2kg, ..., 7kg, 8kg. Chọn ngẫu nhiên ba quả cân. Tìm xác suất để tổng cộng 3 quả cân không quá 9kg.

Đáp số:  $\frac{1}{8}$ .

### Bài 3:

Cho tập hợp  $E = \{0, 1, 2, \dots, 8, 9\}$ . Lấy ngẫu nhiên ra hai phần tử của  $E$ . Tìm xác suất để hai số lấy ra đều chẵn và tổng của chúng nhỏ hơn 7.

Đáp số:  $\frac{4}{45}$ .

**Bài 4:**

Một khách sạn có 6 phòng đơn. Có 10 khách đến thuê phòng, trong đó có 6 nam và 4 nữ. Người quản lí khách sạn chọn ngẫu nhiên 6 người. Tìm xác suất để:

1/ Có 4 khách nam và 2 khách nữ.

2/ Có ít nhất hai khách nữ.

Đáp số: 1/  $\frac{3}{7}$       2/  $\frac{37}{42}$ .

**Bài 5:**

Một đoàn tàu có 3 toa đỗ ở sân ga. Có 5 hành khách lên tàu. Mỗi hành khách độc lập với nhau chọn ngẫu nhiên một toa tàu. Tìm xác suất để mỗi toa có ít nhất 1 hành khách lên tàu.

Đáp số:  $\frac{50}{81}$ .

**Bài 6:**

Một người bỏ ngẫu nhiên bốn lá thư vào bốn chiếc phong bì thư đã đề sẵn địa chỉ. Tìm xác suất để ít nhất có một lá thư bỏ đúng địa chỉ.

Đáp số:  $\frac{5}{8}$ .

*Hướng dẫn chung:* Các bài từ 1–6 dùng định nghĩa của xác suất để giải.

**Bài 7:**

Gieo đồng thời 3 con xúc sắc. Bạn là người thắng cuộc với xuất hiện ít nhất “2 mặt có quân lục”. Tìm xác suất để trong 5 ván chơi, bạn thắng ít nhất 3 ván.

Đáp số:  $\frac{52032}{27^5}$ .

**Bài 8:**

Một máy bay có ba bộ phận A, B, C còn tầm quan trọng khác nhau. Giả sử các bộ phận A, B, C tương ứng 15%, 30%, 55% diện tích máy bay.

Máy bay bị rơi nếu hoặc có 1 viên đạn trúng vào A, hoặc hai viên trúng B, hoặc ba viên trúng C. Tìm xác suất để bay bị rơi nếu:

1/ Máy bay bị trúng 2 viên đạn.

2/ Máy bay bị trúng 3 viên đạn.

Đáp số: 1/ 0,3675      2/ 0,72775.

**Bài 9:**

Hai cầu thủ bóng đá sút phạt đền, mỗi người đá 1 lần với xác suất làm bàn tương ứng là 0,8 và 0,7. Tìm xác suất để ít nhất 1 cầu thủ làm bàn.

Đáp số: 0,94.

**Bài 10:**

Trong một thành phố, tỷ lệ người thích xem bóng đá là 65%. Chọn ngẫu nhiên 12 người. Tìm xác suất để trong đó có đúng 5 người thích xem bóng đá.

Đáp số: 0,0591.

**Bài 11:**

Chọn ngẫu nhiên 1 vé xổ số có 5 chữ số. Tìm xác suất để số của vé có chữ số 5 và có chữ số chẵn.



Đáp số:  $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^5 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \left(\frac{2}{5}\right)^5$ .

**Hướng dẫn chung:** Trong các bài 7–11 sử dụng phương pháp dùng các định nghĩa về phép tính xác suất để giải.

**Bài 12:**

Một nhóm có 10 người gồm 6 nam và 4 nữ. Chọn ngẫu nhiên 3 người. Gọi  $X$  là số nữ trong nhóm.

1/ Lập bảng phân phối cho đại lượng ngẫu nhiên là  $X$ .

2/ Tìm  $E(X)$ .

Đáp số:

1/	$X$	0	1	2	3
	$P_i$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

2/  $E(X)=1,2$ .

**Bài 13:**

Trong một chiếc hòm có 10 tấm thẻ, trong đó 4 thẻ ghi số 1; 3 thẻ ghi số 2; 2 thẻ ghi số 3 và 1 thẻ ghi số 4.

Chọn ngẫu nhiên 2 tấm thẻ và gọi  $X$  là tổng các số thu được trên hai tấm thẻ.

Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ .

Đáp số:

$X$	2	3	4	5	6	7
$P_i$	$\frac{6}{45}$	$\frac{12}{45}$	$\frac{11}{45}$	$\frac{10}{45}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{45}$

**Bài 14:**

Một lô hàng gồm 7 sản phẩm, trong đó có 3 phế phẩm. Chọn ngẫu nhiên ra 4 sản phẩm đã kể ra. Gọi  $X$  là số chính phẩm trong 4 sản phẩm lấy ra. Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ .

Đáp số:

$X$	1	2	3	4
$P_i$	$\frac{4}{35}$	$\frac{18}{35}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{1}{35}$

**Bài 15:**

Một người có một chùm 7 chìa khóa giống hệt nhau, trong đó chỉ có 2 chìa là mở được cửa. Người đó thử ngẫu nhiên từng chiếc (thử xong bỏ ra ngoài) cho đến khi tìm được chiếc mở được cửa. Gọi  $X$  là số lần thử. Tìm phân bố xác suất của đại lượng ngẫu nhiên  $X$ .

Đáp số:

$X$	1	2	3	4	5
$P_i$	$\frac{12}{42}$	$\frac{10}{42}$	$\frac{8}{42}$	$\frac{6}{42}$	$\frac{6}{42}$

## Bài giảng số 10

# NHỊ THỨC NEWTON

Các bài toán tổ hợp nói chung và nhị thức Newton nói riêng là một trong các cấu thành của các đề thi môn Toán trong các kì thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng những năm gần đây từ 2002-2009.

Bài giảng này dành để trình bày các phương pháp giải các bài toán liên quan đến nhị thức Newton. Có hai loại bài toán chính được xét đến ở đây:

- Các bài toán liên quan đến hệ số trong khai triển nhị thức Newton.
- Các bài toán tính tổng có sử dụng đến nhị thức Newton.

## §1. CÁC BÀI TOÁN VỀ HỆ SỐ TRONG KHAI TRIỂN NHỊ THỨC NEWTON

Như đã biết nhị thức Newton có dạng:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k. \quad (1)$$

Trong đó vế phải của (1) là tổng  $n+1$  số hạng. Số  $C_n^k a^{n-k} b^k$  là số hạng thứ  $k+1$  của tổng ấy, ( $k = 0, 1, 2, \dots, n$ ). Các bài toán thuộc chủ đề này là một dạng toán hay gặp trong các kì thi tuyển sinh vào các trường Đại học, Cao đẳng trong những năm gần đây. Nó thường có dạng sau: “Tìm điều kiện để hệ số của khai triển (1) thỏa mãn một điều kiện nào đấy”.

Phương pháp giải các bài toán này thường được tiến hành như sau:

- Viết khai triển Newton (1) với  $a, b$  được chọn từ đầu bài. Trong một số trường hợp có thể phải xác định số  $n$  trước (thường  $n$  là nghiệm của một phương trình có liên quan đến số tổ hợp).

- Từ (1) sử dụng số hạng thứ  $k+1$ :  $C_n^k a^{n-k} b^k$  của khai triển và yêu cầu đề bài để thiết lập nên một phương trình (mà ẩn của nó thường là  $k$ ).

- Từ nghiệm tìm được sẽ cho ta kết quả cần tìm.

Trong quá trình giải toán ta thường dùng các kết quả đặc biệt sau:

$$(1 + x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n.$$

$$(1 - x)^n = \sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k x^k = C_n^0 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^n C_n^n x^n.$$

Đặc biệt hơn, ta có:  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$ ;

$$C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^n C_n^n = 0.$$

**Các dạng toán cơ bản:**

**Loại 1:** Tìm hệ số của  $x^k$  trong một khai triển nhị thức Newton:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Tìm hệ số của  $x^{10}$  trong khai triển nhị thức  $(2+x)^n$  biết rằng:

$$3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n = 2048.$$

**Giải**

Áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton:

$$2^n = (3-1)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 3^k (-1)^{n-k}$$

$$= 3^n C_n^0 - 3^{n-1} C_n^1 + 3^{n-2} C_n^2 - 3^{n-3} C_n^3 + \dots + (-1)^n C_n^n.$$

Vì thế, từ giả thiết ta có:  $2^n = 2048 = 2^{11} \Rightarrow n = 11$ .

Lại áp dụng công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(2+x)^{11} = \sum_{k=0}^{11} C_{11}^k 2^k x^{11-k}. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra hệ số của  $x^{10}$  ứng với  $k=1$ , và đó là số:  $C_{11}^1 2^1 = 22$ .

**Nhận xét:**

Thí dụ trên là một minh họa đầy đủ cho phương pháp giải mà chúng ta đã trình bày trong phần mở đầu.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**

Tìm hệ số của số hạng  $x^{26}$  trong khai triển nhị thức Newton của

$$\left( \frac{1}{x^4} + x^7 \right)^n.$$

Biết rằng  $C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = 2^{20} - 1$ .

**Giải**

Trước hết xác định  $n$  từ giả thiết đã cho như sau:

Theo tính chất của số tổ hợp, ta có:

$$C_{2n+1}^1 = C_{2n+1}^{2n}$$

$$C_{2n+1}^2 = C_{2n+1}^{2n-1}$$

.....

$$C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{n+1}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n = C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+1} \quad (1)$$

Từ (1) ta có:

$$\begin{aligned} C_{2n+1}^0 + (C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) + (C_{2n+1}^{2n} + C_{2n+1}^{2n-1} + \dots + C_{2n+1}^{n+1}) + C_{2n+1}^{2n+1} \\ = 2 + 2(C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^n) \end{aligned} \quad (2)$$

Vì vế trái của (2) bằng 2, nên từ (2) và giả thiết ta có:

$$2^{2n+1} = 2 + 2(2^{20} - 1) = 2^{21} \Leftrightarrow n=10.$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(\frac{1}{x^4} + x^7\right)^{10} = (x^{-4} + x^7)^{10} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (x^{-4})^k (x^7)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k x^{70-11k}.$$

Ta có  $70 - 11k = 26 \Rightarrow k = 4$ . Vậy số hạng chứa  $x^{26}$  ứng với  $k = 4$ . Từ đó suy ra hệ số của  $x^{26}$  là  $C_{10}^4 = 210$ .

**Nhận xét:** Một lần nữa ta thấy các bước giải của các loại toán trong mục này tuân theo phương pháp đã trình bày trong phần mở đầu.

**Thí dụ 3 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2004)**

Tìm các số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7$ , với  $x > 0$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } \left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\right)^7 &= \left(x^{\frac{1}{3}} + x^{-\frac{1}{4}}\right)^7 = \sum_{k=0}^7 C_7^k \left(x^{\frac{1}{3}}\right)^k \left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^{7-k} \\ &= \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{\frac{k}{3} - \frac{7-k}{4}} = \sum_{k=0}^7 C_7^k x^{\frac{7k-21}{12}} \end{aligned}$$

Xét phương trình  $7k - 21 = 0 \Leftrightarrow k = 3$ .

Vậy số hạng không chứa  $x$  là số hạng ứng với  $k = 3$ . Đó là số  $C_7^3 = 35$ .

**Chú ý:** Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2008 có dạng tương tự: Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển  $\left(2x + \frac{1}{\sqrt[5]{x}}\right)^7$ .

Đáp số: 6528.

**Thí dụ 4: (Đề thi Đại học khối A – 2003)**

Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển nhị thức Newton

$$\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^n, \text{ biết rằng: } C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3).$$

**Giải**

Trước hết ta tìm  $n$  từ hệ thức:

$$C_{n+4}^{n+1} - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow C_{n+3}^{n+1} + C_{n+3}^n - C_{n+3}^n = 7(n+3) \Leftrightarrow \frac{(n+3)!}{(n+1)!2!} = 7(n+3)$$

$$\Leftrightarrow (n+2)(n+3) = 14(n+3) \Leftrightarrow (n+2) = 14 \Leftrightarrow n = 12 \text{ (do } n+3 > 0)$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\left(\frac{1}{x^3} + \sqrt{x^5}\right)^{12} = \left(x^{-3} + x^{\frac{5}{2}}\right)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k (x^{-3})^k \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{12-k} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k x^{\frac{60-11k}{2}}$$

$$\text{Từ phương trình } \frac{60-11k}{2} = 8 \Rightarrow k = 4.$$

Vậy số hạng chứa  $x^8$  trong khai triển tương ứng với  $k = 4$ , do đó hệ số của nó là  $C_{12}^4 = 495$ .

**Nhận xét:** Với các thí dụ 1, 2, 3, 4 việc tính hệ số của các số hạng chứa  $x^k$  được tính trực tiếp.

Trong các thí dụ sau đây, việc tính hệ số của số hạng  $x^k$  không tính được trực tiếp mà nó phải qua bước trung gian. Ta hãy xét các thí dụ đó:

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)**

Tìm hệ số của  $x^5$  trong khai triển của biểu thức:  $P = x(1 - 2x)^5 + x^2(1 + 3x)^{10}$ .

**Giải**

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$P = x \sum_{k=0}^5 C_5^k (-2x)^k + x^2 \sum_{k=0}^{10} C_{10}^k (3x)^k. \quad (1)$$

Từ (1) suy ra số hạng chứa  $x^5$  của  $P$  là:

$$xC_5^4 (-2x)^4 + x^2 C_{10}^3 (3x)^3 = x^5 (16C_5^4 + 27C_{10}^3).$$

Vậy hệ số của  $x^5$  trong khai triển là  $16 \cdot 5 + 27 \cdot 120 = 3320$ .

**Thí dụ 6 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)**

Tìm hệ số của  $x^8$  trong khai triển thành đa thức của biểu thức:

$$P = [1 + x^2(1 - x)]^8.$$

**Giải**

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$P = \sum_{k=0}^8 C_8^k [x^2(1 - x)]^k = \sum_{k=0}^8 C_8^k x^{2k} (1 - x)^k.$$

+ Với  $k = 5, 6, 7, 8$  thì  $x^{2k}(1 - x)^k$  chứa lũy thừa bậc thấp nhất là  $2k \geq 10$ , vậy mọi số hạng của nó không có số hạng nào chứa lũy thừa 8 của  $x$ .

+ Với  $k = 0, 1, 2$  thì  $x^{2k}(1 - x)^k$  chứa lũy thừa bậc cao nhất là  $3k \leq 6$ , vậy mọi số hạng của nó không có số hạng nào chứa lũy thừa 8 của  $x$ .

Vậy chỉ xét khi  $k=3, k=4$ .

$$- \text{Với } k = 3, \text{ xét số hạng } C_8^3 x^6 (1 - x^3) = C_8^3 x^6 (1 - 3x + 3x^2 - x^3).$$

Số hạng chứa  $x^8$  ở đây là  $3C_8^3 x^8$ .

$$- \text{Với } k = 4 \text{ xét số hạng: } C_8^4 x^8 (1 - x^4). \text{ Số hạng chứa } x^8 \text{ là: } C_8^4 x^8.$$

Vậy hệ số chứa lũy thừa  $x^8$  trong khai triển của  $P$  là:  $3C_8^3 + C_8^4 = 238$ .

**Thí dụ 7:**

Cho đa thức  $P(x) = (1 + x) + 2(1 + x)^2 + 3(1 + x)^3 + \dots + 20(1 + x)^{20}$ . Tìm hệ số của số hạng  $x^{15}$  trong khai triển thành đa thức của  $P(x)$ .

**Giải**

Viết lại:

$$P(x) = [(1 + x) + 2(1 + x)^2 + \dots + 14(1 + x)^{14}]$$

$$+15\left(\sum_{k=0}^{15} C_{15}^k x^k\right) + 16\left(\sum_{k=0}^{16} C_{16}^k x^k\right) + \dots + 20\left(\sum_{k=0}^{20} C_{20}^k x^k\right). \quad (1)$$

Từ đó suy ra hệ số của số hạng chứa  $x^{15}$  là

$$a_{15} = 15C_{15}^{15} + 16C_{16}^{15} + 17C_{17}^{15} + 18C_{18}^{15} + 19C_{19}^{15} + 20C_{20}^{15} = 400995.$$

**Loại 2:** Tìm hệ số lớn nhất trong một khai triển nhị thức Newton:

Bài toán này có dạng sau: Trong một khai triển thành đa thức.

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

(ở đây sử dụng công thức khai triển nhị thức Newton). Hãy tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số  $a_0, a_1, \dots, a_n$

Phương pháp giải loại toán này như sau:

- Xét bất phương trình  $a_k < a_{k+1}$  và nghiệm của nó thường có dạng  $k < k_0$  do  $k$  nguyên nên  $k = 0, 1, 2, \dots, k_0 - 1$ .

- Từ đó suy ra bất phương trình  $a_k \geq a_{k+1}$  có nghiệm dạng  $k \geq k_0$ .

Đến đây ta có hai khả năng:

+ Nếu  $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = k_0$ .

Khi đó ta có:  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k_0} = a_{k_0+1} > a_{k_0+2} > \dots > a_{n-1} > a_n$ .

Lúc này có hai hệ số nhận giá trị lớn nhất là  $a_{k_0}$  và  $a_{k_0+1}$

+ Nếu  $a_k = a_{k+1}$  vô nghiệm

Khi đó ta có:  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_{k_0-1} < a_{k_0} < a_{k_0+1} > \dots > a_n$ .

Lúc này có duy nhất hệ số  $a_{k_0}$  nhận giá trị lớn nhất.

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**

Giả sử  $P(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  thỏa mãn hệ thức:

$$a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = 2^{12}.$$

Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số  $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$

**Giải**

Theo công thức khai triển Newton ta có:

$$P(x) = (1 + 2x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k 2^k x^k = C_n^0 + 2C_n^1 x + 2^2 C_n^2 x^2 + \dots + 2^n C_n^n x^n.$$

Từ đó do  $P(x) = (1 + 2x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ , ta có:

$$a_0 = C_n^0$$

$$a_1 = 2C_n^1 \Rightarrow \frac{a_1}{2} = C_n^1$$

$$a_2 = 2^2 C_n^2 \Rightarrow \frac{a_2}{2^2} = C_n^2$$

$$a_n = 2^n C_n^n \Rightarrow \frac{a_n}{2^n} = C_n^n$$

$$\text{Vì thế: } a_0 + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \dots + \frac{a_n}{2^n} = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Do đó từ giả thiết suy ra:  $2^n = 2^{12} \Rightarrow n = 12$ .

Xét khai triển:  $(1+2x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^k 2^k x^k$ .

Từ đó  $a_k = C_{12}^k 2^k$  ( $k=0, 1, \dots, 12$ )

Xét bất phương trình:  $a_k < a_{k+1}$

$$\Leftrightarrow C_{12}^k 2^k < C_{12}^{k+1} 2^{k+1} \Leftrightarrow \frac{12!}{(12-k)!k!} < 2 \frac{12!}{(11-k)!(k+1)!} \Leftrightarrow \frac{1}{12-k} < 2 \frac{2}{k+1}$$

$$\Leftrightarrow k+1 < 24-2k \Leftrightarrow k < \frac{23}{3} \Leftrightarrow k=0, 1, 2, \dots, 7 \text{ (do } k \text{ nguyên)}.$$

Từ đó suy ra:  $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{23}{3} \Leftrightarrow k=8, 9, 10, 11$ .

Phương trình  $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k = \frac{23}{7}$ .

$\Leftrightarrow$  vô nghiệm do  $k$  nguyên.

Như thế ta có:  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots < a_7 < a_8 > a_9 > a_{10} > a_{11} > a_{12}$ .

Vậy  $\max \{a_0, a_1, \dots, a_{12}\} = a_8 = 2^8 C_{12}^8 = 126720$ .

### Thí dụ 2

Xét khai triển  $(3x+2)^9 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_9x^9$ . Tìm hệ số lớn nhất trong các hệ số  $\{a_0; a_1; \dots, a_9\}$ .

#### Giải

Ta có:  $(3x+2)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k (3x)^k 2^{9-k} = \sum_{k=0}^9 3^k 2^{9-k} C_9^k x^k$ .

Vậy  $a_k = 3^k 2^{9-k} C_9^k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, 9$ ).

Xét bất phương trình:  $a_k < a_{k+1}$

$$\Leftrightarrow 3^k 2^{9-k} C_9^k < 3^{k+1} 2^{8-k} C_9^{k+1} \Leftrightarrow 2 \frac{9!}{k!(9-k)!} < 3 \frac{9!}{(k+1)!(8-k)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{9-k} < \frac{3}{k+1} \Leftrightarrow k < 5 \Leftrightarrow k=0, 1, 2, 3, 4 \text{ (do } k \text{ nguyên)}.$$

Vậy  $a_k > a_{k+1} \Leftrightarrow k > 5 \Leftrightarrow k=6, 7, 8$ .

Mặt khác  $a_k = a_{k+1} \Leftrightarrow k=5$ .

Vì thế ta có:  $a_0 < a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 = a_6 > a_7 > a_8 > a_9$ .

Từ đó:  $a_5 = a_6 = \max \{a_0; a_1; \dots, a_9\} = 2C_9^5 = 252$ .

### Thí dụ 3

Xét khai triển  $(x+2)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ . Tìm  $n$  để  $\max \{a_0; a_1; \dots, a_n\} = a_{10}$ .

#### Giải

Từ giả thiết  $a_0 < a_1 < \dots < a_9 < a_{10} > a_{11} > a_{12} > \dots > a_n$ .

Vậy ta có hệ: 
$$\begin{cases} a_{10} > a_9 & (1) \\ a_{10} > a_{11} & (2) \end{cases}$$

Theo khai triển nhị thức Newton, thì

$$(x+2)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 2^{n-k}.$$

Vậy  $a_k = C_n^k 2^{n-k}$  với  $k = 0, 1, 2, \dots, n$

$$\text{Từ đó (1), (2)} \Leftrightarrow \begin{cases} C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^9 2^{n-9} \\ C_n^{10} 2^{n-10} > C_n^{11} 2^{n-11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{n!}{(n-10)!10!} > \frac{2n!}{(n-9)!9!} \\ \frac{2n!}{(n-10)!10!} > \frac{n!}{(n-11)!11!} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{10} > \frac{2}{n-9} \\ \frac{2}{n-10} > \frac{1}{11} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 29 < n < 32$$

$$\Leftrightarrow n = 30 \text{ hoặc } n = 31.$$

**Loại 3:** Các bài toán tìm hệ số và các số hạng trong khai triển nhị thức Newton thỏa mãn các điều kiện cho trước:

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)**

Với  $n$  là số nguyên dương, gọi  $a_{3n-3}$  là hệ số của  $x^{3n-3}$  trong khai triển thành đa thức của  $(x^2+2)^n + (x+2)^n$ . Tìm  $n$  để có  $a_{3n-3} = 26n$ .

**Giải**

Vì  $n$  nguyên dương nên  $n \geq 1 \Rightarrow 3n-3 \geq 0$ .

Theo công thức khai triển nhị thức Newton ta có:

$$(1+x^2)^n = C_n^0 + C_n^1 x^2 + C_n^2 x^4 + \dots + C_n^n x^{2n}, \quad (1)$$

$$(2+x)^2 = 2^n C_n^0 + 2^{n-1} C_n^1 x + 2^{n-2} C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n. \quad (2)$$

1/ Nếu  $n = 1 \Rightarrow 3n-3 = 0$ .

Trong trường hợp này, ta có:  $(x^2+1)^n (x+2)^n = (x^2+1)(x+2)$

Từ đó suy ra  $a_0 = 2$ . Mặt khác  $26n = 26 \Rightarrow a_{3n-3} \neq 26n$ .

Loại khả năng này.

2/ Nếu  $n = 2$  (lập luận tương tự như trường hợp 1 cũng loại khả năng này).

3/ Nếu  $n \geq 3$ , từ (1) (2) suy ra:

$$a_{3n-3} = C_n^n (2^3 C_n^{n-3}) + C_n^{n-1} (2 C_n^{n-1}) = 2^3 \frac{n!}{(n-3)!3!} + 2n^2.$$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$\frac{4n(n-1)(n-2)}{3} + 2n^2 = 26n \Leftrightarrow n = 5 \text{ (do } n \geq 3).$$

Vậy  $n = 5$  là giá trị duy nhất cần tìm của  $n$ .



**Thí dụ 2:**

Tìm các số hạng nguyên trong khai triển  $(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9$ .

**Giải**

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$(\sqrt{3} + \sqrt[3]{2})^9 = \left( 3^{\frac{1}{2}} + 2^{\frac{1}{3}} \right)^9 = \sum_{k=0}^9 C_9^k 3^{\frac{k}{2}} 2^{\frac{9-k}{3}}. \quad (1)$$

Số hạng

$$C_9^k 3^{\frac{k}{2}} 2^{\frac{9-k}{3}} \text{ là nguyên} \Leftrightarrow \begin{cases} k:2 \\ (9-k):3 \Leftrightarrow k=0 \text{ và } k=6. \\ 0 \leq k \leq 9 \end{cases}$$

Vậy trong khai triển trên có hai số hạng nguyên đó là:

$$C_9^0 3^0 2^3 = 8 \text{ và } C_9^6 3^3 2^1 = 4536.$$

**Thí dụ 2:**

Trong khai triển nhị thức Newton:

$$\left( \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}} \right)^{21},$$

tìm hệ số của số hạng có số mũ của a và b là bằng nhau.

**Giải**

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned} \left( \sqrt[3]{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{3a}} \right)^{21} &= \left( a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{6}} + b^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{6}} \right)^{21} \\ &= \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k \left( a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{1}{6}} \right)^k \left( b^{\frac{1}{2}} a^{-\frac{1}{6}} \right)^{21-k} = \sum_{k=0}^{21} C_{21}^k a^{\frac{k}{3} - \frac{21-k}{6}} b^{\frac{k}{6} + \frac{21-k}{2}}. \end{aligned} \quad (1)$$

Từ (1) suy ra xét hệ phương trình sau:

$$\frac{k}{3} - \frac{k-21}{6} = -\frac{k}{6} + \frac{21-k}{2} \Leftrightarrow k = 12.$$

Vậy hệ số cần tìm là:  $C_{21}^{12} = 293930$  (đó là hệ số của số hạng chứa  $a^{\frac{5}{2}} b^{\frac{5}{2}}$ )

**Thí dụ 3**

Tìm số nguyên dương bé nhất n sao cho trong khai triển  $(1+x)^n$  có hai hệ số liên tiếp có tỉ số là  $\frac{7}{5}$ .

**Giải**

Ta có:  $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k \Rightarrow$  hệ số của hai số hạng liên tiếp là:  $C_n^k, C_n^{k+1}$ .

Ta có:

$$\frac{C_n^k}{C_n^{k+1}} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow \frac{k+1}{n-k} = \frac{7}{15} \Leftrightarrow 7n = 22k + 15 \Leftrightarrow n = 3k + 2 + \frac{k+1}{7}.$$

$$\text{Do } n, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{k+1}{7} = t \Rightarrow k = 7t - 1 \Rightarrow n = 22t - 1 \quad (1)$$

$$\text{Do } k \geq 0 \text{ nên } 7t - 1 \geq 0 \Rightarrow t \geq \frac{1}{7} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) do  $t$  nguyên nên  $n$  nhận giá trị bé nhất bằng 21 khi  $t = 1$ . Vậy  $n = 21$  là giá trị bé nhất của  $n$  thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

## §2. CÁC BÀI TOÁN CHỨNG MINH HỆ THỨC TỔ HỢP, HOẶC TÍNH TỔNG BẰNG CÁCH SỬ DỤNG NHỊ THỨC NEWTON

Để có thể giải các bài toán thuộc loại này, người ta thường giải nó theo các bước sau:

1/ Trước hết chọn một hàm số thích hợp với đầu bài. Các hàm số này thường là nhìn thấy ngay dạng của nó (dựa vào các biểu thức cho trong đầu bài).

2/ Dùng các phép biến đổi đại số, hoặc kết hợp với phép tính đạo hàm, tích phân để giải bài toán ban đầu.

**Loại 1:** Các bài toán kết hợp việc sử dụng phép tính đạo hàm và tích phân:

Với loại bài tập này, sau khi chọn được hàm số  $f(x)$  thích hợp ta tiến hành lấy đạo hàm (hoặc tích phân) hàm số đã chọn theo hai cách:

- Lấy đạo hàm (hoặc tích phân) trực tiếp hàm số đã cho.

- Lấy đạo hàm (hoặc tích phân) sau khi đã sử dụng khai triển nhị thức Newton hàm số  $f(x)$  đã chọn (dĩ nhiên ở đây  $f(x)$  có dạng có thể dùng công thức khai triển nhị thức Newton)

- Với phép lấy đạo hàm, ta lựa chọn một giá trị phù hợp cho  $x$ , rồi thay vào hai biểu thức và tính đạo hàm. Với phép lấy tích phân thì chọn hai cận tích phân thích hợp. Các giá trị này cũng thường thấy ngay từ đầu bài.

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Cho  $n$  là số nguyên dương, chứng minh:

$$\frac{1}{2}C_{2n}^1 + \frac{1}{4}C_{2n}^3 + \frac{1}{6}C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n}C_{2n}^{2n-1} = \frac{2^{2n} - 1}{2n + 1}.$$

**Giải**

$$\text{Ta có: } (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 + C_{2n}^3x^3 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (1)$$

$$(1-x)^{2n} = C_{2n}^0 - C_{2n}^1x + C_{2n}^2x^2 - C_{2n}^3x^3 + \dots + C_{2n}^{2n}x^{2n} \quad (2)$$

Xét hàm số:  $f(x) = \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2}$  (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra:  $f(x) = C_{2n}^1 x + C_{2n}^3 x^3 + C_{2n}^5 x^5 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1}$ . (4)

Từ (3) ta có:

$$\int_0^1 f(x) dx = C_{2n}^1 \int_0^1 \frac{(1+x)^{2n} - (1-x)^{2n}}{2} dx = \frac{1}{2} \left[ \frac{(1+x)^{2n+1}}{2n+1} - \frac{(1-x)^{2n+1}}{2n+1} \right] \Big|_0^1 = \frac{2^{2n} - 1}{2n+1}. \quad (5)$$

Từ (4) lại có:  $\int_0^1 f(x) dx = C_{2n}^1 \int_0^1 x dx + C_{2n}^3 \int_0^1 x^3 dx + \dots + C_{2n}^{2n-1} \int_0^1 x^{2n-1} dx$

$$= \frac{1}{2} C_{2n}^1 + \frac{1}{4} C_{2n}^3 + \frac{1}{6} C_{2n}^5 + \dots + \frac{1}{2n} C_{2n}^{2n-1}. \quad (6)$$

Từ (5) (6)  $\Rightarrow$  đpcm.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**

Tìm số nguyên dương  $n$  sao cho:

$$C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1} = 2005.$$

**Giải**

Xét hàm số:  $f(x) = (1+x)^{2n+1} \Rightarrow f'(x) = (2n+1)(1+x)^{2n}$ . (1)

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{2n+1} C_{2n+1}^k x^k = C_{2n+1}^0 + C_{2n+1}^1 x + C_{2n+1}^2 x^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = C_{2n+1}^1 + 2C_{2n+1}^2 x + 3C_{2n+1}^3 x^2 + \dots + (2n+1)C_{2n+1}^{2n+1} x^{2n}. \quad (2)$$

Đồng thời thay  $x=-2$  vào (1) và (2) ta có:

$$2n+1 = C_{2n+1}^1 - 2.2C_{2n+1}^2 + 3.2^2 C_{2n+1}^3 - 4.2^3 C_{2n+1}^4 + \dots + (2n+1)2^{2n} C_{2n+1}^{2n+1}. \quad (3)$$

Từ giả thiết và (3) suy ra  $2n+1 = 2005 \Leftrightarrow n = 1002$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)**

Cho  $n$  là số nguyên dương. Tính tổng:

$$S = C_n^0 + \frac{2^2 - 1}{2} C_n^1 + \frac{2^3 - 1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1} - 1}{n+1} C_n^n.$$

**Giải**

Xét hàm số  $f(x) = (1+x)^n$ . Ta có:

$$I = - \int_{2\pi}^0 (2\pi - t) (\cos^3 t) dt = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) (\cos^3 t) dt. \quad (1)$$

Theo công thức khai triển Newton, ta có:

$$f(x) = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^2 f(x) dx &= C_n^0 \int_1^2 dx + C_n^1 \int_1^2 x dx + C_n^2 \int_1^2 x^2 dx + \dots + C_n^n \int_1^2 x^n dx \\ &= C_n^0 + \frac{2^2-1}{2} C_n^1 + \frac{2^3-1}{3} C_n^2 + \dots + \frac{2^{n+1}-1}{n+1} C_n^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

#### Thí dụ 4

Cho  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh rằng

$$C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 3C_{2n}^2 - 4C_{2n}^3 + \dots + (2n+1)C_{2n}^{2n} = 0.$$

#### Giải

Xét hàm số  $f(x) = x(1+x)^{2n}$ .

$$f'(x) = (1+x)^{2n} + 2nx(1+x)^{2n-1} \quad (1)$$

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$\begin{aligned} f(x) &= x \left( C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n} \right) = C_{2n}^0 x + C_{2n}^1 x^2 + C_{2n}^2 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n+1} \\ \Rightarrow f'(x) &= C_{2n}^0 + 2xC_{2n}^1 + 3x^2 C_{2n}^2 + \dots + (2n+1)C_{2n}^{2n} x^{2n}. \end{aligned} \quad (2)$$

Đồng thời thay  $x = -1$  vào (1) và (2) suy ra

$$C_{2n}^0 - 2C_{2n}^1 + 3C_{2n}^2 - 4C_{2n}^3 + \dots + (2n+1)C_{2n}^{2n} = 0 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

#### Thí dụ 5:

$$1/ \text{Tính } \int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx.$$

2/ Chứng minh:

$$\frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3n+3}C_n^n = \frac{2^{n+1}-1}{3n+3}.$$

#### Giải

1/ Ta có:

$$\int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx = \frac{1}{3} \int_0^1 (1+x^3)^n d(1+x^3) = \frac{2^{n+1}-1}{3n+3}. \quad (1)$$

2/ Áp dụng khai triển nhị thức Newton ta có:

$$\begin{aligned} (1+x^3)^n &= C_n^0 + C_n^1 x^3 + C_n^2 x^6 + C_n^3 x^9 + \dots + C_n^n x^{3n} \\ \Rightarrow x^2 (1+x^3)^n &= C_n^0 x^2 + C_n^1 x^5 + C_n^2 x^8 + C_n^3 x^{11} + \dots + C_n^n x^{3n+2} \\ \Rightarrow \int_0^1 x^2 (1+x^3)^n dx &= C_n^0 \int_0^1 x^2 dx + C_n^1 \int_0^1 x^5 dx + C_n^2 \int_0^1 x^8 dx + \dots + C_n^n \int_0^1 x^{3n+2} dx \\ &= \frac{1}{3}C_n^0 + \frac{1}{6}C_n^1 + \frac{1}{9}C_n^2 + \dots + \frac{1}{3n+3}C_n^n. \end{aligned} \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra đpcm.

**Nhận xét:**

Nếu bài ra chỉ có phần 2/ thì ta phải tự chọn hàm số:  $f(x) = x^2(1 + x^3)^n$ .  
Nhưng điều này có thể hơi khó, vì vậy phần 1/ là sự gợi ý cho phần 2/.

**Loại 2:** Các bài toán sử dụng kết hợp với các biến đổi đại số.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)

Tìm  $n$  nguyên dương để có hệ thức sau:

$$C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} = 2048.$$

**Giải**

Xét hàm số  $f(x) = (1+x)^{2n}$ .

Ta có theo công thức khai triển nhị thức Newton

$$f(x) = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + C_{2n}^3 x^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} x^{2n-1} + C_{2n}^{2n} x^{2n}.$$

Từ đó ta có:

$$f(1) = 2^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} + C_{2n}^{2n} \quad (2)$$

$$f(-1) = 0 = C_{2n}^0 - C_{2n}^1 + C_{2n}^2 - C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1} - C_{2n}^{2n} \quad (3)$$

Trừ từng vế (1) cho (2) ta đi đến  $2^{2n} = 2(C_{2n}^1 + C_{2n}^3 + \dots + C_{2n}^{2n-1}) \quad (3)$

Từ (3) và giả thiết suy ra  $2^{2n-1} = 2048 = 2^{11}$ .

$\Rightarrow n = 6$ .

**Chú ý:** Một đề thi dễ hơn cùng loại trên (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002) có dạng:

Tìm  $n$  để có hệ thức:  $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243$ .

Xét  $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$

$$\Rightarrow f(2) = 3^n = C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2 C_n^2 + \dots + 2^n C_n^n = 243 = 3^5 \Rightarrow n = 5.$$

**Thí dụ 2:**

Khai triển  $(1 + x + x^2 + x^3)^5$  thành đa thức  $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{15} x^{15}$ .

Tính  $a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15}$ .

**Giải**

Đặt  $f(x) = (1 + x + x^2 + x^3)^5 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{15} x^{15}$

$$\Rightarrow f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + \dots + a_{15} = 4^5 = 1024.$$

**Thí dụ 3:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A, B – 2005)

Chứng minh rằng với mọi  $n$  nguyên dương, ta có:

$$C_{2n}^n = \left(C_n^0\right)^2 + \left(C_n^1\right)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2.$$

**Giải**

Xét  $f(x) = (1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n$ .

Ta có:

$$f^2(x) = (1+x)^{2n} = C_{2n}^0 + C_{2n}^1 x + C_{2n}^2 x^2 + \dots + (C_{2n}^n x^n) + \dots + C_{2n}^{2n} x^{2n}. \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } f^2(x) = (1+x)^n (1+x)^n$$

$$= (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n) (C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^n x^n). \quad (2)$$

Hệ số của  $x^n$  ở vế phải của (1) là  $C_{2n}^n$ .

Hệ số của  $x^n$  ở vế phải của (2) (dựa vào phép nhân hai đa thức) là:

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + C_n^2 C_n^{n-2} + \dots + C_n^{n-1} C_n^1 + C_n^n C_n^0 = (C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \dots + (C_n^n)^2.$$

Từ đó suy ra đpcm.

**Thí dụ 4:**

Chứng minh rằng trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{23}$  tổng các hệ số của các lũy thừa bậc nguyên dương của  $x$  là số chính phương.

**Giải**

Theo công thức khai triển Newton, ta có:

$$\left(x + \frac{1}{x}\right)^{23} = \sum_{k=0}^{23} C_{23}^k x^k \left(\frac{1}{x}\right)^{23-k} = \sum_{k=0}^{23} C_{23}^k x^{2k-23}.$$

Xét bất phương trình:  $2k - 23 > 0 \Leftrightarrow k > \frac{23}{2} \Leftrightarrow k = 12, 13, \dots, 23$  (do  $k$  nguyên dương).

Vậy các lũy thừa bậc nguyên dương của  $x$  ứng với  $k = 12, 13, \dots, 23$ . Do đó tổng các hệ số lũy thừa bậc nguyên dương của  $x$  là:

$$C_{23}^{12} + C_{23}^{13} + \dots + C_{23}^{23} \quad (1)$$

Áp dụng công thức  $C_n^k = C_n^{n-k}$ , ta có:

$$C_{23}^0 = C_{23}^{23}, C_{23}^1 = C_{23}^{22}, \dots, C_{23}^{11} = C_{23}^{12}.$$

$$\text{Vì thế: } C_{23}^0 + C_{23}^1 + C_{23}^2 + \dots + C_{23}^{23} = 2(C_{23}^{12} + C_{23}^{13} + \dots + C_{23}^{23}) \quad (2)$$

$$\text{Xét } f(x) = (1+x)^{23} = C_{23}^0 + C_{23}^1 x + \dots + C_{23}^{23} x^{23} \Rightarrow f(1) = 2^{23}$$

Từ đó thay vào (2) ta có:

$$2^{23} = 2(C_{23}^{12} + C_{23}^{13} + \dots + C_{23}^{23}) \Rightarrow C_{23}^{12} + \dots + C_{23}^{23} = 2^{22} = (2^{11})^2 \Rightarrow \text{đpcm.}$$

## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Tìm số hạng không chứa  $x$  trong khai triển nhị thức:  $\left(x\sqrt[3]{x} + x^{-\frac{28}{25}}\right)^{12}$ .

Đáp số: 729.

### Bài 2:

Biết rằng tổng tất cả các hệ số của khai triển nhị thức  $(x^2+1)^n$  bằng 1024. Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^{12}$  trong khai triển trên

Đáp số: 210.

### Bài 3:

Gọi  $a_1, a_2, \dots, a_{11}$  là hệ số trong khai triển

$$(x+1)^{10}(x+2) = x^{11} + a_1x^{10} + a_2x^9 + \dots + a_{10}x + a_{11}.$$

Tìm hệ số của  $a_5$ .

Đáp số: 672.

### Bài 4:

Giả sử  $(1+x+x^2+x^3)^5$  có khai triển thành đa thức:  $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_{15}x^{15}$ .

Tính  $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \dots - a_{15}$ .

Đáp số: 0.

**Bài 5:** Trong khai triển  $(\sqrt{3} - \sqrt[4]{5})^{124}$  có bao nhiêu số hạng là số nguyên?

Đáp số: 32.

### Bài 6:

Tìm hệ số của  $x^7$  trong khai triển thành đa thức của  $(2-3x)^{2n}$ , biết

$$C_{2n+1}^1 + C_{2n+1}^2 + \dots + C_{2n+1}^{2n+1} = 1024.$$

Đáp số:  $-C_{10}^7 \cdot 2^3 \cdot 3^7$ .

### Bài 7:

Chứng minh rằng:

$$100C_{100}^0 \left(\frac{1}{2}\right)^{99} - 101C_{100}^1 \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + \dots - 199C_{100}^{99} \left(\frac{1}{2}\right)^{198} + 200C_{100}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^{199} = 0.$$

Hướng dẫn: Áp dụng khai triển nhị thức Newton với  $(x^2+x)^{100}$ .

**Bài 8:** Tìm số hạng lớn nhất trong khai triển  $(1+0,2)^{1000}$ .

Đáp số:  $C_{1000}^{166} 5^{-166}$ .

### Bài 9:

Tổng các hệ số của khai triển  $\left(\frac{1}{x} + x^3\right)^n$  là 1024. Tìm hệ số của  $x^6$  trong khai triển đó.

Đáp số: 210.

**Bài 10:**

Tìm hệ số của số hạng chứa  $x^7$  trong khai triển  $\left(x + \frac{1}{x}\right)^{15}$ .

Đáp số: 1365.

**Bài 11:**

Xét khai triển:

$$\left(\sqrt[3]{2} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \left(\sqrt[3]{2}\right)^k \left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)^{n-k}.$$

Biết rằng tỉ số của số hạng thứ 7 kể từ số hạng đầu, với số hạng thứ 7 tính từ dưới lên bằng 6. Tìm  $n$ .

Đáp số: 9.

**Bài 12:**

Cho  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh

$$1 + \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 + \dots + \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{2^{n+1} - 1}{n+1}.$$

Hướng dẫn: Tính  $\int_0^1 f(x) dx$  theo hai cách ở đây  $f(x) = (1+x)^n$ .

**Bài 13:**

1/ Tính tích phân  $\int_0^1 x(1-x)^n dx$ .

2/ Chứng minh:  $\frac{1}{2}C_n^0 - \frac{1}{4}C_n^1 + \frac{1}{6}C_n^2 - \frac{1}{8}C_n^3 + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+2}C_n^n = \frac{1}{2n+2}.$

**Bài 14:**

Cho  $n$  là số nguyên dương. Chứng minh

1/  $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + (n-1)C_n^{n-1} + nC_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$

2/  $2 \cdot 1C_n^2 + 3 \cdot 2C_n^3 + 4 \cdot 3C_n^4 + \dots + n(n-1)C_n^n = n(n-1)2^{n-2}.$

Hướng dẫn:

1/ Tính  $f'(x)$  theo hai cách với  $f(x) = (1+x)^n$ .

2/ Tính  $f''(x)$  theo hai cách với  $f(x) = (1+x)^n$ .



## Bài giảng số 11

# CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ TỔ HỢP CHỈNH HỢP VÀ PHÉP ĐẾM

Bài giảng này đề cập đến các loại toán sau đây của chủ đề này:

- Giải phương trình liên quan đến số tổ hợp, chỉnh hợp.
- Chứng minh các hệ thức tổ hợp (không sử dụng công thức khai triển của nhị thức Newton).
- Các bài toán về phép đếm.

## §1. CHỨNG MINH CÁC HỆ THỨC TỔ HỢP

Phương pháp giải này dựa trực tiếp vào các công thức tính các số tổ hợp  $C_n^k$ , số chỉnh hợp  $A_n^k$  và số hoán vị  $P_n$ . Hai công thức rất hay sử dụng trong mục này là:

$$C_n^k = C_n^{n-k} \text{ và } C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1}.$$

Xét các thí dụ minh họa sau đây:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

Cho  $n$  nguyên dương và  $k$  nguyên ( $0 \leq k \leq n$ ).

Chứng minh hệ thức sau:

$$\frac{n+1}{n+2} \left( \frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) = \frac{1}{C_n^k}.$$

**Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{n+1}{n+2} \left( \frac{1}{C_{n+1}^k} + \frac{1}{C_{n+1}^{k+1}} \right) &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{C_{n+1}^{k+1} + C_{n+1}^k}{C_{n+1}^k C_{n+1}^{k+1}} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{C_{n+2}^{k+1}}{C_{n+1}^k C_{n+1}^{k+1}} = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{(n+2)!}{(k+1)!(n+1-k)!} \cdot \frac{k!(n+1-k)!(n-k)!}{(n+1)!(n+1)!} \\ &= \frac{(n+1)(n+1)!(n+2)k!(n-k)!}{(n+2)(n+1)!n!(n+1)} = \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{1}{C_n^k} \Rightarrow \text{đpcm.} \end{aligned}$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hùng Vương – 2006)**

Chứng minh với mọi số tự nhiên  $n \geq 2$ , ta có:

$$\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} = \frac{n-1}{n}.$$

### Giải

Ta có

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A_2^2} + \frac{1}{A_3^2} + \frac{1}{A_4^2} + \dots + \frac{1}{A_n^2} &= \frac{0!}{2!} + \frac{1!}{3!} + \frac{2!}{4!} + \dots + \frac{(n-2)!}{n!} \\
&= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{(n-1)n} \\
&= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

#### **Thí dụ 3:**

Cho  $k, n$  là các số nguyên và  $4 \leq k \leq n$ . Chứng minh:

$$C_n^k + 4C_n^{k-1} + C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} = C_{n+4}^k.$$

### Giải

Áp dụng tính chất của số tổ hợp, ta có:

$$\begin{aligned}
C_{n+4}^k &= C_{n+3}^k + C_{n+3}^{k-1} \\
&= (C_{n+2}^k + C_{n+2}^{k-1}) + (C_{n+2}^{k-1} + C_{n+2}^{k-2}) \\
&= (C_{n+1}^k + C_{n+1}^{k-1}) + 2(C_{n+1}^{k-1} + C_{n+1}^{k-2}) + (C_{n+1}^{k-2} + C_{n+1}^{k-3}) \\
&= (C_n^k + C_n^{k-1}) + 3(C_n^{k-1} + C_n^{k-2}) + 3(C_n^{k-2} + C_n^{k-3}) + (C_n^{k-3} + C_n^{k-4}) \\
&= C_n^k + 4C_n^{k-1} + 6C_n^{k-2} + 4C_n^{k-3} + C_n^{k-4} \Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

#### **Thí dụ 4:**

Chứng minh rằng với mọi số nguyên  $n \geq 1$ , ta có:

$$C_n^1 + 2 \frac{C_n^2}{C_n^1} + 3 \frac{C_n^3}{C_n^2} + \dots + n \frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} = C_{n+1}^2.$$

### Giải

Với  $k = 1, 2, \dots, n$  ta có:

$$\begin{aligned}
k \frac{C_n^k}{C_n^{k-1}} &= k \frac{n!(n+1-k)!(k-1)!}{(n-k)!k!n!} = \frac{(k-1)!k(n-k)!(n+1-k)}{(n-k)!k!} \\
&= n - k + 1.
\end{aligned}$$

Từ đó suy ra:

$$\begin{aligned}
C_n^1 + 2 \frac{C_n^2}{C_n^1} + 3 \frac{C_n^3}{C_n^2} + \dots + n \frac{C_n^n}{C_n^{n-1}} &= n + (n-1) + (n-2) + \dots + 1 \\
&= \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2 \Rightarrow \text{đpcm.}
\end{aligned}$$

#### **Thí dụ 5:**

Cho  $n \geq 2$  là số nguyên, chứng minh rằng:

$$P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + (n-1)P_{n-1},$$

ở đây  $P_k$  là số hoán vị của  $k$  phần tử,  $k = 1, 2, \dots, n$ .

### Giải

Ta có:  $P_k - P_{k+1} = k! - (k-1)! = (k-1)!k - (k-1)! = (k-1)(k-1)! = (k-1)P_{k-1}$  (1)

Áp dụng liên tiếp (1) ta có: 
$$\begin{cases} P_2 - P_1 = P_1 \\ P_3 - P_2 = 2P_2 \\ P_n - P_{n-1} = (n-1)P_{n-1} \end{cases}$$

Cộng từng vế các đẳng thức trên, ta có:

$$P_n - P_1 = P_1 + 2P_2 + \dots + (n-1)P_{n-1}.$$

Do  $P_1 = 1 \Rightarrow P_n = 1 + P_1 + 2P_2 + 3P_3 + \dots + (n-1)P_{n-1} \Rightarrow \text{đpcm.}$

**Nhận xét:** Ta có thể chứng minh hệ thức trên bằng phương pháp quy nạp toán học. Xin dành cách giải đó cho bạn đọc.

## §2. GIẢI PHƯƠNG TRÌNH LIÊN QUAN ĐẾN SỐ TỔ HỢP, SỐ CHỈNH HỢP

Với các phương trình, bất phương trình thuộc loại này, cách giải tiến hành như sau:

- Đặt điều kiện để phương trình, bất phương trình có nghĩa. Xin lưu ý để  $A_n^k$ ,  $C_n^k$  có nghĩa ta cần có:  $n > 0$ ,  $n \geq k \geq 0$ ,  $n, k$  là các số nguyên.
- Sử dụng các công thức về số tổ hợp, số chỉnh hợp, số hoán vị đưa phương trình đã cho về các phương trình đại số.
- Nghiệm tìm được phải đối chiếu với các điều kiện đặt ra ban đầu (đặc biệt chú ý đến tính nguyên của nghiệm), để loại bỏ đi các nghiệm ngoại lai.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Biết rằng số  $n$  nguyên dương thỏa mãn hệ thức

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149.$$

Tính giá trị của biểu thức:  $M = \frac{A_{n+1}^4 + 3A_n^3}{(n+1)!}.$

### Giải

Xét phương trình sau (ẩn  $n$ )

$$C_{n+1}^2 + 2C_{n+2}^2 + 2C_{n+3}^2 + C_{n+4}^2 = 149 \quad (1)$$

Khi  $n+1 \geq 2 \Rightarrow n+2 > 2; n+3 > 2; n+4 > 2$ . Vậy điều kiện để (1) có nghĩa là  $n \geq 1$ , với  $n$  nguyên.

Áp dụng công thức tính số tổ hợp, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} + 2 \frac{(n+2)!}{n!2!} + 2 \frac{(n+3)!}{(n+1)!2!} + \frac{(n+4)!}{(n+2)!2!} = 149$$

$$\Leftrightarrow \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)(n+2) + (n+2)(n+3) + \frac{(n+3)(n+4)}{2} = 149$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 4n - 45 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = -9 \end{cases} \quad (n = -9 \text{ loại do } n \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow n = 5.$$

Khi  $n = 5$ , dễ dàng thấy  $M = \frac{A_6^4 + 3A_5^3}{6!} = \frac{3}{4}$ .

**Nhận xét:**

Thực chất bài thi trên là đòi hỏi giải một phương trình liên quan đến số tổ hợp. Phần tính giá trị của  $M$  là quá đơn giản.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Cho tập hợp  $A$  gồm  $n$  phần tử ( $n \geq 4$ ). Biết rằng số tập hợp con gồm 4 phần tử của  $A$  bằng 20 lần số tập hợp con gồm 2 phần tử của  $A$ .

1/ Tìm  $n$ .

2/ Tìm  $k \in \{1, 2, \dots, n\}$  sao cho số tập hợp con gồm  $k$  phần tử của tập hợp  $A$  là lớn nhất.

### Giải

1/ Số tập hợp con có 4 phần tử của  $A$  là  $C_n^4$  còn số tập hợp con có 2 phần tử của  $A$  là  $C_n^2$ . Theo bài ra ta có phương trình:

$$C_n^4 = 20C_n^2 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-4)!4!} = 20 \frac{n!}{(n-2)!2!} \Leftrightarrow n^2 - 5n - 234 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} n = 18 \\ n = -13 \end{cases} \quad (n = -13 \text{ loại do } n \geq 4).$$

Vậy tập hợp  $A$  có 18 phần tử.

2/ Số tập hợp con có  $k$  phần tử của tập hợp  $A$  có 18 phần tử là  $C_{18}^k$

Xét bất phương trình:

$$C_{18}^k < C_{18}^{k+1} \Leftrightarrow \frac{18!}{(18-k)!k!} < \frac{18!}{(17-k)!(k+1)!}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{18-k} < \frac{1}{k+1} \Leftrightarrow k+1 < 18-k \Leftrightarrow k < \frac{17}{2} \Leftrightarrow k = 1, 2, \dots, 8.$$

Từ đó suy ra:  $C_{18}^k > C_{18}^{k+1} \Leftrightarrow k > \frac{17}{2} \Leftrightarrow k = 9, 10, \dots, 17.$

Do đó  $C_{18}^1 < C_{18}^2 < \dots < C_{18}^8 < C_{18}^9 > C_{18}^{10} > C_{18}^{11} > \dots > C_{18}^{18}.$

Vậy số tập hợp con gồm 9 phần tử của  $A$  là số tập con lớn nhất.

**Nhận xét:**

Đây là một thí dụ mẫu mực của việc áp dụng giải phương trình, giải bất phương trình với một bài toán có nội dung liên quan đến số tổ hợp.

**Thí dụ 3: (Đề thi Đại học khối B – 2002)**

Cho đa giác đều  $A_1A_2, \dots, A_{2n}$  ( $n \geq 2$ ,  $n$  nguyên) nội tiếp đường tròn (O). Biết rằng số tam giác có 3 đỉnh trong  $2n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$  gấp 20 lần số hình chữ nhật có 4 đỉnh trong  $2n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ . Tìm  $n$ .

**Giải**

Để thấy số tam giác là  $C_{2n}^3$ .

Một đa giác đều  $2n$  đỉnh thì có  $n$  đường chéo xuyên tâm (đường chéo đi qua tâm của đa giác đều, cũng là tâm của đường tròn tâm (O)). Cứ hai đường chéo xuyên tâm có 1 hình chữ nhật có 4 đỉnh trong  $2n$  điểm  $A_1, A_2, \dots, A_{2n}$ . Vậy số hình chữ nhật là  $C_n^2$ . Theo bài ra ta có phương trình:

$$\begin{aligned} C_{2n}^3 &= 20C_n^2 \\ \Leftrightarrow \frac{(2n)!}{(2n-3)!3!} &= 20 \frac{n!}{(n-2)!2!} \\ \Leftrightarrow \frac{(2n-2)(2n-1)2n}{6} &= 20 \frac{n(n-1)}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{(2n-2)(2n-1)}{3} &= 10(n-1) \quad (\text{do } n \geq 2) \\ \Leftrightarrow n &= 8. \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

Trong 3 thí dụ, mặc dù ở dạng ban đầu trong đầu bài không nói gì đến việc giải phương trình hoặc bất phương trình liên quan đến số tổ hợp, số chỉnh hợp... nhưng thực chất của bài toán lại chính là điều ấy.

Dưới đây ta sẽ xét các thí dụ mà trong đó ngay từ đầu đã yêu cầu giải phương trình (hoặc bất phương trình) liên quan đến số tổ hợp, chỉnh hợp.

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm TP Hồ Chí Minh – 2005)**

Tìm tất cả các số tự nhiên  $x, y$  sao cho:  $A_x^{y-1} : A_{x-1}^y : C_{x-1}^y = 21 : 60 : 10$ . (1)

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghiệm là 
$$\begin{cases} y \geq 1 \\ x - y \geq 1 \\ y - 1 \geq 0 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 1 \\ x \geq y + 1 \\ x, y \in \mathbb{Z} \end{cases} \quad (2)$$

Ta có:  $\frac{A_{x-1}^y}{C_{x-1}^y} = \frac{60}{10} \Leftrightarrow \frac{y!C_{x-1}^y}{C_{x-1}^y} = 6 \Leftrightarrow y! = 3! \Leftrightarrow y = 3$

Thay lại vào (1) ta có:  $\frac{A_x^{y-1}}{A_{x-1}^y} = \frac{21}{60} \Leftrightarrow \frac{A_x^2}{A_{x-1}^3} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow \frac{x!(x-4)!}{(x-2)!(x-1)!} = \frac{7}{20}$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{(x-3)(x-2)} = \frac{7}{20} \Leftrightarrow 7x^2 - 55x + 42 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ x=\frac{6}{7} \text{ (} x=\frac{6}{7} \text{ loại do } x \geq 4, x \in \mathbb{Z} \text{)} \end{cases}$$

Vậy  $x = 7, y = 3$  là cặp số duy nhất thỏa mãn yêu cầu đề bài:

**Nhận xét:**

Tương tự bài trên, trong đề thi tuyển sinh vào “*Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội - 2004*” có dạng:

Giải hệ: 
$$\begin{cases} 2A_y^x + 5C_y^x = 90 \\ 5A_y^x - 2C_y^x = 80 \end{cases}$$

Ta có ngay  $A_y^x = 20, C_y^x = 10 \Rightarrow x = 2; y = 5$ .

**Thí dụ 5:**

Giải bất phương trình: 
$$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10.$$

**Giải**

Xét bất phương trình: 
$$\frac{1}{2}A_{2x}^2 - A_x^2 \leq \frac{6}{x}C_x^3 + 10. \quad (1)$$

Điều kiện để (1) có nghiệm là  $x \geq 3, x \in \mathbb{Z} \quad (2)$

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{(2x)!}{(2x-2)!} - \frac{x!}{(x-2)!} \leq \frac{6}{x} \frac{x!}{(x-3)!3!} + 10$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-1)2x}{2} - x(x-1) \leq (x-2)(x-1) + 10 \Leftrightarrow 3x-12 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 4 \quad (3)$$

Từ (2) (3) suy ra:  $x = 3; x = 4$ .

**Thí dụ 6:**

Cho tập hợp A gồm n phần tử,  $n > 4$ . Tìm n biết rằng trong số các tập con của A có đúng 16n tập con có số phần tử là lẻ.

**Giải**

$C_n^1, C_n^3, C_n^5, \dots$ , lần lượt là số các tập hợp con của A có 1, 3, 5... phần tử.

Ta có:  $C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 2^{n-1}. \quad (1)$

(1) chứng minh như sau:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1x + C_n^2x^2 + \dots + C_n^nx^n,$$

$$(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - \dots + (-1)^n C_n^nx^n.$$

Từ đó suy ra:  $(1+x)^n - (1-x)^n = 2(C_n^1x + C_n^3x^3 + \dots) \quad (2)$

Trong (2) cho  $x = 1$ , ta có:  $2^n = 2(C_n^1 + C_n^3 + \dots) \Rightarrow (1) \text{ đúng.}$

Theo bài ra ta có phương trình:

$$2^{n-1} = 16n \Leftrightarrow 2^{n-5} = n \quad (3)$$

Rõ ràng  $n = 5$  không thỏa mãn (3). vậy ta xét (3) với  $n \geq 6$ .

Xét hàm số  $f(x) = 2^{x-5} - x$  với  $x \geq 6$

$$f'(x) = 2^{x-5} \ln 2 - 1 \geq 2 \ln 2 - 1 > 0 \text{ với } x \geq 6$$

Vậy  $f(x)$  là hàm đồng biến khi  $x \geq 6$ , lại có  $f(8) = 0$ , vậy suy ra (3) có nghiệm duy nhất  $n = 8$ . Do đó  $n = 8$  là nghiệm duy nhất của bài toán.

**Nhận xét chung:**

Trong bài toán trên ta đã sử dụng tổng hợp các kiến thức sau:

- Nhị thức Newton.
- Ứng dụng tính đồng biến của hàm số để nhằm mục đích giải phương trình:

$$C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \dots = 16n.$$

Ta có thể nói rằng giải phương trình và bất phương trình tổ hợp còn có mặt trong nhiều đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng khác. (Trong các đề thi việc giải các phương trình này là bước thứ nhất của lời giải. Sau khi tìm được  $n$  ta mới giải được tiếp bài toán).

### §3. CÁC BÀI TOÁN VỀ PHÉP ĐẾM

Hai quy tắc chính để giải các bài toán về phép đếm là: Quy tắc cộng và quy tắc nhân.

Hai phương pháp chính để giải các bài toán về phép đếm là:

- Phương pháp trực tiếp.
- Phương pháp gián tiếp.

Hai loại bài toán về phép đếm là:

- Phép đếm không lặp.
- Phép đếm có lặp.

#### A. PHÉP ĐẾM KHÔNG LẶP

Trong phép đếm không lặp, mỗi yếu tố cấu thành nên phần tử cần đếm chỉ xuất hiện tối đa một lần, không có sự lặp lại.

Đây là bài toán chủ đạo của phép đếm. Trong số các bài toán về phép đếm có mặt trong các đề thi tuyển sinh từ 2002-2009, các bài toán về phép đếm không lặp chiếm tỉ lệ 95% (là 100% đối với các đề thi tuyển sinh vào Đại học các khối A, B, D trong những năm ấy).

Như đã nói ở trên, để giải các bài toán về phép đếm không lặp, ta có hai phương pháp chính để giải:

##### a. Phương pháp trực tiếp

Phép đếm trực tiếp là phương pháp đi thẳng vào các yêu cầu bài toán đặt ra, nói một cách nôm na “hỏi gì, đếm nấy” là nội dung của phương pháp này.

Để sử dụng được phương pháp trực tiếp ta chủ yếu dùng quy tắc cộng và quy tắc nhân. Nên lưu ý rằng nói chung trong mỗi bài toán về phép đếm hai quy tắc này thường sử dụng đồng thời và đan xen lẫn nhau:

**b. Phương pháp gián tiếp:**

Phương pháp này dựa trên nguyên lý “đếm những cái không cần đếm, để biết những cái cần đếm”. Nói theo ngôn ngữ của lý thuyết tập hợp, thì phương pháp gián tiếp thực chất là “phép lấy phần bù”.

Dĩ nhiên quy tắc cộng và quy tắc nhân vẫn sẽ là công cụ chính dùng trong phương pháp gián tiếp này.

**Các dạng toán cơ bản**

**Loại 1:** Sử dụng phương pháp trực tiếp giải các bài toán phép đếm không lặp

**Thí dụ 1: (Đề thi Đại học khối B – 2004)**

Trong một môn học, thầy giáo có 30 câu hỏi khác nhau gồm 5 câu hỏi khó, 10 câu hỏi trung bình, 15 câu hỏi dễ. Từ 30 câu hỏi đó có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra, mỗi đề gồm 5 câu hỏi khác nhau, sao cho trong mỗi đề nhất thiết phải có đủ 3 loại câu hỏi và số câu hỏi dễ không ít hơn 2?

**Giải**

Gọi A là tập hợp các cách chọn đề có 3 câu hỏi dễ, 1 câu hỏi khó, 1 câu hỏi trung bình.

Gọi B là tập hợp các cách chọn đề có 2 câu hỏi dễ, 2 câu hỏi khó, 1 câu trung bình.

Gọi C là tập hợp các cách chọn đề có 2 câu hỏi dễ, 1 câu hỏi khó, 2 câu trung bình. Gọi  $\Omega$  là tập hợp cách chọn đề theo yêu cầu đề bài.

Ta có  $\Omega = A \cup B \cup C$ .

Do A, B, C đôi một không giao nhau, nên theo quy tắc cộng, ta có:

$$|\Omega| = |A| + |B| + |C|. \quad (1)$$

Sử dụng quy tắc nhân, ta có:

$$|A| = C_{15}^3 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^1 = 22750 ; |B| = C_{15}^2 \cdot C_5^2 \cdot C_{10}^1 = 10500 ;$$

$$|C| = C_{15}^2 \cdot C_5^1 \cdot C_{10}^2 = 23625 .$$

Thay vào (1) ta có:  $|\Omega| = 56875$ .

Vậy có 56875 cách chọn đề kiểm tra thỏa mãn yêu cầu.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Một đội thanh niên tình nguyện có 15 người gồm 12 nam, 3 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách phân công đội thanh niên đó về giúp đỡ 3 tỉnh miền núi, sao cho mỗi tỉnh có 4 nam và 1 nữ?

**Giải**

Đầu tiên, chọn 4 nam và 1 nữ cho tỉnh thứ nhất. Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$n_1 = C_{12}^4 \cdot C_3^1 = 1485 .$$

Sau đó chọn 4 nam (trong 8 nam còn lại) và 1 nữ (trong 2 nữ còn lại) cho tỉnh thứ hai. Lại theo quy tắc nhân, số cách chọn là:

$$n_2 = C_8^4 \cdot C_2^1 = 140 .$$

(Dĩ nhiên còn lại ta chọn xong tỉnh thứ 3)

Vậy theo quy tắc nhân, số cách phân công theo yêu cầu là:

$$n = n_1 \cdot n_2 = 1485 \cdot 140 = 207900 .$$

**Nhận xét:**

Bài thi được giải thuần túy chỉ bằng quy tắc nhân.



**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Cơ khí luyện kim – 2005)**

Có 5 Nhà Toán học nam, 3 Nhà Toán học nữ, 4 Nhà Vật lí nam. Lập một đoàn công tác 3 người cần có cả nam và nữ, cả nhà toán học và nhà vật lí học. Hỏi có bao nhiêu cách lập đoàn công tác?

**Giải**

Chỉ có 3 cách lập đoàn công tác như sau:

- Gồm 2 Nhà Vật lí nam, 1 Nhà Toán học nữ. Theo quy tắc nhân số cách chọn là:

$$C_2^2 C_3^1 = 6.3 = 18.$$

- Gồm 1 Nhà Vật lí nam, 2 Nhà Toán học nữ. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là:

$$C_4^1 C_3^2 = 4.3 = 12.$$

- Gồm 1 Nhà Vật lí nam, 2 Nhà Toán học nữ, 1 Nhà Toán học nam. Theo quy tắc nhân, số cách chọn là:  $C_4^1 C_3^1 C_5^1 = 4.3.5 = 60$ .

Theo quy tắc cộng, số cách lập đoàn công tác là:  $18 + 12 + 60 = 90$ .

Vậy có 90 cách lập đoàn công tác.

**Thí dụ 4:**

Có 6 quả cầu xanh đánh số từ 1 đến 6, 5 quả cầu đỏ đánh số từ 1 đến 5, 4 quả cầu vàng đánh số từ 1 đến 4.

Hỏi có bao nhiêu cách lấy ra 3 quả cầu vừa khác màu, vừa khác số.

**Giải**

Sử dụng quy tắc nhân để giải bài toán trên:

- Bước 1: Chọn cầu vàng  $n_1 = 4$ .

- Bước 2: Chọn cầu đỏ: Lúc này phải loại đi quả cầu đỏ đã có số trùng với quả cầu vàng đã chọn ở bước 1, vì thế số cách chọn quả cầu đỏ là  $n_2 = 4$ .

- Bước 3: Chọn cầu xanh: Lần này phải loại đi 2 quả cầu xanh có số trùng với số của quả cầu đỏ đã chọn ở bước 2 và quả cầu vàng đã chọn ở bước 1. Vì thế số cách chọn quả cầu xanh là  $n_3 = 4$ .

Theo quy tắc nhân, số cách chọn 3 quả cầu sẽ là  $n = n_1.n_2.n_3 = 64$ .

**Thí dụ 5:**

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mà mỗi số có 6 chữ số khác nhau và chữ số 2 đứng cạnh chữ số 3?

**Giải**

Ta “dán” hai chữ số 2 và 3 liền nhau thành “chữ số kép”. Có hai cách dán (23 hoặc 32). Bài toán trở thành: có 5 chữ số là 0, 1, 4, 5 và số kép. Hỏi có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số có 5 chữ số khác nhau?

Ta giải bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1: Dán số 2 và 3 với nhau, có  $n_1 = 2$  cách.

Bước 2: Số hàng vạn, có  $n_2 = 4$  cách (trừ số 0)

Bước 3: Số hàng nghìn có,  $n_3 = 4$  cách chọn

Bước 4: số hàng trăm, có  $n_4 = 3$  cách chọn

Bước 5: số hàng chục, có  $n_5 = 2$  cách chọn

Bước 6: Số hàng đơn vị, có  $n_6 = 1$  cách chọn.

Vậy số các số cần chọn theo quy tắc nhân là:

$$n = n_1.n_2.n_3.n_4.n_5.n_6 = 2.4.4.3.2.1 = 192.$$

**Thí dụ 6:**

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên mỗi số gồm 6 chữ số khác nhau và tổng của các chữ số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn bằng 8.

**Giải**

Gọi A là tập hợp các số cần tìm. Mỗi phần tử của A có dạng:

$$\overline{a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6},$$

trong đó  $a_i, a_j$  đôi một khác nhau (được chọn trong tập hợp 9 số đã cho), ngoài ra  $a_3 + a_4 + a_5 = 8$ .

Ta có:  $1 + 2 + 5 = 1 + 3 + 4 = 8$ , vậy có hai cách chọn nhóm 3 số để các số hàng chục, hàng trăm, hàng nghìn có tổng bằng 8. Từ đó ta sử dụng quy tắc nhân để giải bài toán như sau:

Bước 1: Chọn ra 3 trong 8 số đã có  $a_3 + a_4 + a_5 = 8$ . Theo trên số cách chọn  $n_1 = 2$ .

Bước 2: Với ba số chọn ở bước 1, có:

$$n_2 = 3! = 6 \text{ cách lập số } \overline{a_3 a_4 a_5}.$$

Bước 3: Chọn ra số  $\overline{a_1 a_2 a_6}$  theo thứ tự trên. Đây là cách chọn 3 trong 6 số, có thứ tự sắp xếp. Số cách chọn  $n_3 = A_6^3 = 120$ .

Theo quy tắc nhân, số cách chọn theo yêu cầu là  $n = n_1 n_2 n_3 = 2 \cdot 6 \cdot 120 = 1440$ .

**Thí dụ 7:**

Từ các chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn có 5 chữ số khác nhau mà mỗi số lập được đều nhỏ hơn 2500?

**Giải**

Xét hai khả năng:

1/ Xét tập hợp  $A_1$  có các số có dạng  $\overline{1a_2 a_3 a_4 a_5}$ , trong đó  $a_5 \in \{0; 2; 4; 6\}$ .

Để tìm  $|A_1|$  ta sẽ sử dụng quy tắc nhân như sau:

- Chọn  $a_5$ : số cách chọn  $n_1 = 4$ .

- Chọn  $\overline{a_2 a_3 a_4}$ . Đó là chọn 3 trong 5 số (kể cả thứ tự). Số cách chọn là:

$$n_2 = A_5^3 = 60.$$

Theo quy tắc nhân:  $|A_1| = n_1 n_2 = 4 \cdot 60 = 240$  cách.

2/ Xét tập hợp  $A_2$  các số có dạng  $\overline{2a_2 a_3 a_4 a_5}$ , trong đó  $a_5 \in \{0; 4; 6\}$  và  $a_2 \leq 4$ .

Có 3 trường hợp sau:

(1) Tập hợp  $A_{20}$  là tập hợp các số có dạng  $\overline{2a_2 a_3 a_4 0}$ .

Vì  $a_2 \leq 4$ , nên có  $n_1 = 3$  cách chọn  $a_2$ . Để chọn  $\overline{a_3 a_4}$  có  $n_2 = A_4^2 = 12$  cách chọn. Theo quy tắc nhân:  $|A_{20}| = 3 \cdot 12 = 36$  cách.

(2) Tập hợp  $A_{24}$  là tập hợp các số có dạng  $\overline{2a_2 a_3 a_4 4}$ .

Tương tự như trường hợp (1), ta có:  $|A_{24}| = 36$  cách.

(3) Tập hợp  $A_{26}$  là tập hợp các số có dạng:  $\overline{2a_2 a_3 a_4 6}$ .

Vì  $a_2 \leq 4$  bây giờ có thể chọn  $a_2 \in \{0; 1; 4; 5\}$ , nên có  $n_1 = 4$  cách chọn  $a_2$ .

Vậy  $|A_{26}| = 2 \cdot 12 = 24$  cách.

Theo quy tắc cộng, ta có:  $|A_2| = |A_{20}| + |A_{24}| + |A_{26}| = 36 + 36 + 48 = 120$  cách.  
Gọi A là tập hợp cần tìm. Theo quy tắc cộng, ta có

$$|A| = |A_1| + |A_2| = 240 + 120 = 360.$$

Vậy có 360 số cần tìm.

**Loại 2:** Sử dụng phương pháp gián tiếp giải các bài toán về phép đếm không lặp:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh, gồm 5 học sinh lớp T, 4 học sinh lớp L và 3 học sinh lớp H. Cần chọn 4 học sinh tham gia trực tuần, sao cho 4 học sinh đó thuộc không quá 2 trong 3 lớp nói trên. Hỏi có bao nhiêu cách chọn?

**Giải**

Gọi A là tập hợp mọi cách chọn 4 học sinh trong 12 học sinh.

Gọi B là tập hợp các cách chọn không thỏa mãn yêu cầu đầu bài (tức là chọn đủ học sinh 3 lớp).

Gọi C là tập hợp cách chọn thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

Ta có  $A = B \cup C$ ;  $B \cap C = \emptyset$ .

Theo quy tắc cộng, ta có:  $|A| = |B| + |C| \Rightarrow |C| = |A| - |B|$ . (1)

Ta có ngay  $|A| = C_{12}^4 = 495$ . (2)

Để tính  $|B|$ , ta nhận thấy sẽ chọn 1 lớp có 2 học sinh và 2 lớp còn lại mỗi lớp 1 học sinh. Theo quy tắc cộng và nhân ta có:

$$|B| = C_5^2 C_4^1 C_3^1 + C_4^2 C_5^1 C_3^1 + C_3^2 C_5^1 C_4^1 = 120 + 90 + 60 = 270. \quad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) và có:  $|C| = 495 - 270 = 225$ .

Vậy có 225 cách chọn.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Hà Nội – 2005)**

Trong một tổ học sinh của lớp 12A có 8 nam và 4 nữ. Thầy giáo muốn chọn 3 học sinh để làm trực nhật lớp học, trong đó phải có ít nhất 1 học sinh nam. Hỏi thầy giáo có bao nhiêu cách chọn?

**Giải**

Gọi A là tập hợp số cách chọn tùy ý 3 học sinh trong 12 học sinh.

Gọi B là tập hợp số cách chọn cả 3 nữ sinh.

Gọi C là tập hợp số cách chọn theo yêu cầu đề ra.

Ta có (lập luận như thí dụ 1)

$$|C| = |A| - |B|. \quad (1)$$

Để thấy:  $|A| = C_{12}^3 = 220$ ,

$$|B| = C_4^3 = 4.$$

Từ đó theo (1) ta có:  $|C| = 220 - 4 = 216$ .

Vậy có 216 cách chọn.

**Nhận xét:**

Hoàn toàn tương tự trong đề thi tuyển sinh “Cao đẳng khối A – 2004” có bài toán:

Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Có bao nhiêu cách chọn 3 em trong lớp để trực tuần sao cho trong 3 em đó luôn có cán bộ lớp?

Giải bằng phương pháp gián tiếp số cách đó là:

$$C_{30}^3 - C_{27}^3 = 4060 - 2925 = 1135.$$

**Thí dụ 3:**

Một hộp đựng 4 viên bi đỏ, 5 viên bi trắng và 6 viên bi vàng. Người ta chọn ra 4 viên từ trong hộp đó. Hỏi có bao nhiêu cách chọn để số bi lấy ra không đủ cả 3 màu?

**Giải**

Gọi A là tập hợp các cách chọn 4 viên bi tùy ý trong 15 viên.

Gọi B là tập hợp các cách chọn 4 viên bi đủ cả 3 màu.

Gọi C là tập hợp các cách chọn 4 viên bi theo yêu cầu đầu bài.

Ta có:  $|C| = |A| - |B|$ . (1)

Để thấy  $|A| = C_{15}^4 = 1365$ . (2)

Gọi  $B_1$  là tập hợp các cách chọn 2 viên bi đỏ, 1 trắng, 1 xanh.

$B_2$  là tập hợp các cách chọn 1 bi đỏ, 2 trắng, 1 xanh.

$B_3$  là tập hợp các cách chọn 1 bi đỏ, 1 trắng, 2 xanh.

Theo quy tắc cộng và nhân, ta có:

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = C_4^2 C_5^1 C_6^1 + C_4^1 C_5^2 C_6^1 + C_4^1 C_5^1 C_6^2 = 720. \quad (3)$$

Thay (2) (3) vào (1) và có:

$$|C| = 1365 - 720 = 645.$$

Vậy có 645 cách chọn 4 viên bi theo yêu cầu đề bài.

**Thí dụ 4:**

Ở một trường tiểu học có 50 em là học sinh giỏi, trong đó có 4 cặp em sinh đôi. Cần chọn ra 3 học sinh trong số 50 em để đi dự trại hè. Hỏi có bao nhiêu cách chọn mà trong nhóm 3 em được chọn không có cặp anh em sinh đôi nào?

**Giải**

Gọi A là tập hợp các cách chọn tùy ý 3 em trong số 50 em.

Gọi B là tập hợp các cách chọn 3 em, trong đó có 1 cặp sinh đôi.

Gọi C là tập hợp các cách chọn 3 em theo yêu cầu đề bài.

Ta có:  $|C| = |A| - |B|$ . (1)

Ta có  $|A| = C_{50}^3 = 19600$ .

Tìm  $|B|$  theo quy tắc nhân như sau:

- Chọn cặp sinh đôi: có  $n_1 = 4$  cách chọn.

- Chọn 1 em còn lại trong 48 em, có  $n_2 = 48$  cách chọn.

Theo quy tắc nhân ta có:

$$|B| = n_1 n_2 = 4 \cdot 48 = 192.$$

Vậy từ (1) suy ra:  $|C| = 19600 - 192 = 19408$ .

Vậy số cách chọn là 19408.

**Thí dụ 5:**

Cho hình thập giác lồi. Hỏi có thể lập được bao nhiêu tam giác có đỉnh là đỉnh của thập giác lồi, nhưng cạnh của tam giác không phải là cạnh của thập giác lồi?

**Giải**

Gọi A là tập hợp tất cả các tam giác có 3 đỉnh là các đỉnh của thập giác.

Gọi B là tập hợp tất cả các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của thập giác nhưng có ít nhất 1 cạnh cũng là cạnh của thập giác.

Gọi C là tập hợp cần tìm ta có:

$$|C| = |A| - |B|. \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } |A| = C_{10}^3 = 120. \quad (2)$$

Gọi  $B_1$  là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh là đỉnh của thập giác và có đúng 1 cạnh là cạnh của thập giác;  $B_2$  là tập hợp các tam giác có 3 đỉnh của thập giác và có 2 cạnh là cạnh của thập giác. Khi đó theo quy tắc cộng, ta có:

$$|B| = |B_1| + |B_2|. \quad (3)$$

Để tính  $|B_1|$  ta sẽ sử dụng quy tắc nhân như sau:

- Bước 1: Chọn 1 cạnh của thập giác làm cạnh của tam giác. Số cách chọn  $n_1 = 10$ .

- Bước 2: Khi đó đỉnh thứ ba cần chọn của tam giác được chọn trong 6 đỉnh còn lại (trừ 2 đỉnh của cạnh được chọn và 2 đỉnh khác của thập giác kề với hai đỉnh ấy). Số cách chọn là:  $n_2 = 6$ . Vì thế

$$|B_1| = n_1 n_2 = 10 \cdot 6 = 60.$$

$$\text{Để thấy } |B_2| = 10.$$

$$\text{Từ đó theo (3), ta có: } |B| = 70. \quad (4)$$

Từ (2) (3) (4) suy ra:

$$|C| = 120 - 70 = 50.$$

Vậy có 50 tam giác thỏa mãn yêu cầu đề bài.

### **Thí dụ 6:**

Một thầy giáo có 12 cuốn sách đôi một khác nhau, trong đó có 5 cuốn sách Văn học, 4 cuốn âm nhạc, và 3 cuốn hội họa (các cuốn đôi một khác nhau). Ông muốn lấy ra 6 cuốn và đem tặng cho 6 học sinh, mỗi học sinh một cuốn sao cho sau khi tặng sách xong, mỗi một trong 3 thể loại văn học, âm nhạc, hội họa đều còn lại ít nhất 1 cuốn. Hỏi có bao nhiêu cách tặng?

### **Giải**

Gọi A là tập hợp tất cả các cách tặng sách cho học sinh.

Gọi B là tập hợp tất cả các cách tặng sao cho sau khi tặng sách không còn đủ ba thể loại; và C là tập hợp tất cả các cách tặng theo yêu cầu. Ta có:

$$|C| = |A| - |B|. \quad (1)$$

$$\text{Để thấy } |A| = C_{12}^6 \cdot 6! = 665280 \quad (2)$$

( $C_{12}^6$  là cách chọn 6 quyển trong 12 quyển. Sau khi có 6 quyển thì có 6! cách tặng 6 quyển sách cho 6 học sinh).

Vì  $5 + 4 > 6$ ,  $5 + 3 > 6$ ,  $4 + 3 > 6$ , nên không xảy ra trường hợp sau khi tặng sách xong chỉ còn lại 1 thể loại sách.

Vì thế  $B = B_1 \cup B_2 \cup B_3$ , trong đó

$B_1, B_2, B_3$  tương ứng là tập hợp tất cả các cách tặng sách mà sau khi tặng sách xong, thầy giáo hết sách văn học, hết sách âm nhạc, hết sách hội họa.

$$\text{Ta có ngay: } |B_1| = C_7^1 \cdot 6! = 5040.$$

(Vì  $B_1$  là tập hợp tất cả các cách tặng 5 sách văn học và 1 sách khác. Cuốn sách khác tùy chọn trong 7 cuốn còn lại.

$$\text{Tương tự: } |B_2| = C_8^2 \cdot 6! = 20160; |B_3| = C_9^3 \cdot 6! = 60480.$$

Theo quy tắc cộng thì:

$$|B| = |B_1| + |B_2| + |B_3| = 85680. \quad (3)$$

$$\text{Từ (1) (2) (3) suy ra: } |C| = 665280 - 85680 = 579.600.$$

## B. PHÉP ĐẾM CÓ LẬP

Để giải bài toán về phép đếm có lập, người ta quy về phép đếm không lập và sử dụng các phương pháp giải như đã dùng trong §1.

### Thí dụ 1

Cho tập hợp  $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ . Có thể lập được bao nhiêu số có 4 chữ số không yêu cầu đôi một khác nhau (các chữ số này chọn từ tập hợp  $E$ ) sao cho mỗi số tạo thành đều chia hết cho 4?

### Giải

Như đã biết một số có từ hai chữ số trở lên chia hết cho 4 khi và chỉ khi hai số cuối của số đó chia hết cho 4.

Từ tập hợp  $E$  có thể chọn ra các số sau có hai chữ số mà chia hết cho 4:

12, 16, 24, 28, 32, 36, 44, 52, 56, 64.

Ta giải bài toán trên bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1: Chọn 2 số cuối, theo trên ta có số cách chọn  $n_1 = 9$ .

Bước 2: Chọn số hàng trăm, số cách chọn  $n_2 = 6$ .

Bước 3: Chọn số hàng nghìn, số cách chọn  $n_3 = 6$ .

Theo quy tắc nhân, số các số phải tìm là  $n = n_1 n_2 n_3 = 9.6.6 = 324$ .

*Nhận xét:*

- Ở đây không đòi hỏi các chữ số của số có 4 chữ số đôi một khác nhau, nên cho phép các số đã dùng rồi được dùng lại (phép đếm có lập).

- Nếu bài toán đòi hỏi thêm: Các chữ số có 4 chữ số phải đôi một khác nhau. Các bạn thử giải bài toán về phép đếm không lập này.

*Đáp số:* 96 số.

### Thí dụ 2:

Có thể lập được bao nhiêu số có 6 chữ số sao cho số 1 có mặt tối đa 5 lần, các số 2, 3, 4 mỗi số có mặt tối đa 1 lần?

### Giải

Dễ thấy số 1 có mặt tối thiểu 3 lần.

Gọi  $A_3$  là tập hợp các số có 6 chữ số, sao cho số 1 có mặt 3 lần, mỗi số 2, 3, 4 có mặt 1 lần.

Gọi  $A_4$  là tập hợp số có 6 chữ số, sao cho số 1 có mặt 4 lần, mỗi số 2, 3, 4 có mặt tối đa 1 lần (hoặc không có mặt).

Gọi  $A_5$  là tập hợp số có 6 chữ số, sao cho số 1 có mặt 5 lần, mỗi số 2, 3, 4 có mặt tối đa 1 lần (hoặc không có mặt).

Tính  $|A_3|$  bằng quy tắc nhân như sau:

Bước 1: Chọn 3 vị trí trong 6 vị trí để đặt 3 số 1. Số cách chọn là:

$$n_1 = C_6^3 = 20.$$

Bước 2: 3 vị trí còn lại đặt ba số 2, 3, 4. Số cách chọn là:

$$n_2 = 3! = 6.$$

theo quy tắc nhân  $|A_3| = n_1 n_2 = 120$ .

Tương tự ta có  $|A_4| = C_6^4 A_3^2 = 90$ ,

$$|A_5| = C_6^5 A_3^1 = 18.$$

Theo quy tắc cộng số các số thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$|A_3| + |A_4| + |A_5| = 228 \text{ số.}$$

### **Thí dụ 3:**

Biển số xe là một dãy gồm 2 chữ cái đứng trước và 4 chữ số đứng sau: Các chữ cái được lấy từ 26 chữ cái A, B, C, ..., Z. Các chữ số được chọn từ 10 chữ số 0, 1, 2, ..., 8, 9. Có bao nhiêu biển số xe có hai chữ cái khác nhau, đồng thời có đúng hai chữ số lẻ và hai chữ số chẵn giống nhau?

### **Giải**

Bước 1: Chọn hai chữ cái khác nhau, số cách chọn là  $n_1 = A_{26}^2 = 650$ .

Bước 2: Chọn hai số lẻ giống nhau, số cách chọn là  $n_2 = 5$ .

Bước 3: Chọn 2 vị trí trong 4 vị trí để đặt 2 chữ số lẻ giống nhau, vì thế đây là cách chọn 2 vị trí trong 4 vị trí mà không quan tâm đến thứ tự sắp xếp. Do vậy số cách chọn là  $n_3 = C_4^2 = 6$ .

Bước 4: Sắp xếp 2 số chẵn vào 2 vị trí còn lại. Đây là cách chọn 2 phần tử có thể lặp lại trong 5 phần tử. Mỗi vị trí đều có 5 cách chọn, nên số cách chọn là  $n_4 = 5^2 = 25$ .

Theo quy tắc nhân, số biển số xe thỏa mãn yêu cầu đề bài là:

$$n = n_1 n_2 n_3 n_4 = 650 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 25 = 487500.$$

## **BÀI TẬP TỰ GIẢI**

### **Bài 1:**

Từ các chữ số 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên, sao cho mỗi số có 6 chữ số và thỏa mãn điều kiện: sáu chữ số của một số là khác nhau và trong mỗi số đó tổng của ba chữ số đầu nhỏ hơn tổng của ba chữ số cuối 1 đơn vị.

**Đáp số:** 108.

### **Bài 2:**

Từ chín chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn mà mỗi số gồm 7 chữ số khác nhau?

**Đáp số:** 90720.

### **Bài 3:**

Từ các số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 có thể lập được bao nhiêu số tự nhiên chẵn, mỗi số có 5 chữ số khác nhau trong đó có đúng 2 chữ số lẻ và 2 chữ số chẵn đứng cạnh nhau.

**Đáp số:** 360.

### **Bài 4:**

Cho 10 chữ số 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Lập được bao nhiêu số lẻ có 6 chữ số khác nhau nhỏ hơn 600000 xây dựng từ 10 số trên?

**Đáp số:** 36960.

**Bài 5:**

Tìm tất cả các số tự nhiên có đúng 5 chữ số sao cho trong mỗi số đó chữ số sau lớn hơn chữ số đứng liền trước.

*Đáp số:* 126.

**Bài 6:**

Từ 5 bông hồng vàng, 3 bông hồng trắng và 4 bông hồng đỏ (các bông hoa này xem như đôi một khác nhau), người ta muốn chọn ra 1 bó hoa gồm 7 bông.

1/ Có mấy cách chọn bó hoa trong đó có đúng 1 bông màu đỏ?

2/ Có mấy cách chọn bó hoa trong đó có ít nhất 3 bông vàng và ít nhất 3 bông đỏ?

*Đáp số:* 1/ 112                      2/ 150.

**Bài 7:**

Có 12 cây giống 3 loại: xoài, mít, ổi, trong đó có 6 cây xoài, 4 cây mít, 2 cây ổi. Muốn chọn ra 6 cây giống để trồng. Hỏi có bao nhiêu cách chọn sao cho số cây mít nhiều hơn số cây xoài?

*Đáp số:* 172.

**Bài 8:**

Một đội văn nghệ có 15 người gồm 10 nam, 5 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập một nhóm đồng ca gồm 8 người, sao cho có ít nhất 3 nữ.

*Đáp số:* 3690.

**Bài 9:**

Một lớp học có 30 học sinh, trong đó có 3 cán bộ lớp. Hỏi có bao nhiêu cách chọn 3 em trong lớp để trực tuần sao cho trong ba em đó luôn luôn có cán bộ lớp?

*Đáp số:* 1135.

**Bài 10:**

Trong một toa tàu có 2 ghế xa-lông đối mặt nhau, mỗi ghế có 4 chỗ ngồi. Trong số 8 hành khách, có 3 người muốn ngồi nhìn theo hướng tàu chạy, 2 người muốn ngồi ngược lại, 3 người còn lại không có yêu cầu gì. Hỏi có bao nhiêu cách sắp xếp khách ngồi?

*Đáp số:* 1728.

**Bài 11:**

Số điện thoại của một thành phố có 6 chữ số được lựa chọn trong tập  $\{0; 1; 2; \dots; 8; 9\}$ .

1/ Có bao nhiêu số điện thoại gồm 3 cặp hai số giống nhau (tức là có dạng  $ababab$ ), chấp nhận cả số 000000?

2/ Có bao nhiêu số điện thoại mà số 6 có mặt 2 lần, số 2 và số 5 mỗi số có mặt đúng 1 lần và hai số còn lại có tổng chia hết cho 3?

*Đáp số:* 1/ 100                      2/ 2700.



# Bài giảng số 12

## PHÉP TÍNH TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Các bài toán về tích phân là một trong những bài toán lúc nào cũng có mặt trong các đề thi môn Toán vào các trường Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây (2002 – 2009).

Bài giảng này giới thiệu các phương pháp chính để tính tích phân và ứng dụng của tích phân để tìm diện tích hình phẳng và thể tích của khối tròn xoay.

### §1. CÁC PHƯƠNG PHÁP TÍNH TÍCH PHÂN

#### A. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG BẢNG NGUYÊN HÀM

Để sử dụng được phương pháp này ngoài việc sử dụng thành thạo bảng nguyên hàm, còn phải nắm vững các phép tính vi phân và biến đổi thành thạo các đẳng thức về phép tính vi phân.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Tính tích phân:  $I = \int_1^3 \frac{dx}{e^x - 1}$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_1^3 \frac{e^x - (e^x - 1)}{e^x - 1} dx = \int_1^3 \frac{d(e^x - 1)}{e^x - 1} - \int_1^3 dx \\ &= \ln(e^x - 1) \Big|_1^3 - 2 = \ln \frac{e^3 - 1}{e - 1} - 2 = \ln(e^2 + e + 1) - 2. \end{aligned}$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) dx}{\sin 2x + 2(1 + \sin x + \cos x)}$ .

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có } I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\sin x - \cos x) dx}{1 + \sin 2x + 2(\sin x + \cos x) + 1} = \frac{-1}{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin x + \cos x)}{(1 + \sin x + \cos x)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{1 + \sin x + \cos x} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) = \frac{4 - 3\sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**

Tính tích phân: 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{\cos^2 x + 4 \sin^2 x}}.$$

**Giải**

Nhận thấy  $d(\cos^2 x + 4 \sin^2 x) = (-2 \cos x \sin x + 8 \sin x \cos x) dx = 3 \sin 2x dx$ .

Vậy 
$$I = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x + 4 \sin^2 x)^{-\frac{1}{2}} d(\cos^2 x + 4 \sin^2 x)$$
$$= \frac{1}{3} \frac{(\cos^2 x + 4 \sin^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{2}{3} \left( \sqrt{\frac{5}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{3} (\sqrt{10} - 2).$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Tính tích phân: 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (e^{\sin x} + \cos x) \cos x dx.$$

**Giải**

Ta có: 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \cos x dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$$
$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} d(\sin x) + \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin 2x \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = e^{\sin x} \bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{\pi}{4} = e - 1 + \frac{\pi}{4}.$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)**

Tính tích phân: 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx.$$

**Giải**

Ta có 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - 2 \sin^2 x}{1 + \sin 2x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x dx}{1 + \sin 2x}$$
$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(1 + \sin 2x)}{1 + \sin 2x} = \frac{1}{2} \ln(1 + \sin 2x) \bigg|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} (\ln 2 - \ln 1) = \frac{1}{2} \ln 2.$$

**Nhận xét chung:**

Phương pháp dùng bảng nguyên hàm thực chất là một phép đổi biến và là một phép đổi biến đơn giản. Tuy nhiên, dùng phương pháp này có hai thuận lợi:

- Không cần thực hiện các phép đổi cận không cần thiết.
- Cách trình bày đơn giản.

Xét thêm các thí dụ sau:

**Thí dụ 6:**

Tính tích phân: 
$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin x + \cos x) dx}{\sqrt[3]{\sin x - \cos x}}.$$

**Giải**

Ta có:

$$I = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - \cos x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x - \cos x) = \frac{(\sin x - \cos x)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \bigg|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{2} \sqrt[3]{2(\sqrt{3}-1)^2} \right).$$

**Thí dụ 7:**

Tính tích phân: 
$$I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \sqrt{1 + \cos^2 x}}.$$

**Giải**

Ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x dx}{\cos^2 x \cos x \sqrt{1 + \frac{1}{\cos^2 x}}} = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\tan x dx}{\cos^2 x \sqrt{2 + \tan^2 x}} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2 + \tan^2 x)^{-\frac{1}{2}} d(2 + \tan^2 x) = \frac{1}{2} \frac{(2 + \tan^2 x)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}. \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

Thí dụ trên cho ta thấy rõ tính hiệu quả khi sử dụng phương pháp bảng nguyên hàm.

**Thí dụ 8:**

Cho  $b > a > 0$ , tính tích phân:

$$I = \int_a^b \ln \left[ (x+a)^{x+a} (x+b)^{x+b} \right] \frac{dx}{(x+a)(x+b)}.$$

**Giải**

Ta có:

$$I = \int_a^b \frac{(x+a) \ln(x+a) + (x+b) \ln(x+b)}{(x+a)(x+b)} dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_a^b \left[ \frac{\ln(x+a)}{x+b} + \frac{\ln(x+b)}{x+a} \right] dx = 1 = \int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \int_{-1}^0 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx + \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx \\
 &= \int_a^b d[\ln(x+a)\ln(x+b)] \\
 &\quad \text{(Theo công thức } d(uv) = u dv + v du) \\
 &= \ln(x+a)\ln(x+b) \Big|_a^b = \ln \frac{b}{a} \cdot \ln(a+b).
 \end{aligned}$$

*Nhận xét:*

Đây là thí dụ đẹp chứng tỏ tính hiệu quả cao của việc sử dụng phương pháp bảng nguyên hàm.

## B. PHƯƠNG PHÁP ĐỔI BIẾN SỐ

Đổi biến số là một trong những phương pháp quan trọng nhất để tính nguyên hàm và tích phân. Trong mục này chúng tôi trình bày các phương pháp đổi biến số thông dụng nhất:

**Loại 1:** Sử dụng công thức:  $\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt$ .

Giả sử ta cần tính tích phân  $I = \int_a^b g(x)dx$ . Nếu bằng cách nào đó ta viết được biểu thức dưới dấu tích phân  $g(x)dx$  dưới dạng.

$$f[u(x)]u'(x)dx = f[u(x)]d(u(x))$$

Khi đó ta có:  $\int_a^b g(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)du$ , với  $\alpha = u(a)$ ;  $\beta = u(b)$ .

Vậy bài toán quy về việc tính tích phân mới này đơn giản hơn nhiều so với tích phân ban đầu. Phép đổi biến ở đây là  $t = u(x)$ , và nhớ khi đổi biến thì phải đổi cận lấy tích phân.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**

Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{\cos 2x}.$$

**Giải**

Ta có:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{\cos 2x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x dx}{(1 - \tan^2 x) \cos^2 x} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\tan^4 x d(\tan x)}{1 - \tan^2 x} \quad (1)$$

$$(\text{do } 1 - \tan^2 x = 1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cos 2x}{\cos^2 x})$$

Đặt  $t = \tan x$  (khi  $x = 0$ , thì  $t = 0$ , còn khi  $x = \frac{\pi}{6}$  thì  $t = \frac{\sqrt{3}}{3}$ )

Vậy từ (1) ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4 dt}{1-t^2} = - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4 - 1 + 1}{t^2 - 1} dt = - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} (t^2 + 1) dt - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{(t+1) - (t-1)}{(t-1)(t+1)} dt \\ &= -\frac{t^3}{3} \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - t \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} - \frac{1}{2} \left[ \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{(t-1)} - \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dt}{(t+1)} \right] \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{27} - \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{t-1}{t+1} \right| \Big|_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} = -\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln(\sqrt{3}-1)^2 = -\frac{10\sqrt{3}}{27} + \frac{1}{2} \ln(2+\sqrt{3}). \end{aligned}$$

**Nhận xét:** Dĩ nhiên trong thí dụ này ta dùng phương pháp đổi biến số trong

đoạn đầu. Sau đó việc tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{t^4 dt}{1-t^2}$  được thực hiện nhờ phép tính “thêm bớt” và sử dụng bảng nguyên hàm.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Tính tích phân:  $I = \int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x dx}{x}$ .

**Giải**

Ta có:  $\int_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x} \ln x dx}{x} = \int_1^e \sqrt{1+3\ln x} \ln x d(\ln x)$ .

Đặt  $t = \ln x$  (khi  $x = 1$ , thì  $t = 0$ ; khi  $x = e$ , thì  $t = 1$ ,

Từ (1) ta có:  $I = \int_0^1 \sqrt{1+3t} \cdot t dt$  (2)

Ta có từ (2)

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{1+3t} (1+3t-1) dt = \frac{1}{3} \int_0^1 (1+3t)^{\frac{3}{2}} d(1+3t) - \frac{1}{9} \int_0^1 (1+3t)^{\frac{1}{2}} d(1+3t) \\ &= \frac{1}{9} \left[ \frac{(1+3t)^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 - \frac{(1+3t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 \right] = \frac{2}{9} \left( \frac{32}{5} - \frac{1}{5} - \frac{8}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{116}{135}. \end{aligned}$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Tính tích phân:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x dx}{1 + \cos x}.$$

**Giải**

Ta có

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x \cos x dx}{(1 + \cos x)} = - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \cos^2 x d(\cos x)}{(1 + \cos x)} \quad (1)$$

Đặt  $t = \cos x$  (khi  $x = 0$ , thì  $t = 1$ ; khi  $x = \frac{\pi}{2}$  thì  $t = 0$ ).

Khi đó ta có:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \frac{2t^2 dt}{1+t} = \int_0^1 \frac{2t(1+t) - 2(1+t) + 2}{(1+t)} dt = \int_0^1 2t dt - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt + \int_0^1 \frac{1}{1+t} dt \\ &= t^2 \Big|_0^1 - 2t \Big|_0^1 + 2 \ln(1+t) \Big|_0^1 = 2 \ln 2 - 1. \end{aligned}$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Tính tích phân:  $I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}.$

**Giải**

$$\text{Ta có } I = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{d(e^x)}{e^{2x} - 3e^x + 2} \quad (1)$$

Đặt  $t = e^x$  (khi  $x = \ln 3$ , thì  $t = 3$ ; khi  $x = \ln 5$ , thì  $t = 5$ ).

Ta có:

$$I = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = \int_3^5 \frac{(t-1) - (t-2)}{(t-2)(t-1)} dt = \ln \left| \frac{t-2}{t-1} \right| \Big|_3^5 = \ln \frac{3}{4} - \ln \frac{1}{2} = \ln \frac{3}{2}.$$

**Thí dụ 5:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx.$

**Giải**

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 x \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{(1 - \cos^2 x) d(\cos x)}{\cos x} \quad (1)$$

Đặt  $t = \cos x$  (khi  $x = 0$ , thì  $t = 1$ ; khi  $x = \frac{\pi}{3}$  thì  $t = \frac{1}{2}$ ).

$$\text{Vậy } I = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{(1-t^2)dt}{t} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{dt}{t} - \int_{\frac{1}{2}}^1 t dt = \ln t \left|_{\frac{1}{2}}^1 - \frac{t^2}{2} \right|_{\frac{1}{2}}^1 = \ln 2 - \frac{3}{8}.$$

**Loại 2:** Đổi biến khi hàm dưới dấu tích phân chứa biểu thức dạng  $\sqrt[n]{f(x)}$ .

Trong nhiều trường hợp (chứ không phải tất cả các trường hợp) ta có thể dùng phép đổi biến sau đây:

$$t = \sqrt[n]{f(x)}.$$

Đây là một trong những phép biến đổi thông dụng hay gặp.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_1^2 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x-1}}.$$

Đặt  $t = \sqrt{x-1}$  (khi  $x = 1$ , thì  $t = 0$ ; khi  $x = 2$ , thì  $t = 1$ ).

Ta có  $t^2 = x - 1 \Rightarrow 2t dt = dx$ . Vậy

$$I = \int_0^1 \frac{(t^2 + 1)2t dt}{1 + t}. \quad (1)$$

Ta có:  $\frac{2t^3 + 2t}{1 + t} = 2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{1 + t}$ , nên từ (1) ta có

$$I = 2 \int_0^1 t^2 dt - 2 \int_0^1 t dt + 4 \int_0^1 dt - 4 \int_0^1 \frac{dt}{1 + t} = \frac{11}{3} - 4 \ln 2.$$

**Thí dụ 2:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_1^e \frac{\sqrt{1 + 3 \ln x} \cdot \ln x dx}{x}.$$

**Giải**

Đặt  $t = \sqrt{1 + 3 \ln x}$  (khi  $x = 1 \Rightarrow t = 1$ ; khi  $x = 3 \Rightarrow t = 2$ )

$$\text{Ta có: } t^2 = 1 + 3 \ln x \Rightarrow 2t dt = \frac{3 dx}{x} \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2t dt}{3}$$

$$\text{Vậy } I = \int_1^2 \frac{t(t^2 - 1)}{3} \cdot \frac{2t dt}{3} = \frac{2}{9} \left[ \int_1^2 t^4 dt - \int_1^2 t^2 dt \right] = \frac{116}{135}.$$

**Chú ý:**

Các bạn hãy so sánh với cách giải cũng của thí dụ này trình bày trong thí dụ 2, loại 1 phần B (phương pháp đổi biến số).

**Thí dụ 3:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1 + 3 \cos x}} dx.$$

### Giải

Đặt  $t = \sqrt{1+3\cos x}$  (khi  $x = 0 \Rightarrow t = 2$ ; khi  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 1$ )

Ta có  $t^2 = 1+3\cos x \Rightarrow 2tdt = -3\sin x dx$

$$\text{Ta có: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x (2\cos x + 1)}{\sqrt{1+3\cos x}} dx = -\int_2^1 \frac{2 \left(1 + 2\frac{t^2-1}{3}\right)}{t} dt = \frac{2}{9} \int_1^2 (2t^2 + 1) dt = \frac{34}{27}.$$

#### **Thí dụ 4:**

Tính tích phân:  $I = \int_1^{\sqrt{e}} \frac{3-2\ln x}{x\sqrt{1+2\ln x}} dx.$

### Giải

Đặt  $t = \sqrt{1+2\ln x}$  (khi  $x = 1$  thì  $t = 1$ , khi  $x = \sqrt{e}$  thì  $t = \sqrt{2}$ ).

Ta có:  $t^2 = 1+2\ln x \Rightarrow tdt = \frac{dx}{x}$ . Vậy ta có:

$$\int_1^{\sqrt{2}} \frac{3 - (t^2 - 1)}{t} tdt = 4 \int_1^{\sqrt{2}} dt - \int_1^{\sqrt{2}} t^2 dt = \frac{10}{3}\sqrt{2} - \frac{11}{3}.$$

#### **Thí dụ 5:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2 + 2 + 2\sqrt{1+x^2}}.$

### Giải

$$\text{Ta có } I = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{d(x^2+1)}{(\sqrt{x^2+1}+1)^2} = \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{dt}{(1+\sqrt{t})^2} \quad (1)$$

(đặt  $t = \sqrt{x^2+1}$ )

Đặt  $u = \sqrt{t}$  (khi  $t = 1 \Rightarrow u = 1$ ;  $t = 4 \Rightarrow u = 2$ ).

Ta có  $u^2 = t \Rightarrow dt = 2udu$ . Vậy từ (1) ta có:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{2udu}{(1+u)^2} = \int_1^2 \frac{1+u-1}{(1+u)^2} du = \int_1^2 \frac{d(1+u)}{1+u} - \int_1^2 \frac{d(1+u)}{(1+u)^2} \\ &= \ln(1+u) \Big|_1^2 + \frac{1}{u+1} \Big|_1^2 = \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

#### **Nhận xét:**

Trong thí dụ trên ta sử dụng nhiều phương pháp để tính tích phân  $I$  (bảng nguyên hàm, đổi biến số loại 1, loại 2).

**Loại 3:** Đổi biến khi hàm dưới dấu tích phân có dạng  $\sqrt{a^2-x^2}$  hoặc  $(a^2+x^2)^k$  hoặc  $\sqrt{x^2-a^2}$ .



- Khi biểu thức dưới dấu tích phân có chứa biểu thức dưới dạng  $\sqrt{a^2 - x^2}$  hoặc  $\sqrt{x^2 - a^2}$  nói chung ta sẽ gặp khó khăn nếu sử dụng phương pháp đổi biến nói trong loại 2 (đặt  $t = \sqrt{x^2 - a^2}$  hoặc  $t = \sqrt{a^2 - x^2}$ ). Với tích phân này người ta đổi biến như sau:

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có dạng  $\sqrt{a^2 - x^2}$  ta hãy đặt  $x = asint$  hoặc  $x = acost$ .

+ Nếu biểu thức dưới dấu tích phân có chứa biểu thức dưới dạng  $\sqrt{x^2 - a^2}$  ta hãy đặt  $x = \frac{a}{sint}$  hoặc  $x = \frac{a}{cost}$ .

- Khi biểu thức dưới dấu tích phân có chứa biểu thức dưới dạng  $(a^2 + x^2)^k$  ta hãy đặt:  $x = tant$  hoặc  $x = cott$ .

**Thí dụ 1:** (Trích trong đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx$ .

**Giải**

Đặt  $x = 4sint$  (khi  $x = 0$  thì  $t = 0$ , khi  $x = \sqrt{8}$  thì  $t = \frac{\pi}{4}$ )  $\Rightarrow dx = 4cost dt$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{16 - 16\sin^2 t} \cdot 4 \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{4}} 16 \cos t | \cos t | dt \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} 2 \cos^2 t dt \quad (\text{vì khi } 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4} \text{ thì } \cos t > 0) \\ &= 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2t) dt = 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} dt + 8 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2t dt = 2\pi + 4 \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = 2\pi + 4. \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

1/ Trong quá trình giải đề thi bắt buộc phải tính tích phân  $I = \int_0^{\sqrt{8}} \sqrt{16 - x^2} dx$ .

2/ Mặc dầu hàm dưới dấu tích phân có chứa căn thức, nên nếu ta biến đổi giống trong loại 2:  $t = \sqrt{a^2 - x^2}$  thì chắc chắn sẽ gặp rắc rối (các bạn thử làm xem và giải thích vì sao lại như vậy). Đây chính là thí dụ chứng tỏ rằng không phải cứ thấy  $\sqrt{f(x)}$  là thực hiện phép đổi biến số  $t = \sqrt{f(x)}$ .

**Thí dụ 2:**

Tính tích phân:  $I = \int_{-\frac{3\sqrt{3}}{2}}^{\frac{3}{2}} \frac{dx}{\sqrt{(9-x^2)^3}}$ .

**Giải**

Đặt  $x = 3\sin t$ , với  $t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

Khi  $x = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$  thì  $t = -\frac{\pi}{4}$ , khi  $x = \frac{3}{2}$  thì  $t = \frac{\pi}{6}$ .

Ta có:  $dx = 3\cos t dt$ , và vì thế

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{3\cos t dt}{3^3 |\cos^3 t|} = \frac{1}{9} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos t dt}{|\cos^3 t|} \quad (\text{do } \cos t > 0) \\ &= \frac{1}{9} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{9} \tan t \Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}+3}{27}. \end{aligned}$$

**Thí dụ 3:**

Tính tích phân:  $I = \int_{3\sqrt{2}}^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$

**Giải**

Đặt  $x = \frac{3}{\cos t}$  với  $t \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

(khi  $x = 3\sqrt{2} \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{4}$ ; còn khi  $x = 6 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{2} \Rightarrow t = \frac{\pi}{3}$ ).

Ta có  $dx = \frac{3\sin t dt}{\cos^2 t}$  từ đó  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{3\sin t dt}{\cos^2 t \cdot \frac{3}{\cos t} \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9}} = \frac{1}{3} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} dt = \frac{\pi}{36}$ .

**Thí dụ 4:**

Tính tích phân:  $I = \int_{-\frac{\sqrt{3}}{3}}^{\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$ .

**Giải**

Đặt  $x = \tan t$  với  $t \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$  (khi  $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = -\frac{\pi}{6}$ ;  $x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ )

Ta có:  $dx = \frac{dt}{\cos^2 t}$  nên  $I = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dt}{\cos^2 t \sqrt{\frac{1}{\cos^6 t}}} = \int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos t dt = \sin t \Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$ .

**Loại 4:** Đổi biến khi biểu thức dưới dấu tích phân có chứa hàm số lượng giác. Các phép biến đổi thường dùng với tích phân này là đặt  $t = \sin x$ , hoặc  $t = \cos x$ ;  $t = \tan x$ , hoặc  $t = \cot x$ .

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A- 2009)**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx$ .

**Giải**

Ta có  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^3 x - 1) \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$  (1)

Dễ thấy:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + 2\cos x}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \frac{\pi}{4}$ . (2)

Mặt khác:  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x \cos x dx$  (3)

Do đó đặt  $t = \sin x$ , ta có  $dt = \cos x dx$  và từ (3) ta có:

$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx = \int_0^1 (1 - t^2)^2 dt = \int_0^1 dt - 2 \int_0^1 t^2 dt + \int_0^1 t^4 dt = \frac{8}{15}$ . (4)

Thay (2) (4) vào (1) ta có:  $I = \frac{8}{15} - \frac{\pi}{4}$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin x \cos x dx}{1 + \cos x}$ .

**Giải**

Đặt  $t = \cos x$  (khi đó nếu  $x = 0 \Rightarrow t = 1$ ;  $x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = 0$ )

Ta có:  $dt = -\sin x dx$ . Khi đó  $I = \int_1^0 \frac{2 \sin x \cos^2 x dx}{1 + \cos x} = - \int_1^0 \frac{2t^2}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{2t^2}{1+t} dt$ .

$= 2 \ln 2 - 1$ . (tính như trong thí dụ 3, loại 1, mục B).

**Loại 5:** Một số phương pháp đổi biến đặc biệt để tính tích phân:

Trong mục này chúng tôi giới thiệu vài phép đổi biến đặc biệt (không thông dụng) để tính tích phân với mục đích để các bạn tham khảo thêm.

**Dạng 1:** Đổi biến  $x = -t$

Phép đổi biến này dùng khi:

1/ Tích phân cần tính có dạng:  $\int_{-a}^a f(x) dx$ , trong đó  $f(x)$  là hàm số chẵn hoặc

lẻ trên  $[-a; a]$

2/ Tích phân có dạng:  $\int_{-a}^a \frac{f(x) dx}{1+k^x}$ , trong đó  $f(x)$  là hàm số chẵn trên  $[-a; a]$  và

$k > 0$ . Khi đó ta tách tích phân thành 2 phần: từ  $-a$  đến 0 và từ 0 đến  $a$ . Với tích phân thuộc phần thứ nhất đặt  $x = -t$ .

**Thí dụ 1:**

Tính tích phân:  $I = \int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx$ .

**Giải**

Ta có:

$$I = \int_{-1}^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx = \int_{-1}^0 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx + \int_0^1 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dx. \quad (1)$$

Đặt  $x = -t$ , khi đó

$$\int_{-1}^0 \ln(x + \sqrt{1+x^2}) dt = - \int_1^0 \ln(\sqrt{1+t^2} - t) dt = \int_0^1 \ln \frac{1}{t + \sqrt{1+t^2}} dt = - \int_0^1 \ln(t + \sqrt{1+t^2}) dt. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) ta có:  $I = 0$ .

**Chú ý:** Hàm dưới dấu tích phân  $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$  là hàm lẻ trên  $[-1; 1]$ .

**Thí dụ 2**

Tính tích phân:  $I = \int_{-2}^2 \frac{x^6 dx}{1+e^x}$ .

**Giải**

Ta có:  $I = \int_{-2}^0 \frac{x^6 dx}{1+e^x} + \int_0^2 \frac{x^6 dx}{1+e^x}$ . (1)

Đặt  $x = -t$ , và có  $\int_{-2}^0 \frac{x^6 dx}{1+e^x} = - \int_{-2}^0 \frac{t^6 dt}{1+e^{-t}} = \int_0^2 \frac{t^6 dt}{1+e^t}$ . (2)

Thay (2) vào (1), và có:  $I = \int_0^2 \frac{x^6 (1+e^x)}{1+e^x} dx = \int_0^2 x^6 dx = \frac{1}{128}$ .

**Dạng 2:** Phép thay biến  $x = a - t$

Phép đổi biến này thường dùng để tính các tích phân có cận trên là  $a$ , hàm dưới dấu tích phân chứa các biểu thức lượng giác và các biểu thức này liên quan đến cận trên  $a$  (theo nghĩa chúng có mối liên hệ của các hàm lượng giác của các góc liên quan đặc biệt). Vì thế các tích phân này thường có cận trên là  $\frac{\pi}{2}, 2\pi, \pi, \dots$

Với các tích phân này, sau khi biến đổi  $x = a - t$  sẽ dẫn đến việc giải phương trình đơn giản mà ẩn số ở đây là tích phân  $I$  cần tính.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Hà Nội – 2004)

Tính tích phân: 
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2004} x}{\sin^{2004} x \cos^{2004} x} dx.$$

**Giải**

Đặt  $x = \frac{\pi}{2} - t \Rightarrow dx = -dt$  ta có:

$$I = - \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos^{2004} t}{\cos^{2004} t + \sin^{2004} t} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2004} t}{\sin^{2004} t + \cos^{2004} t} dt.$$

Từ đó suy ra: 
$$2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2004} x + \cos^{2004} x}{\sin^{2004} x + \cos^{2004} x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Vậy  $I = \frac{\pi}{4}.$

**Thí dụ 2:**

Tính tích phân: 
$$\int_0^{2\pi} x \cos^3 x dx.$$

**Giải**

Đặt  $x = 2\pi - t \Rightarrow \cos x = -\cos t$  và  $dx = -dt$ . Ta có:

$$\begin{aligned} I &= - \int_{2\pi}^0 (2\pi - t) (\cos^3 t) dt = \int_0^{2\pi} (2\pi - t) (\cos^3 t) dt \\ &= 2\pi \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt - I \Rightarrow I = \pi \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt. \quad (1) \end{aligned}$$

Bài toán quy về tính  $\pi \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt$ . Dễ thấy  $\pi \int_0^{2\pi} \cos^3 t dt = 0$

(giải như thí dụ 1, loại 4, mục B).

Từ (1) suy ra  $I=0$ .

**Nhận xét:** Ta có thể giải lại bài toán trên bằng cách sử dụng tích phân từng phần bằng cách đặt  $u = x$ ;  $du = \cos^3 x dx$ .

### C. PHƯƠNG PHÁP TÍCH PHÂN TỪNG PHẦN

Phương pháp tích phân từng phần cũng là một trong các phương pháp cơ bản nhất để tính tích phân. Cần nhấn mạnh rằng các bài toán sử dụng tích phân từng phần để tính tích phân nhiều lần xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học và Cao đẳng trong những năm gần đây.

**Loại 1:** Các dạng toán cơ bản của phép lấy tích phân từng phần.

Cần nhấn mạnh rằng các dạng toán này chiếm trên 90% các bài toán sử dụng phương pháp tích phân từng phần để tính tích phân trong các đề thi từ 2002 đến 2009 (và 100% trong các đề thi tuyển sinh môn Toán vào các trường Đại học khối A, B, D trong những năm đó). Có 4 dạng toán chính:

1. Với tích phân dạng:  $\int_a^b P(x)e^{kx}dx$  hoặc  $\int_a^b P(x)\sin kx dx$ ;  $\int_a^b P(x)\cos kx dx$ , ở

đây  $p(x)$  là đa thức thì đặt  $u = P(x)$ ;  $dv = e^{kx}dx$  (hoặc  $dv = \sin kx dx, \dots$ )

2/ Với tích phân dạng  $\int_a^b P(x)\ln^k x dx$  (có thể áp dụng với một số trường hợp

có tích phân dạng:  $\int_a^b \frac{\ln^k x}{P(x)} dx$ ), ở đây  $P(x)$  là đa thức thì đặt  $u = \ln^k x$ ,  $dv = P(x)dx$

(hoặc  $dv = \frac{dx}{P(x)}$ ).

3/ Với tích phân dạng:  $\int_a^b e^{kx} \sin \alpha x dx$  hoặc  $\int_a^b e^{kx} \cos \beta x dx$ ,

thì đặt  $u = e^{kx}$ ,  $dv = \sin \alpha x$  (hoặc  $dv = \cos \beta x$ )

hoặc  $u = \sin \alpha x$  (hoặc  $u = \cos \beta x$ ),  $dv = e^{kx} dx$

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)

Tính tích phân:  $I = \int_1^3 \frac{3 + \ln x}{(x+1)^2} dx$ .

**Giải**

Ta có:  $I = 3 \int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} + \int_1^3 \frac{\ln x dx}{(x+1)^2}$ . (1)

Dễ thấy:  $\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)^2} = \int_1^3 \frac{d(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-1}{x+1} \Big|_1^3 = \frac{1}{4}$ . (2)

Đặt  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ;

$dv = \frac{dx}{(x+1)^2} \Rightarrow v = \frac{-1}{x+1}$ .

Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

$$I = \left. \frac{-\ln x}{x+1} \right|_1^3 + \int_1^3 \frac{dx}{x(x+1)} = \frac{-\ln 3}{4} + \int_1^3 \frac{(x+1) - x}{x(x+1)} dx = \left. \frac{-\ln 3}{4} + \ln \frac{x}{x+1} \right|_1^3$$

$$= \frac{4 \ln \frac{3}{2} - \ln 3}{4} = \frac{\ln \frac{27}{16}}{4} \quad (3)$$

Thay (2) và (3) vào (1) ta có:  $I = \frac{3 + \ln \frac{27}{16}}{4}$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)**

Tính tích phân:  $I = \int_1^2 \frac{\ln x}{x^3} dx$ .

**Giải**

Ta đặt  $u = \ln x \Rightarrow du = \frac{dx}{x}$ ;  $v = \int \frac{dx}{x^3} = \frac{-1}{2x^2}$ .

$$\text{Vậy } \int_1^2 \left[ (x+3) - (-x^2 + 4x - 3) \right] dx = \left. \frac{-\ln 2}{8} - \frac{1}{4x^2} \right|_1^2 = \frac{3 - 2 \ln 2}{16}.$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)**

Tính tích phân:  $I = \int_1^e x^3 \ln^2 x dx$ .

**Giải**

Đặt  $u = \ln^2 x \Rightarrow du = \frac{2 \ln x dx}{x}$ ;  $v = \int x^3 dx = \frac{x^4}{4}$ .

$$\text{Ta có: } I = \left. \frac{1}{4} x^4 \ln^2 x \right|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x^3 \ln x dx = \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{2} \int_1^e x^2 \ln x dx. \quad (1)$$

Lại đặt  $u = \ln x \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Do đó:

$$\int_1^e x^3 \ln x dx = \left. \frac{1}{4} x^4 \ln x \right|_1^e - \frac{1}{4} \int_1^e x^3 dx = \frac{1}{4} e^4 - \frac{1}{16} x^4 \Big|_1^e = \frac{3e^4}{16} + \frac{1}{16}. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có:  $I = \frac{5e^4 - 1}{32}$ .

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 (x-2)e^{2x} dx$ .

**Giải**

$$\text{Đặt } u = x - 2 \Rightarrow du = dx; v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{2}(x-2)e^{2x} \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2}(-e^2 + 2) - \frac{1}{4} e^{2x} \Big|_0^1 = \frac{5-3e^2}{4}.$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2004)**

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_2^3 \ln(x^2 - x) dx.$$

**Giải**

$$\text{Đặt } u = \ln(x^2 - x) \Rightarrow du = \frac{2x-1}{x^2-x} dx; v = \int dx = x.$$

$$\begin{aligned} \text{Từ đó: } I &= x \ln(x^2 - x) \Big|_2^3 - \int_2^3 \frac{x(2x-1)}{x(x-1)} dx = 3 \ln 6 - 2 \ln 2 - \int_2^3 \frac{2x-2+1}{x-1} dx \\ &= \ln 54 - 2 \int_2^3 dx - \int_2^3 \frac{d(x-1)}{x-1} = \ln 54 - 2 - \ln(x-1) \Big|_2^3 = 3 \ln 3 - 2. \end{aligned}$$

**Thí dụ 6:**

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx.$$

**Giải**

$$\text{Ta có: } I = \int_0^1 x^3 e^{x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 e^{x^2} d(x^2) = \frac{1}{2} \int_0^1 t e^t dt \quad (1)$$

$$\text{Dễ dàng tính được } \int_0^1 t e^t dt = 1, \text{ vậy } I = \frac{1}{2}.$$

**Thí dụ 7:**

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx.$$

**Giải**

$$\text{Đặt } u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx; v = \int \cos 3x dx = \frac{1}{3} \sin 3x.$$

$$\text{Ta có: } I = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{\pi} - \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx \quad (1)$$

$$\text{Lại đặt } u = e^{2x} \Rightarrow du = 2e^{2x} dx; v = \int \sin 3x dx = -\frac{1}{3} \cos 3x.$$



$$\text{Vì thế: } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx = -\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{2}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} I. \quad (2)$$

$$\text{Thay (2) vào (1) ta có: } I = -\frac{1}{3} e^{\pi} - \frac{2}{9} - \frac{4}{9} I \Rightarrow \frac{13}{9} I = -\frac{1}{3} e^{\pi} - \frac{2}{9} \Rightarrow I = \frac{-3e^{\pi} - 2}{13}.$$

**Chú ý:** Nếu sau khi có (1) ta dùng phép tích phân từng phần lần thứ hai như sau:

$$\text{Đặt } u = \sin 3x \Rightarrow du = 3 \cos 3x dx; v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x}.$$

$$\text{Khi đó } \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \sin 3x dx = \frac{1}{2} e^{2x} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{2x} \cos 3x dx = -\frac{1}{2} e^{\pi} - \frac{3}{2} I. \quad (3)$$

$$\text{Thay (3) vào (1), và có: } I = -\frac{1}{3} e^{\pi} + \frac{1}{3} e^{\pi} + I \Leftrightarrow I = I. \quad (4)$$

(4) có nghĩa là ta gặp hiện tượng “xoay vòng” tức là sau một loạt phép toán – ta quay lại đầu bài. Do đó ta chưa giải quyết được bài toán.

Khi áp dụng phương pháp tích phân từng phần từ hai bước trở lên, nếu không cẩn thận sẽ gặp “hiện tượng xoay vòng” và cần phải tránh nó.

**Loại 2:** Phương pháp tích phân từng phần với các dạng tích phân khác. Để sử dụng có hiệu quả phương pháp tích phân từng phần khi tính tích phân, điều quan trọng nhất làm sao chọn hàm  $u$  một cách thích hợp. Phép chọn hàm  $u$  phải đảm bảo được hai điều sau đây:

1/ Dễ dàng tính được  $\int v du$ .

2/ Thông thường khi sử dụng công thức tích phân từng phần để tính tích phân, ta đều phải trải qua nhiều bước. Vì vậy hàm  $u$  cần chọn sao cho trong các bước tiếp theo sử dụng công thức tích phân, thì việc tính  $\int v du$  phải ngày càng đơn giản đi.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Giao thông – 2004)**

$$\text{Tính tích phân: } I = \int_0^2 \frac{x^2 e^x dx}{(x+2)^2}.$$

**Giải**

$$\text{Đặt } u = x^2 e^x \Rightarrow du = x e^x (x+2) dx, v = \int \frac{dx}{(x+2)^2} = -\frac{1}{x+2}.$$

Theo công thức tính tích phân từng phần, ta có:

$$I = \frac{-x^2 e^x}{(x+2)} \Big|_0^2 + \int_0^2 x e^x dx = e^x + \int_0^2 x e^x dx. \quad (1)$$

Để thấy (xem loại 1, tích phân từng phần), ta có  $\int_0^2 xe^x dx = e^2 + 1$ . (2)

Thay (2) vào (1), và có  $I = 1$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm khối A – 2004)**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \tan^2 x dx$ .

**Giải**

Đặt  $u = x \Rightarrow du = dx$ ;  $v = \int \tan^2 x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \tan x - x$ .

Theo công thức tích phân từng phần, ta có:

$$\begin{aligned} I &= x(\tan x - x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx = \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{\pi}{4}\right) - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x dx}{\cos x} + \frac{x^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{d(\cos x)}{\cos x} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} + \ln |\cos x| \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

**Thí dụ 3:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{x^7 dx}{(1+x^4)^2}$ .

**Giải**

Đặt  $u = x^2 \Rightarrow du = 2x dx$ ;  $v = \int \frac{x^3 dx}{(1+x^4)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{d(1+x^4)}{(1+x^4)^2} = \frac{-1}{4(1+x^4)}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \frac{-x^4}{4(1+x^4)} \Big|_0^1 + \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^4} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \int_0^1 \frac{d(1+x^4)}{1+x^4} = -\frac{1}{8} + \frac{1}{4} \ln(1+x^4) \Big|_0^1 \\ &= \frac{2 \ln 2 - 1}{8}. \end{aligned}$$

## §2. MỘT SỐ ỨNG DỤNG CỦA TÍCH PHÂN

### A. TÍNH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG

- Diện tích hình phẳng xác định bởi đường cong  $y = f(x)$ .

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường

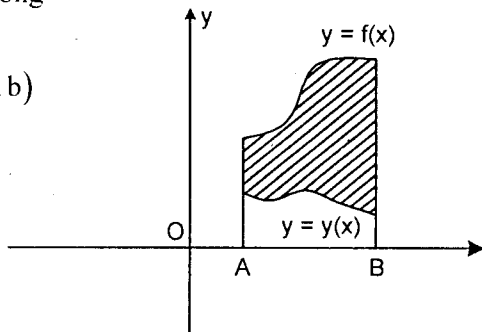
$$\begin{cases} y = f(x), y = 0 \\ x = a, x = b \end{cases} \quad (a < b)$$

Khi đó diện tích  $S$  của nó được

tính bởi công thức:  $S = \int_a^b |f(x)| dx$

(nói riêng nếu  $f(x) \geq 0$  với

$$\forall x \in [a; b], \text{ thì } S = \int_a^b f(x) dx$$



- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong:

Cho hình phẳng giới hạn bởi:  $\begin{cases} y = f(x); y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases} \quad (a < b).$

Khi đó tích phân của hình phẳng được tính bởi công thức:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

Giải bài toán tìm diện tích hình phẳng thường có lược đồ chung để giải như sau:

- Vẽ hình (nếu thấy cần thiết và dễ vẽ. Khi vẽ đường cong chỉ nên vẽ phác hình)
- Tìm giao điểm của các đường tạo nên hình phẳng.
- Sử dụng các công thức đã nêu ở trên.

**Loại 1:** Các bài toán có thể vẽ phác được hình cần tính diện tích:

Với các bài toán thuộc loại này việc vẽ hình giúp cho việc nhận diện hình cần tính dễ dàng hơn nhiều. Dĩ nhiên ta chỉ cần lưu tâm đến hình dáng của hình, nên việc vẽ hình chỉ cần là vẽ phác mà thôi!

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)

Tìm diện tích giới hạn bởi các đường  $y = |x^2 - 4x + 3|$  và  $y = x + 3$ .

**Giải**

Hai đồ thị  $y = |x^2 - 4x + 3|$  và  $y = x + 3$  đều rất dễ vẽ, vì thế ta có ngay hình vẽ sau:

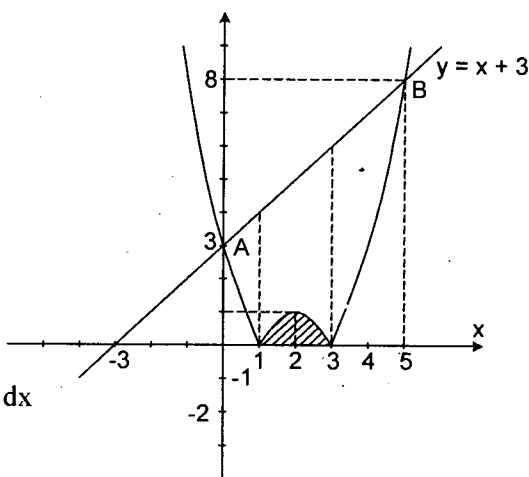
Từ hình vẽ ta suy ra hoành độ giao điểm A, B là nghiệm của phương trình:  $x^2 - 4x + 3 = x + 3$

(vì nó cắt nhau trên phần mà

$$x^2 - 4x + 3 > 0) \Leftrightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = 5.$$

Ta có:

$$\begin{aligned}
 S &= \int_0^1 [(x+3) - (x^2 - 4x + 3)] dx \\
 &+ \int_1^3 [(x+3) - (-x^2 + 4x - 3)] dx \\
 &+ \int_3^5 [(x+3) - (x^2 - 4x + 3)] dx \\
 &= \int_0^1 (-x^2 + 5x) dx + \int_1^3 (x^2 - 3x + 6) dx \\
 &+ \int_3^5 (-x^2 + 5x) dx = \frac{109}{6} \text{ (đvdt)}
 \end{aligned}$$



**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)**

Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:  $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}}$  và  $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$ .

**Giải**

Ta có:  $y = \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$

Vậy đồ thị của nó là nửa trên của elip  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Dễ thấy  $y = \frac{x^2}{4\sqrt{2}}$  là parabol, nên ta có hình vẽ sau:

Hoành độ của giao điểm A, B  
là nghiệm của phương trình:

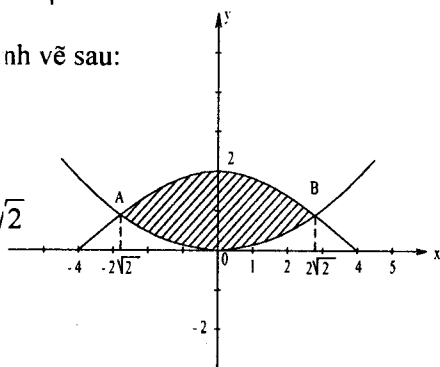
$$\sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} = \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \Leftrightarrow 4 - \frac{x^2}{4} = \frac{x^4}{32} \Leftrightarrow x = \pm 2\sqrt{2}$$

Vậy  $S = \int_{-2\sqrt{2}}^{2\sqrt{2}} \left( \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx$

$$= 2 \int_0^{2\sqrt{2}} \left( \sqrt{4 - \frac{x^2}{4}} - \frac{x^2}{4\sqrt{2}} \right) dx = \int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx - \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^{2\sqrt{2}} x^2 dx \quad (1)$$

Theo thí dụ 1, loại 3, mục B, ta có:

$$\int_0^{2\sqrt{2}} \sqrt{16 - x^2} dx = 2\pi + 4. \text{ Từ đó từ (1) suy ra } S = 2\pi + \frac{4}{3} \text{ (đvdt)}$$



**Thí dụ 3:**

Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi

các đường:  $y = x^2$ ;  $y = \frac{x^2}{4}$ ;  $y = \frac{2}{x}$  và  $y = \frac{8}{x}$ .

**Giải**

Vẽ phác hình trên có dạng sau:

Bằng các xét các phương trình:

$$x^2 = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2}; \quad x^2 = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = 2;$$

$$\frac{x^2}{4} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{2} \quad \text{và} \quad \frac{x^2}{4} = \frac{8}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{32}.$$

Ta suy ra có 3 giao điểm A, B, C  
với hoành độ giao điểm lần lượt là:

$\sqrt[3]{2}; 2; \sqrt[3]{32}$ . Dễ thấy:

$$S = \int_{\sqrt[3]{2}}^2 \left( x^2 - \frac{2}{x} \right) dx + \int_2^{\sqrt[3]{32}} \left( \frac{8}{x} - \frac{x^2}{4} \right) dx$$

Các tích phân trên đều tính được một cách dễ dàng và ta sẽ có:

$$S = 8 \ln \sqrt[3]{4} + 2 \ln \sqrt[3]{4} = \frac{10}{4} \ln 4 \text{ (đvtt)}.$$

**Loại 2:** Các bài toán tính diện tích hình phẳng mà việc vẽ hình khó thực hiện.

Với các bài toán loại này chưa thể nhận ra ngay khi nào  $f(x) > g(x)$  (hoặc  $f(x) < g(x)$ ). Vì thế cách tốt nhất khi tính diện tích S là sử dụng công thức:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx,$$

và xử lý theo cách tính tích phân trong trường hợp hàm dưới dấu tích phân có chứa dấu giá trị tuyệt đối.

**Dạng 1:** Bổ sung về tính tích phân dạng:  $\int_a^b |f(x)| dx$ .

Khi giải các loại bài tập này trước hết phải tiến hành xét dấu để phá đi các dấu giá trị tuyệt đối (kiến thức hay dùng nhất là sử dụng định lý về dấu của tam thức bậc hai, nhị thức bậc nhất và sử dụng đường tròn đơn vị để xét dấu các hàm lượng giác).

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối D – 2003)**

Tính tích phân:  $I = \int_0^2 |x^2 - x| dx$

**Giải**

Ta có bảng xét dấu sau:

x	0	1	2
$x^2 - x$		-	+
$ x^2 - x $		$x - x^2$	$x^2 - x$

Từ bảng xét dấu trên, ta có:  $I = \int_0^1 (x - x^2) dx + \int_1^2 (x^2 - x) dx = 1.$

**Thí dụ 2:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \sin 2x} dx.$

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } I &= \int_0^{\pi} \sqrt{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \left| \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \right| dx = \sqrt{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} |\sin t| dt. \end{aligned}$$

Dựa vào đường tròn đơn vị ta có ngay:

$\sin t < 0$  khi  $-\frac{\pi}{4} < t < 0$  và  $\sin t > 0$  khi  $0 < t < \frac{3\pi}{4}.$

$$\text{Từ đó: } I = \sqrt{2} \left( - \int_{-\frac{\pi}{4}}^0 \sin t dt + \int_0^{\frac{3\pi}{4}} \sin t dt \right) = 2\sqrt{2}.$$

**Dạng 2:** Tìm diện tích hình phẳng.

**Thí dụ: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đường cong  $y = (e + 1)x$  và  $y = (1 + e^x)x$

**Giải**

Hoành độ giao điểm của hai đường là nghiệm của phương trình:

$$(e + 1)x = (1 + e^x)x \Leftrightarrow x(e^x - e) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ và } x = 1.$$

Từ đó diện tích  $S$  cần tìm được tính theo công thức:

$$S = \int_0^1 \left| (1 + e^x)x - (e + 1)x \right| dx = \int_0^1 x(e^x - e) dx. \quad (1)$$

Khi  $0 < x < 1$  thì  $x > 0$ ; còn  $e^x - e < 0$ , nên từ (1) ta có:

$$S = \int_0^1 x(e - e^x) dx = e \int_0^1 x dx - \int_0^1 xe^x dx.$$

Để thấy:  $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$  Theo công thức tính tích phân từng phần thì  $\int_0^1 xe^x dx = 1.$

$$\text{Vậy } S = \frac{e}{2} - 1 \text{ (đvtt).}$$

**Nhận xét:** Với thí dụ này, việc vẽ hình không đơn giản chút nào!

## B. TÍNH THỂ TÍCH VẬT THỂ

- Giả sử vật thể sinh bởi hình phẳng giới hạn bởi các đường  
 $\begin{cases} y = f(x); y = 0 \\ x = a; x = b \end{cases} \quad (a < b)$  và quay quanh trục Ox. Khi đó thể tích V của vật thể ấy là:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx.$$

Giả sử hình phẳng giới hạn bởi hai đường :  $\begin{cases} y = f(x); y = g(x) \\ x = a; x = b \end{cases}$

và đem quay quanh trục Ox. Khi đó thể tích V của vật thể tạo thành là:

$$V = \pi \int_a^b |f^2(x) - g^2(x)| dx.$$

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Cho hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = x \ln x$ ;  $y = 0$  và  $x = e$ . Đem hình phẳng quay quanh trục Ox. Tìm thể tích khối tròn xoay thu được

**Giải**

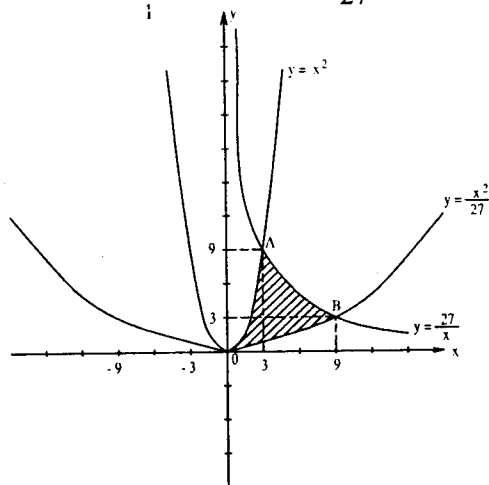
Ta tìm giao điểm của  $y = x \ln x$  với trục hoành. Hoành độ của giao điểm là nghiệm của phương trình  $x \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$  (do  $x > 0$ )

Vậy  $V = \pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx. \quad (1)$

Tích phân  $\pi \int_1^e x^2 \ln^2 x dx$  được tính theo công thức tích phân từng phần loại 1.

Bằng phép tính tương tự như trong thí dụ 3, loại 1, phần C,

ta có:  $\int_1^e x^2 \ln^2 x dx = \frac{5e^3 - 2}{27}$ . Vậy từ (1) suy ra  $V = \frac{5e^3 - 2}{27}$  (đvtt).



**Thí dụ 2:**

Cho hình phẳng S giới hạn bởi các đường:  $y = x^2$ ;  $y = \frac{27}{x}$  và  $y = \frac{x^2}{27}$ . Tìm thể tích V khi đem hình S quay quanh trục Ox.

**Giải**

Dễ thấy các giao điểm A, B tương ứng có hoành độ là  $x = 3$  và  $x = 9$ .

Gọi  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  tương ứng là thể tích của các vật thể sinh bởi khi đem cung  $\widehat{OA}$ ,  $\widehat{AB}$  và  $\widehat{OB}$  quay quanh Ox. Khi đó ta có:

$$V = V_1 + V_2 - V_3 = \pi \left[ \int_0^3 (x^2)^2 dx + \int_3^9 \left( \frac{27}{x} \right)^2 dx - \int_0^9 \left( \frac{x^2}{27} \right)^2 dx \right] = \frac{972\pi}{5} \text{ (đvtt)}$$

### BÀI TẬP TỰ GIẢI

Sử dụng phương pháp bảng nguyên hàm, tính các tích phân sau:  
**Bài 1:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng sư phạm Quảng Ngãi – 2006)

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{4\sin^3 x dx}{1 + \cos x}$ . Đáp số: 2.

**Bài 2:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Kinh tế Tài chính – 2005)

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{x dx}{(x+1)^3}$ ; Đáp số:  $\frac{1}{8}$ .

**Bài 3:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Nông lâm)

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 x\sqrt{x^2 + 1} dx$ . Đáp số:  $\frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$ .

**Bài 4:** (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Y tế - 2006)

Tính tích phân:  $I = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - \cos x}{\sqrt{1 + \sin 2x}} dx$ . Đáp số:  $\frac{1}{2} \ln 2$ .

**Bài 5:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{\sqrt{(e^x + 1)^3}}$ . Đáp số:  $\sqrt{2} - 1$ .

**Bài 6:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x dx}{1 + 3\cos x}$ . Đáp số:  $\frac{1}{3} \ln 4$ .

**Bài 7:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{dx}{1 + e^x}$ . Đáp số:  $\ln \frac{2e}{1+e}$ .

Sử dụng phép đổi biến, tính các tích phân sau:

**Bài 8:**

Tính tích phân:  $I = \int_{-1}^0 x\sqrt[3]{x+1} dx$ . Đáp số:  $-\frac{9}{28}$ .



**Bài 9:**

Tính tích phân:  $I = \int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{e^{2x} dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$

Đáp số:  $\frac{20}{3}.$

**Bài 10:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[6]{1 - \cos^3 x} \sin x \cos^5 x \, dx.$

Đáp số:  $\frac{12}{91}.$

**Bài 11:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{x^2 dx}{(x+1)\sqrt{x+1}}.$

Đáp số:  $\frac{16 - 11\sqrt{2}}{3}.$

**Bài 12:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx.$

Đáp số:  $\frac{4 - \pi}{2}.$

**Bài 13:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx.$

Đáp số:  $\frac{\pi^2}{4}.$

Hướng dẫn: Đặt  $x = \pi - t.$

**Bài 14:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 x^5 (1 - x^3)^6 dx.$

Hướng dẫn: Đặt  $t = 1 - x^3.$

Đáp số:  $\frac{1}{168}.$

Sử dụng phép tích phân từng phần tính các tích phân sau:

**Bài 17:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\sin x} \sin 2x dx.$

Đáp số: 2.

**Bài 18:**

Tính tích phân:  $I = \int_1^2 x^2 \ln x dx.$

Đáp số:  $\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}.$

**Bài 19:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x+1) \sin 2x dx.$

Đáp số:  $\frac{\pi}{4} + 1.$

**Bài 20:**

Tính tích phân:  $I = \int_1^2 \frac{\ln(1+x)}{x^2} dx.$

Đáp số:  $3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3.$

Sử dụng các phép thế đặc biệt tính các tích phân sau:

**Bài 21:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^2 \frac{dx}{4+x^2}.$

Đáp số:  $\frac{\pi}{8}.$

**Bài 22:**

Tính tích phân:  $I = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{1+x^2}}{x^2} dx.$

Đáp số:  $\ln(2+\sqrt{3})(\sqrt{2}-1) + \frac{3\sqrt{2}-2\sqrt{3}}{3}.$

**Bài 23:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^1 \frac{xdx}{x^4+x^2+1}.$

Đáp số:  $\frac{\pi\sqrt{3}}{18}.$

**Bài 24:**

Tính tích phân:  $I = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}.$

Đáp số:  $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4}.$

**Bài 25:**

Tính tích phân:  $I = \int_{-3}^5 (|x+2| - |x-2|) dx.$

Đáp số: 8.

**Bài 26:**

Tìm diện tích hình phẳng giới hạn bởi parabol (P):  $y = x^2 + 4x + 5$  và hai tiếp tuyến của (P) tại điểm A (1; 2); B(4;5) nằm trên (P)

Đáp số:  $\frac{9}{4} (\text{đvdt}).$

**Bài 27:**

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường  $y = \sin|x|$  và  $y = |x| - \pi$

Đáp số:  $4 + \pi^2 (\text{đvdt}).$

**Bài 28:**

Cho hình phẳng tạo bởi hai đường  $y = 2x - x^2$  và  $y = 0$ . Tìm thể tích vật thể khi đem hình phẳng quay quanh trục Ox.

Đáp số:  $\frac{16}{15} \pi (\text{đvtt}).$

## Bài giảng số 13

# ĐƯỜNG THẲNG TRONG MẶT PHẪNG

Bài toán về đường thẳng là một chủ đề chính thường xuyên có mặt trong các đề thi toán vào các trường Đại học và Cao đẳng trong những năm 2002 – 2009. Bài giảng đề cập đến các phương pháp chính giải các bài toán liên quan đến phương trình đường thẳng của hình học giải tích phẳng.

### §1. CÁC BÀI TOÁN THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Người ta hay dùng các dạng sau đây của phương trình đường thẳng.

– Phương trình chính tắc của đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  với vector chỉ

phương  $\vec{u} = (a; b)$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) là:  $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b}$ .

– Phương trình tham số của đường thẳng qua điểm  $M(x_0, y_0)$  với vector chỉ phương  $\vec{u} = (a; b)$  ( $a^2 + b^2 > 0$ ) là

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt. \end{cases}$$

– Phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  và nhận vector pháp  $\vec{n} = (a, b)$  ( $a^2 + b^2 > 0$ ) là:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0.$$

– Phương trình tổng quát của đường thẳng là:

$$ax + by + c = 0 \text{ (ở đây } a^2 + b^2 > 0).$$

Dưới dạng này đường thẳng nhận  $\vec{n} = (a; b)$  làm vector pháp tuyến, còn  $\vec{u} = (-b; a)$  làm vector chỉ phương.

Đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  có hệ số góc  $k$  sẽ có phương trình

$$y = k(x - x_0) + y_0.$$

– Phương trình theo đoạn chắn: Đường thẳng cắt hai trục  $Ox, Oy$  tại hai điểm

$A(a; 0), B(0; b)$  ( $a \neq 0, b \neq 0$ ) có dạng:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

#### Các dạng bài tập cơ bản:

**Loại 1:** Viết phương trình đường thẳng biết vector chỉ phương  $\vec{u} = (a; b)$  và một điểm  $M(x_0, y_0)$  của nó.

Đây là một trong những phương pháp cơ bản nhất để viết phương trình đường thẳng. Rất nhiều bài toán quy được về trường hợp này (đặc biệt là trường hợp đường thẳng đi qua hai điểm  $M(x_0; y_0)$  và  $N(x_1; y_1)$ ).

Như vậy, hai yếu tố cần xác định là:

1/ Vectơ chỉ phương  $\vec{u}$  của đường thẳng. Người ta hay sử dụng các phương pháp sau để xác định  $\vec{u}$ :

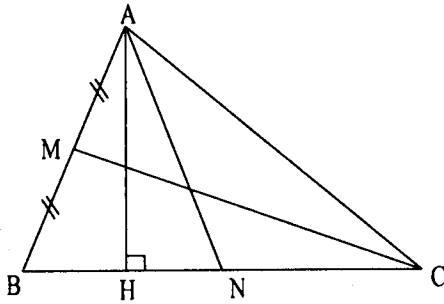
- Tìm hai điểm M, N phân biệt thuộc đường thẳng. Khi đó  $\vec{u} = \overrightarrow{MN}$ .
- Xác định xem đường thẳng cần tìm có song song hoặc vuông góc với một đường thẳng cho trước nào hay không.

2/ Điểm M thuộc đường thẳng cần tìm được xác định là giao điểm của hai đường thẳng biết trước nào đấy, hoặc là các điểm có một tính chất nào đó (như trung điểm của một đoạn thẳng, hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng...)

Xét các thí dụ minh họa sau đây:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Cho tam giác ABC. Điểm M (2;0) là trung điểm của AB. Đường trung tuyến và đường cao kẻ từ A lần lượt có phương trình là:  $7x - 2y - 3 = 0$  và  $6x - y - 4 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng AC.



**Giải**

Tọa độ (x; y) của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 7x - 2y - 3 = 0 \\ 6x - y - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$

Vậy A (2;2)

Vì M là trung điểm của AB, nên tọa độ B được xác định như sau:

$$\begin{cases} x_B = 2x_M - x_A \\ y_B = 2y_M - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B = 3 \\ y_B = -2 \end{cases}$$

Vậy B(-3;2)

Đường thẳng BC vuông góc với đường cao AH:  $6x - y - 4 = 0$ , nên có dạng:  
 $x + 6y + m = 0$ .

Do qua B(3; -2) nên ta có:  $3 - 12 + m = 0 \Rightarrow m = 9$ .

Vậy BC:  $x + 6y + 9 = 0$ .

Tọa độ (x; y) của trung điểm N của BC là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + 6y + 9 = 0 \\ 7x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

Vậy N =  $(0; -\frac{3}{2})$ .

Từ đó  $\overrightarrow{MN} = (-2; -\frac{3}{2})$ ;  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{MN} = (-4; -3)$ .

Đường thẳng AC có vectơ chỉ phương  $\vec{u} = (-4; -3)$  và qua A(1; 2) nên có dạng:

$$\frac{x-1}{-4} = \frac{y-2}{-3} \Leftrightarrow -3x + 3 = -4y + 8 \Leftrightarrow 3x - 4y + 5 = 0.$$

**Nhận xét:**

Lời giải nói trên minh họa rõ nét cho phương pháp đã trình bày trong phần mở đầu.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)**

Cho hình chữ nhật ABCD có  $I(6; 2)$  là giao của hai đường chéo AC và BD. Điểm  $M(1; 5)$  thuộc đường thẳng AB. Trung điểm E của cạnh CD nằm trên đường thẳng  $x + y - 5 = 0$ . Viết phương trình cạnh AB.

**Giải**

Gọi N là điểm đối xứng của M qua I.  
Do  $M \in AB$ , nên  $N \in CD$ . Tọa độ của điểm N xác định như sau:

$$\begin{cases} x_N = 2x_I - x_M \\ y_N = 2y_I - y_M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_N = 11 \\ y_N = -1 \end{cases}$$

Vậy  $N(11; -1)$ .

Vì E nằm trên đường thẳng  $x + y + 5 = 0$ , nên  $E = (x_0; 5 - x_0)$ .

Từ đó:  $\overrightarrow{IE} = (x_0 - 6; 3 - x_0)$ ;  $\overrightarrow{NE} = (x_0 - 11; 6 - x_0)$ .

Do E là trung điểm của DC nên có:  $\overrightarrow{IE} \perp \overrightarrow{NE}$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 6)(x_0 - 11) + (3 - x_0)(6 - x_0) \Leftrightarrow x_0^2 - 13x_0 + 42 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 6 \\ x_0 = 7 \end{cases}$$

+ Nếu  $x_0 = 6$  thì  $\overrightarrow{NE} = (-5; 0)$ , Vậy AB có vector chỉ phương chính là  $\vec{u} = \overrightarrow{NE} = (-5; 0)$ . Do AB qua  $M(1; 5)$  nên có dạng:

$$\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow y = 5.$$

+ Nếu  $x_0 = 7$ , thì  $\overrightarrow{NE} = (-4; -1)$ .

Khi đó  $AB \parallel \overrightarrow{NE}$  nên AB có vector chỉ phương  $\vec{u} = (-4; -1)$ .

Vậy AB có phương trình:  $x - 4y + 19 = 0$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Hà Nội – 2005)**

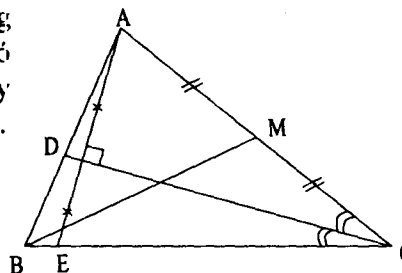
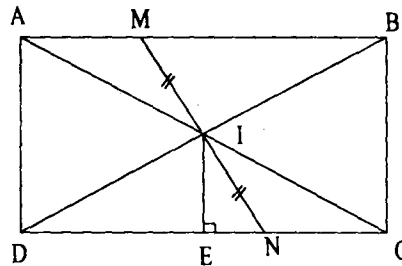
Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có đỉnh  $A(1; 2)$ , đường trung tuyến BM và đường phân giác trong CD có phương trình tương ứng là  $2x + y + 1 = 0$ ;  $x + y - 1 = 0$ . Hãy viết phương trình đường thẳng BC.

**Giải**

Qua A kẻ đường vuông góc với CD cắt BC tại E. Giả sử đường vuông góc này cắt CD tại I. Vì CD là phân giác của  $\hat{C} \Rightarrow IA = IE$ . Do CD có phương trình:  $x + y + 1 = 0$  nên, đường thẳng AE có phương trình  $x + y + m = 0$ .

Mà AE lại qua  $A(1; 2)$ , nên ta có:  $1 + 2 + m = 0 \Rightarrow m = -3$ .

Vậy AE có phương trình:  $x + y - 3 = 0$ .



Tọa độ  $(x; y)$  của  $I$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \quad I(0; 1).$$

Từ đó suy ra:  $\begin{cases} x_E = 2x_I - x_A \\ y_E = 2y_I - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -1 \\ y_E = 0 \end{cases} \Leftrightarrow E(-1; 0).$

Vì  $C$  nằm trên đường phân giác  $x + y + 1 = 0$  nên ta có:  $C(x_0; 1 - x_0)$ . Từ đó do  $M$  là trung điểm của  $AC$ , nên

$$M = \left( \frac{x_0 + 1}{2}; \frac{1 - x_0 + 2}{2} \right) = \left( \frac{x_0 + 1}{2}; \frac{3 - x_0}{2} \right).$$

Điểm  $M$  nằm trên trung tuyến  $BM$ :  $2x + y + 1 = 0$  nên ta có:

$$2 \left( \frac{x_0 + 1}{2} \right) + \frac{3 - x_0}{2} + 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -7 \Rightarrow C = (-7; 8).$$

Đường thẳng  $BC$  qua  $E(-1; 0)$  và  $(-7; 8)$  nên có phương trình:  $4x + 3y + 4 = 0$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Bến Tre – 2005)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , biết đỉnh  $A(4; -1)$ , phương trình một đường cao, một đường trung tuyến vẽ từ cùng một đỉnh lần lượt là  $2x - 3y + 12 = 0$  và  $2x + 3y = 0$ . Viết phương trình các cạnh của tam giác.

**Giải**

Rõ ràng đỉnh  $A(4; -1)$  không thuộc hai đường thẳng  $2x - 3y + 12 = 0$  và  $2x + 3y = 0$ , nên các đường cao và trung tuyến ấy không đi qua  $A$ . Ta có thể giả sử chúng là phương trình của các đường cao và trung tuyến vẽ từ  $B$ . Để thấy tọa độ  $(x; y)$  của  $B$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 12 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 2 \end{cases} \quad B = (-3; 2).$$

Vậy cạnh  $AB$  có phương trình:  $3x + 7y - 5 = 0$  (qua  $A(4; -1)$  và  $B(-3; 2)$ ).

Do  $AC \perp BH$  nên cạnh  $AC$  có phương trình:  $3x + 2y + m = 0$ .

Do qua  $A(-4; 1) \Rightarrow 12 - 2 + m = 0 \Rightarrow m = -10$ .

Vậy cạnh  $AC$  có phương trình dạng:  $3x + 2y - 10 = 0$ .

Tọa độ  $(x; y)$  của  $M$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 2y - 10 = 0 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow M(6; -4).$$

Vì  $M$  là trung điểm của  $AC \Rightarrow C = (8; -7)$ .

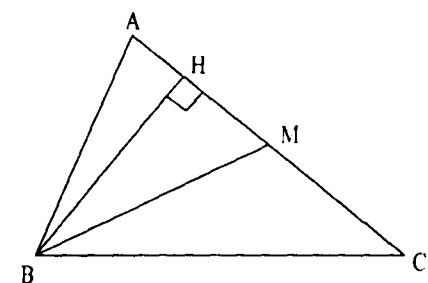
Do đó đường thẳng  $BC$  qua  $B(-3; 2)$  và  $C(8; -7)$  nên phương trình của nó là:

$$9x + 11y + 5 = 0.$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hải Phòng – 2004)**

Trên mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho hai đường thẳng

$d_1: x - y + 1 = 0$ ,  $d_2: 2x + y - 1 = 0$  và điểm  $P(2; 1)$ .



Viết phương trình đường thẳng qua P và cắt  $d_1, d_2$  tương ứng tại A, B sao cho P là trung điểm của AB.

**Giải**

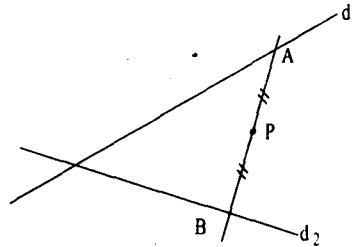
$$\text{Vì } A \in d_1 \Rightarrow A = (x_1; x_1 + 1)$$

$$B \in d_2 \Rightarrow B = (x_2; 1 - 2x_2).$$

$$\text{Ta có: } \overrightarrow{PA} = (x_1 - 2; x_1); \overrightarrow{PB} = (x_2 - 2; -2x_2).$$

Vì P là trung điểm của AB, nên ta có:

$$\overrightarrow{PA} = -\overrightarrow{PB} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2 = 2 - x_2 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = \frac{4}{3} \\ x_1 = \frac{8}{3} \end{cases}$$



$$\text{Do đó: } A\left(\frac{8}{3}; \frac{11}{3}\right) \text{ và } B\left(\frac{4}{3}; -\frac{5}{3}\right).$$

Vì thế đường thẳng AB có phương trình:  $4x - y - 7 = 0$ .

**Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Sư phạm Vĩnh Long – 2005)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC với  $A(1;3)$  và hai đường trung tuyến xuất phát từ B và C lần lượt có phương trình là  $x - 2y + 1 = 0$  và  $y - 1 = 0$ . Lập phương trình các cạnh của tam giác ABC.

**Giải**

Tọa độ  $(x; y)$  của trọng tâm G là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow G(1; 1).$$

Vẽ hình bình hành BGCE. Theo tính chất của các đường trung tuyến trong tam giác ta có:  $GE = GA$ .

Từ đó suy ra ngay:  $E(1; -1)$ .

Do  $EC \parallel BG$ , nên EC có dạng  $x - 2y + m = 0$ .

Nó lại qua  $E(1; -1)$  nên ta có:  $1 + 2 + m = 0 \Rightarrow m$

$= -3 \Rightarrow EC$  có phương trình:  $x - 2y - 3 = 0$ .

Vì thế tọa độ của C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 2y - 3 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases}; C(5; 1).$$

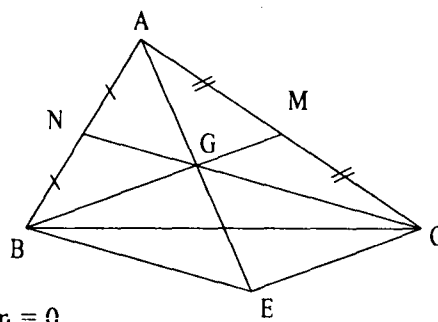
Lập luận hoàn toàn tương tự, ta có:  $B(-3; -1)$ .

Biết ba đỉnh của tam giác nên dễ thấy các cạnh AB, BC, CA lần lượt có phương trình:

$$x - y + 2 = 0; x - 4y + 1 = 0; x + 2y - 7 = 0.$$

**Loại 2:** Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  và có hệ số góc k.

Phương pháp này thường dùng để giải các bài toán viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm  $M(x_0; y_0)$  và thỏa mãn một yêu cầu nào đó (thường là yêu cầu liên quan đến khoảng cách). Chú ý rằng đường thẳng đi qua điểm  $M(x_0; y_0)$  có hai dạng  $x = x_0$  và  $y = k(x - x_0) + y_0$ . Khi làm bài, trừ trường hợp cho sẵn dạng:  $y = k(x - x_0)$ , nếu không phải xét đủ hai dạng nói trên.



**Thí dụ 1:**

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm  $M(1;4)$  và  $N(6;2)$ . Lập phương trình đường thẳng qua  $M$  sao cho khoảng cách từ  $N$  tới nó bằng 5.

**Giải**

Đường thẳng  $\Delta$  qua  $M(1;4)$  nên có hai dạng sau:

1/  $x = 1$ . Khi đó  $d(N, \Delta) = 5$ , vậy  $x = 1$  là một đường thẳng cần tìm.

2/  $\Delta$  có dạng  $y = k(x - 1) + 4 \Leftrightarrow kx - y + 4 - k = 0$ .

Khi đó  $d(N, \Delta) = 5$

$$\Leftrightarrow \frac{|6k - 2 + 4 - k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = 5 \Leftrightarrow (5k + 2)^2 = 25(k^2 + 1) \Leftrightarrow k = \frac{21}{20}.$$

Khi đó  $\Delta$  có phương trình:  $21x - 20y + 59 = 0$ .

Như thế  $M$  có hai đường thẳng cần tìm:  $x = 1$  và  $21x - 20y + 59 = 0$ .

**Thí dụ 2:**

Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm  $A(1;2)$  và  $B(5;-1)$  Viết phương trình đường thẳng qua  $(3;5)$  và cách đều  $A, B$ .

**Giải**

Đường thẳng  $\Delta$  qua  $P(3;5)$  có hai dạng:

1/  $x = 3$ . Khi đó  $d(A, \Delta) = 3 - 1 = 2$ ;  $d(B, \Delta) = 5 - 3 = 2$ .

Vậy  $x = 3$  là đường thẳng cần tìm.

2/  $\Delta$  có dạng:  $y = k(x - 3) + 5 \Leftrightarrow kx - y + 5 - 3k = 0$  Khi đó ta có:

$$d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|k - 2 + 5 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}} = \frac{|5k + 1 + 5 - 3k|}{\sqrt{k^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow |3 - 2k| = |6 - 2k| \Leftrightarrow k = -\frac{3}{4}.$$

Khi đó  $\Delta$  có phương trình:  $3x + 4y - 29 = 0$ .

Vậy có hai đường thẳng  $x = 3$  và  $3x + 4y - 29 = 0$  thỏa mãn yêu cầu đầu bài.

**Nhận xét:** Qua các thí dụ trên ta đã thấy rõ nếu không xét trường hợp  $x = x_0$  thì có thể sẽ dẫn đến khả năng làm mất nghiệm của bài toán.

**Loại 3:** Sử dụng phương trình tổng quát để viết phương trình đường thẳng.

Như đã biết:  $Ax + By + C = 0$ , với  $A^2 + B^2 > 0$ , là phương trình tổng quát của đường thẳng. Khi sử dụng phương trình dưới dạng này bài toán quy về tìm  $A, B, C$ . Thông thường từ các điều kiện ban đầu ta sẽ có một hoặc hai phương trình để tìm ba ẩn  $A, B, C$ . Vì thế ta phải sử dụng điều kiện  $A^2 + B^2 > 0$ , để từ một hệ thức giữa  $A, B$  sẽ cho  $A$  (hoặc  $B$ ) là một giá trị cụ thể, từ đó sẽ tìm được  $B$  (hoặc  $A$ ). Lưu ý rằng, đó chính là quy tắc chung để giải một hệ phương trình mà số phương trình ít hơn số ẩn. Sử dụng phương pháp này sẽ thích hợp cho việc giải các bài toán thuộc loại 2, mà không cần xét hai trường hợp  $x = x_0$  và  $y = k(x - x_0) + y_0$ .

**Thí dụ 1:**

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm  $M(1; 4)$  và  $N(6; 2)$ . Lập phương trình đường thẳng qua  $M$  sao cho khoảng cách từ  $N$  tới đường thẳng đó bằng 5.

**Giải**

Gọi đường thẳng  $\Delta$  phải tìm là  $ax + by + c = 0$ , với  $a^2 + b^2 > 0$ .

Do  $\Delta$  qua  $M$  nên ta có:  $a + 4b + c = 0 \Rightarrow c = -a - 4b$ .



Vì thế  $\Delta$  có dạng:  $ax + by - a - 4b = 0$ .

$$\text{Ta có: } d(N, \Delta) = 5 \Leftrightarrow \frac{|6a + 2b - a - 4b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Leftrightarrow (5a - 2b)^2 = 25(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 21b^2 + 20ab = 0 \Leftrightarrow b(21b + 20a) = 0.$$

– Nếu  $b = 0$ . Do  $a^2 + b^2 > 0$ , nên chọn  $a = 1 \Rightarrow c = -1 \Rightarrow \Delta: x = 1$ .

– Nếu  $21b + 20a = 0$ . Do  $a^2 + b^2 > 0$ , nên chọn  $a = 21 \Rightarrow b = -20 \Rightarrow c = 59$   
 $\Rightarrow \Delta = 21x - 20y + 59 = 0$ .

Ta thu lại kết quả của thí dụ 1, loại 2 ở trên.

**Thí dụ 2:**

Trong mặt phẳng tọa độ, cho hai điểm  $A(1; 2)$  và  $B(5; -1)$ . Viết phương trình đường thẳng qua  $P(3; 5)$  và cách đều  $A, B$ .

**Giải**

Đường thẳng  $\Delta$  qua  $P$  có dạng:  $ax + by + c = 0$ , với  $a^2 + b^2 > 0$ .

Do qua  $P(3; 5)$  nên ta có  $3a + 5b + c = 0 \Rightarrow c = -3a - 5b$ .

Vì thế  $\Delta$  có dạng:  $ax + by - 3a - 5b = 0$ .

$$\text{Ta có: } d(A, \Delta) = d(B, \Delta) \Leftrightarrow \frac{|a + 2b - 3a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|5a - b - 3a - 5b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow (-2a - 3b)^2 = (2a - 6b)^2 \Leftrightarrow b(3b - 4a) = 0$$

– Nếu  $b = 0$ . Do  $a^2 + b^2 > 0$ , nên chọn  $a = 1 \Rightarrow \Delta: x = 3$ .

– Nếu  $3b - 4a = 0$ . Do  $a^2 + b^2 > 0$ , nên chọn  $a = 3, b = 4 \Rightarrow c = -29$

$\Delta: 3x + 4y - 29 = 0$ .

Ta thu lại kết quả của thí dụ 2, loại 2 ở trên.

**Loại 4:** Phương trình đường thẳng theo đoạn chắn:

Người ta sử dụng cách viết phương trình theo đoạn chắn trong những bài toán mà các yêu cầu đầu bài đòi hỏi tính toán các giao điểm  $(a; 0)$  cũng như  $(0; b)$  của đường thẳng với trục hoành, trục tung.

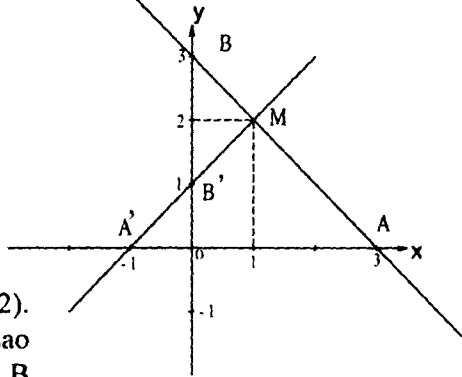
Chỉ cần lưu ý rằng: nếu  $A = (a; 0)$ ,  $B = (0; b)$  thì  $OA = |a|$ ,  $OB = |b|$ .

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:**

Trên mặt phẳng  $xOy$ , cho điểm  $M(1; 2)$ .

Viết phương trình đường thẳng qua  $M$  sao cho  $OAB$  là tam giác vuông cân, ở đây  $A, B$  lần lượt là giao điểm của đường thẳng đó với trục hoành và trục tung.



**Giải**

Giả sử  $d$  là đường thẳng qua  $M$ . Gọi  $A(a; 0)$ ,  $B(0; b)$  lần lượt là giao điểm của  $d$  với trục hoành và trục tung.

Lúc này theo phương trình đoạn chắn,  $d$  có dạng:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$

Vì d qua  $M(1;2)$ , nên ta có:  $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1$ . (1)

Do OAB là tam giác vuông cân đỉnh O, nên ta có:

$$OA = OB \Leftrightarrow |a| = |b| \quad (2)$$

Vậy ta có hệ: 
$$\begin{cases} \frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 1 \\ |a| = |b| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = b = 3 \\ a = -1; b = 1. \end{cases}$$

Như vậy có hai đường thẳng cần tìm:  $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$  và  $-\frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1$ .

### Thí dụ 2:

Cho điểm  $M(4; 3)$ . Viết phương trình đường thẳng d qua M sao cho nó tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 3.

### Giải

Giả sử  $d \cap Ox = A(a; 0)$ ,

$d \cap Oy = B(0; b)$ .

Khi đó theo phương trình đoạn chắn thì d có dạng:  $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ .

Do d qua  $M(4; 3)$ , nên ta có:  $\frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 1$ . (1)

Ta có:  $S_{OAB} = \frac{1}{2} OAB = \frac{|a| \cdot |b|}{2}$ .

Theo giả thiết suy ra:  $|a| \cdot |b| = 6$  (2)

Giải hệ (1) (2) ta có: (bạn đọc tự làm)

$$\begin{cases} a = 2; b = -3 \\ a = -4; b = \frac{3}{2}. \end{cases}$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm:

$$\frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 1 \text{ và } -\frac{x}{4} + \frac{2y}{3} = 1.$$

### Loại 5: Sử dụng phương trình “chùm đường thẳng”:

Giả sử  $d_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0$  và  $d_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$  là hai đường thẳng cắt nhau tại I. Khi đó mọi đường thẳng d qua I có dạng:  $\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$  (1), với  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ .

(1) gọi là phương trình chùm đường thẳng sinh bởi  $d_1, d_2$ .

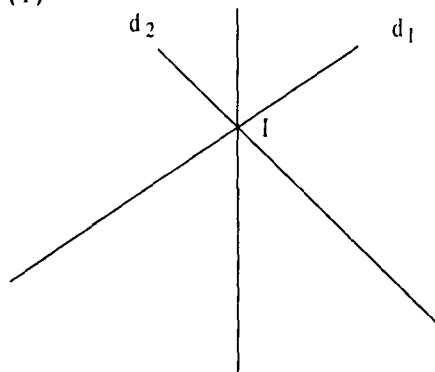
Người ta sử dụng phương trình “chùm đường thẳng” để giải các bài toán có dạng sau:

- Viết phương trình đường thẳng đi qua một điểm I là giao điểm của hai đường thẳng  $d_1$  và  $d_2$  cho trước và thỏa mãn một điều kiện nào đó.

Phương pháp giải như sau:

- Viết phương trình (1).

- Dựa vào điều kiện đầu bài lập được một hệ thức giữa  $\alpha$  và  $\beta$ .



– Từ hệ thức tìm được, dựa vào điều kiện  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , chọn giá trị thích hợp của  $\alpha, \beta$ .

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hải Phòng – 2004)**

Trong mặt phẳng Oxy cho hai đường thẳng  $d_1: x - y + 1 = 0$  và  $d_2: 2x + y - 1 = 0$  và điểm  $P(2;1)$ . Viết phương trình đường thẳng đi qua P và giao điểm của  $d_1, d_2$ .

**Giải**

Đường thẳng d qua giao điểm của  $d_1, d_2$ , nên nó thuộc chùm:

$$\alpha(x - y + 1) + \beta(2x + y - 1) = 0 \quad (1)$$

Do d qua  $P(2;1)$ , nên thay  $x = 2, y = 1$  vào (1) và có:

$$\alpha(2 - 1 + 1) + \beta(4 + 1 - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + 2\beta = 0 \quad (2)$$

Do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$  nên từ (2) chọn  $\alpha = 2, \beta = -1$  thay lại vào (1) và có:  $y = 1$ .

**Thí dụ 2:**

Cho tam giác ABC. Ba cạnh AB, BC, CA lần lượt có phương trình là  $4x + y - 12 = 0, 4x + 5y - 20 = 0$  và  $x - y - 3 = 0$ .

Viết phương trình ba đường cao của tam giác.

**Giải**

Chiều cao AA' đi qua A là giao điểm của AB, AC, nên thuộc “chùm đường thẳng” sau:

$$\alpha(4x + y - 12) + \beta(x - y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)y - 12\alpha - 3\beta = 0 \quad (1)$$

Vectơ pháp của AA: là  $\vec{n}_1 = (4\alpha + \beta; \alpha - \beta)$ .

Vectơ pháp của BC là:  $\vec{n}_2 = (4; 5)$ .

Do  $AA' \perp BC$  nên ta có  $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$

$$\Leftrightarrow 4(4\alpha + \beta) + 5(\alpha - \beta) = 0$$

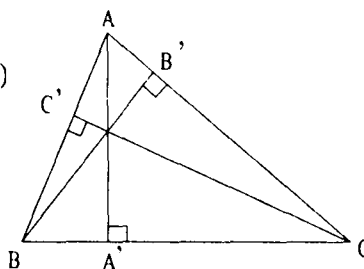
$$\Leftrightarrow 21\alpha - \beta = 0 \quad (2)$$

Do  $\alpha^2 + \beta^2 > 0$ , nên chọn  $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 21$ . Thay lại vào (1) có:

$$AA' = 25x - 20y - 75 = 0 \Leftrightarrow 5x - 4y - 15 = 0.$$

Hoàn toàn tương tự, hai chiều cao BB' và CC' có phương trình là:

$$2x + 2y - 9 = 0 \text{ và } 2x - 12y - 1 = 0.$$



## §2. CÁC BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM NHỜ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG THẲNG

Các bài toán xác định điểm nhờ phương trình đường thẳng là một trong hai nội dung chính của chuyên mục đường thẳng trong hình học giải tích phẳng. Hơn thế nữa, trong các câu hỏi thi có nội dung về đường thẳng trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học trong những năm 2002–2009, thì các bài toán thuộc loại này chiếm tỉ lệ tới 85%.

Phương pháp giải các bài toán thuộc loại này ngoài việc sử dụng các kiến thức về đường thẳng trong hình học giải tích, còn sử dụng nhiều đến các phép tính về tọa độ vector trên mặt phẳng.

**Loại 1:** Xác định điểm nhờ tương giao của hai đường thẳng:

Đây là một trong những phương pháp chính để xác định điểm trên mặt phẳng.

Người ta dựa vào điều kiện đầu bài quy điểm cần tìm là giao điểm của hai đường thẳng xác định nào đó. Các đường thẳng này hoặc đã có sẵn, hoặc phải tìm phương trình của đường thẳng đó (mà ta đã biết rất nhiều cách giải đã trình bày trong §1).

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2008)**

Cho tam giác ABC, biết hình chiếu vuông góc của C trên AB là H(-1; 1). Đường phân giác trong của A có phương trình  $x - y + 2 = 0$ , đường cao kẻ từ B có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh C.

**Giải**

Gọi K là điểm đối xứng của H qua phân giác của góc A. Giả sử HK cắt đường phân giác này tại điểm  $M(x_0; y_0)$ . Do M thuộc đường thẳng  $x - y + 2 = 0$  nên  $M(x_0; x_0 + 2)$ . Ta có  $\overrightarrow{HM} = (x_0 + 1; x_0 + 3)$ .

Đường phân giác góc A là  $x - y + 2 = 0$ , nên có vector chỉ phương  $\vec{u} = (1; 1)$ . Vì thế  $\overrightarrow{HM} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM} \cdot \vec{u} = 0$

$$\Leftrightarrow x_0 + 1 + x_0 + 3 = 0 \Leftrightarrow x_0 = -2$$

$$\Rightarrow M(-2; 0)$$

Do M là trung điểm của HK, mà H(-1; -1) nên K(-3; 1).

Đường cao BP có phương trình  $4x + 3y - 1 = 0$ , nên cạnh AC có phương trình:  $3x - 4y + m = 0$

Mặt khác AC qua K(-3; 1) nên ta có:

$$3(-3) - 4 \cdot 1 + m = 0 \Leftrightarrow m = 13.$$

Vì thế AC có phương trình:

$$3x - 4y + 13 = 0.$$

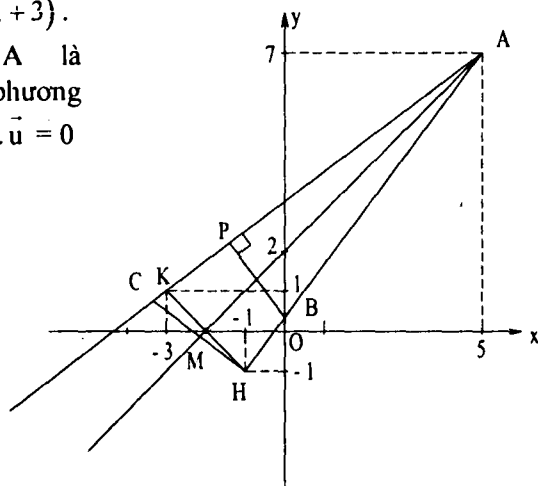
Tọa độ giao điểm A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 3x + 4y + 7 = 0 \\ 3x - 4y + 13 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{10}{3} \\ y = \frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow C\left(-\frac{10}{3}; \frac{3}{4}\right).$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A – 2009)**

Cho tam giác ABC có C(-1; -2). Đường trung tuyến kẻ từ A và đường cao kẻ từ B lần lượt có phương trình là:  $5x + y - 9 = 0$  và  $x + 3y - 5 = 0$ .

Tìm tọa độ các đỉnh A, B.



**Giải**

Vì  $AC \perp BH$  mà  $BH$  có phương trình  $x + 3y - 5 = 0$ , nên  $AC$  có phương trình:

$$3x - y + m = 0.$$

Do  $AC$  qua  $C(-1; -2)$ , nên có:

$$-3 + 2 + m = 0 \Rightarrow m = 1.$$

Vậy  $AC$  có phương trình:  $3x - y + 1 = 0$ .

Do đó tọa độ  $(x; y)$  của  $A$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5x + y - 9 = 0 \\ 3x - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow A(1; 4).$$

Gọi tọa độ của  $B$  là  $(x_0; y_0)$ . Do  $B \in BH \Rightarrow x_0 + 3y_0 - 5 = 0$  (1).

$$\text{Ta có } M = \left( \frac{x_0 - 1}{2}; \frac{y_0 - 2}{2} \right).$$

Vì  $M$  nằm trên đường trung tuyến  $AM$ :  $5x + y - 9 = 0$ , nên ta có:

$$5\left(\frac{x_0 - 1}{2}\right) + \left(\frac{y_0 - 2}{2}\right) - 9 = 0. \quad (2)$$

Từ hệ (1) (2) suy ra:  $x_0 = 5; y_0 = 0 \Rightarrow B(5; 0)$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)**

Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(0; 2)$  và  $B(\sqrt{3}; -1)$ . Tìm tọa độ trực tâm và tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác  $OAB$ .

**Giải**

\* Tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác:

Đường thẳng  $OB$  có hệ số góc là:

$$k_1 = \frac{-1 - 0}{\sqrt{3} - 0} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Do đó đường trung trực của  $OB$  có hệ số góc  $k_2 = \sqrt{3}$ . Trung điểm  $M$  của

$OB$  có tọa độ  $M\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ . Vậy,

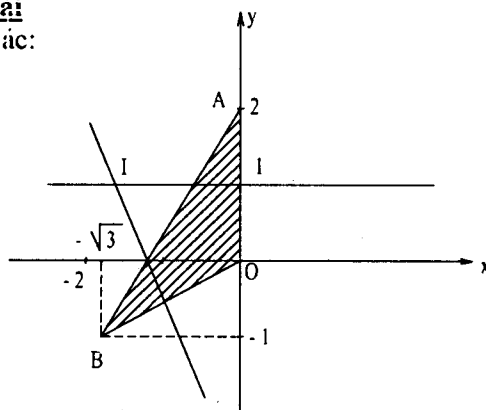
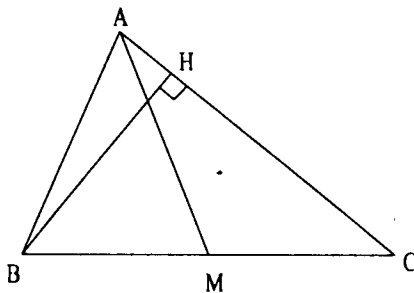
đường trung trực của  $OB$  có phương trình:

$$y = -\sqrt{3}\left(x + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}x - 2.$$

Trung trực  $OA$  có phương trình  $y = 1$ . Gọi  $I$  là tâm đường tròn ngoại tiếp  $\triangle OAB$ , thì  $I$  là giao điểm của hai đường trung trực nói trên. Từ đó suy ra tọa độ điểm  $I$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y = -\sqrt{3}x - 2 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{3} \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow I(-\sqrt{3}; 1).$$

\* Tọa độ trực tâm của tam giác:



Đường thẳng qua B vuông góc với OA có phương trình  $y = -1$ ; đường thẳng qua A và vuông góc với OB có phương trình  $y = -\sqrt{3}(x-0)+2$  hay  $y = -\sqrt{3}x+2$ . Giao của  $y = 1$  và  $y = -\sqrt{3}x+2$  chính là trực tâm H của tam giác. Vì vậy, tọa độ H là  $(\sqrt{3}; -1)$

**Loại 2:** Xác định điểm nhờ các phép tính vector

Trong mục này xét các bài toán xác định điểm xác định các phép tính vector như các công thức về khoảng cách, tích vô hướng của hai vector ...

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(1;1)$ ,  $B(4;-3)$ . Tìm tọa độ điểm C thuộc đường thẳng  $d: x-2y-1=0$  sao cho khoảng cách từ C đến đường thẳng AB bằng 6.

**Giải**

Đường thẳng AB có phương trình:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y-1}{-3-1} \Leftrightarrow -4(x-1) = 3(y-1) \\ \Leftrightarrow 4x+3y-7=0.$$

Gọi  $C(x_0; y_0)$  là điểm trên d, khi đó ta có:

$$x_0 - 2y_0 - 1 = 0 \Rightarrow x_0 = 2y_0 + 1 \Rightarrow C(2y_0+1; y_0).$$

Khoảng cách từ C đến AB bằng 6 tức là:

$$\frac{|4(2y_0+1)+3y_0-7|}{5} = 6 \Leftrightarrow |11y_0-3| = 30$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 11y_0-3=30 \\ 11y_0-3=-30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0=3; x_0=7 \\ y_0=-\frac{27}{11}; x_0=-\frac{43}{11} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm C cần tìm là  $C_1(7;3)$  và

$$C_2\left(-\frac{43}{11}; -\frac{27}{11}\right).$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Trên mặt phẳng tọa độ cho điểm  $A(2;2)$  và hai đường thẳng  $d_1: x+y-2=0$ ,  $d_2: x+y-8=0$ . Tìm B, C tương ứng trong  $d_1$  và  $d_2$  sao cho tam giác ABC là tam giác vuông cân tại A.

**Giải**

Giả sử  $B(x_1; y_1) \in d_1$ , thì  $B(x_1; 2-x_1)$ ;  $C(x_2; y_2) \in d_2$ , thì  $C(x_2; 8-x_2)$ . Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = (x_1-2; y_1-2) = (x_1-2; -x_1) \quad \overrightarrow{AC} = (x_2-2; 6-x_2)$$

Do ABC là tam giác vuông cân tại A, nên trước hết ta phải có:

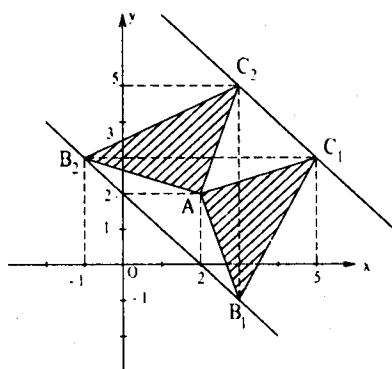
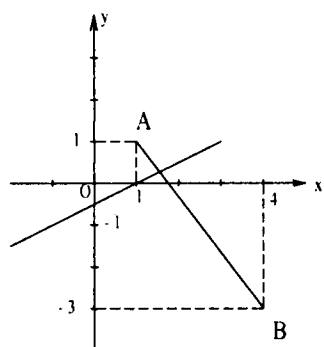
$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_1-2)(x_2-2) - x_1(6-x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 - (x_1+x_2) + 2 - 3x_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1x_2 - 4x_1 - x_2 + 4 = 2 \Leftrightarrow (x_1-1)(x_2-4) = 2.$$

(1)

Mặt khác, ta còn có:



$$AB = AC \Leftrightarrow (x_1 - 2)^2 + x_1^2 = (x_2 - 2)^2 + (6 - x_2)^2 \Leftrightarrow x_1^2 - 2x_1 + 2 = x_2^2 - 8x_2 + 20$$

$$\Leftrightarrow (x_1 - 1)^2 - (x_2 - 4)^2 = 3. \quad (2)$$

Đặt  $u = x_1 - 1$ ;  $v = x_2 - 4$ . Khi đó, từ (1) và (2) ta có hệ:

$$\begin{cases} uv = 2 \\ u^2 - v^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2; v = 1 \\ u = -2; v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3; x_2 = 5 \\ x_1 = -1; x_2 = 3 \end{cases}$$

Vậy có hai cặp điểm B, C thỏa mãn yêu cầu bài toán:  $B_1(3; -1)$ ,  $C_1(5; 3)$  và  $B_2(-1; 3)$ ,  $C_2(3; 5)$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho các đường thẳng  $d_1: x + y + 3 = 0$  và  $d_2: x - y - 4 = 0$ ,  $d_3: x - 2y = 0$ . Tìm tọa độ các điểm M nằm trên  $d_3$  sao cho khoảng cách từ M đến  $d_1$  bằng 2 lần khoảng cách từ M đến  $d_2$ .

**Giải**

Giả sử  $M \in d_3$   $M(2y_0; y_0)$ , theo bài ra ta có:

$$d(M, d_1) = 2d(M, d_2) \Leftrightarrow \frac{|2y_0 + y_0 + 3|}{\sqrt{2}} = 2 \frac{|2y_0 - y_0 - 4|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Vậy trên  $d_3$  có hai điểm cần tìm:

$M_1(-2; -1)$  và  $M_2(2; 1)$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng  $d_1: x - y = 0$  và  $d_2: 2x + y - 1 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh hình vuông ABCD, biết A thuộc  $d_1$ ; C thuộc  $d_2$ , còn B, D thuộc trục hoành.

**Giải**

Giả sử hoành độ của A là  $x_0$ . Do  $A \in d_1$  nên  $A(x_0; x_0)$ . Vì B, D nằm trên Ox nên A và C đối xứng với nhau qua trục hoành; do đó  $C(x_0; -x_0)$ . Mặt khác,  $C \in d_2$ , nên ta có:

$2x_0 - x_0 - 1 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 1$ . Từ đó  $A(1; 1)$ ,  $C(1; -1)$ .

Gọi I là trung điểm của AC, thì  $I(1; 0)$ .

Do ABCD là hình vuông, nên:

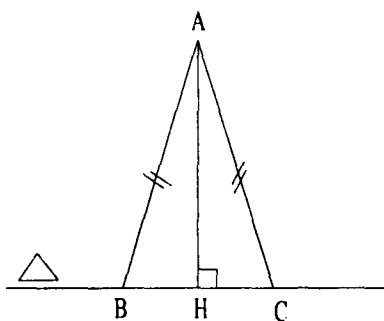
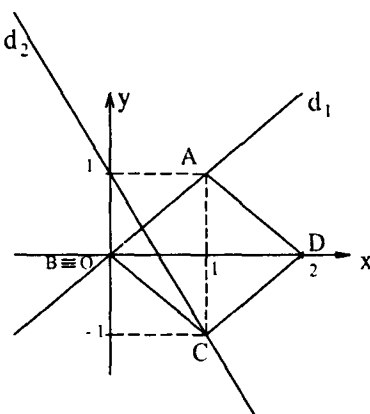
$IA = IB = IC = ID$ . Từ đó, suy ra được tọa độ của B và D là:  $B(0; 0)$ ,  $D(2; 0)$  hoặc  $B(2; 0)$ ,  $D(0; 0)$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Cho tam giác ABC đỉnh  $A(1; 4)$ , hai đỉnh B, C nằm trên đường thẳng  $\Delta: x - y - 4 = 0$ . Biết rằng diện tích của  $\Delta ABC$  bằng 18. Tìm tọa độ các đỉnh B, C.

**Giải**

Khoảng cách từ A tới đường thẳng  $\Delta$  là:



$AH^2 + BH^2 = \sqrt{\frac{97}{2}}$  trên BC  $HB=HC=2\sqrt{2}$   
 tọa độ của B, C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y - 4 = 0 \\ (x+1)^2 + (y-4)^2 = \frac{97}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ x = \frac{3}{2}; y = \end{cases}$$

Vậy  $\begin{cases} B = \left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right), C = \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right) \\ B = \left(\frac{3}{2}; -\frac{5}{2}\right), C = \left(\frac{11}{2}; \frac{3}{2}\right) \end{cases}$

**Thí dụ 5:**

Cho đường thẳng  $d: x - 2y + 2 = 0$  và hai điểm  $A(0;6)$ ,  $B(2;5)$  Tìm điểm  $M$  trên  $d$  sao cho  $MA + MB$  nhỏ nhất.

**Giải**

Lược đồ chung để giải lớp bài toán: “Cho đường thẳng  $d$  và hai điểm  $A, B$ . Tìm trên  $d$  điểm  $M$  sao cho  $MA + MB$  là nhỏ nhất” như sau:

– Tìm xem  $A, B$  có ở cùng 1 phía đối với  $d$  hay không.

– Để làm được điều này, ta xét  $f(x, y) = ax + by + c$ , ở đây  $ax + by + c = 0$  là phương trình của  $d$ . Có các trường hợp sau

– **Trường hợp 1:** Giả sử  $A(x_1; y_1)$ ,  $B(x_2; y_2)$  thì đó  $A, B$  nằm ở hai phía khác nhau của  $d$ . Lúc này  $B$  nằm về cùng một phía đối với  $d$ , Lúc này

hãy tìm.



Ta có  $f(0, 6) = -10$  và  $f(2, 5) = -6$  nên suy ra  $f(0, 6).f(2, 5) > 0$  vậy A, B ở cùng một phía của d.

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua d; H là hình chiếu của A trên d, vectơ pháp tuyến của d là  $\vec{n} = (1; -2)$ . Giả sử tọa độ của H là  $H(x_0; y_0)$ , thế thì:  $x_0 - 2y_0 + 2 = 0$

$\Rightarrow x_0 = 2y_0 - 2$ . Suy ra:  $H(2y_0 - 2; y_0)$  và  $\overrightarrow{AH} = (2y_0 - 2; y_0 - 6)$ . Vì  $\overrightarrow{AH}$  cùng phương với  $\vec{n}$ , nên ta có:

$$\frac{2y_0 - 2}{1} = \frac{y_0 - 6}{-2} \Leftrightarrow -4y_0 + 4 = y_0 - 6$$

$$\Leftrightarrow y_0 = 2 \Rightarrow H(2; 2).$$

Vì vậy, tọa độ A' là:  $\begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A \\ y_{A'} = 2y_H - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{A'} = 4 \\ y_{A'} = -2 \end{cases} \Leftrightarrow A'(4; -2).$

Đường thẳng nối A'(4; -2) và B(2; 5) có phương trình:

$$\frac{x-4}{2-4} = \frac{y+2}{5+2} \Leftrightarrow 7(x-4) = -2(y+2) \Leftrightarrow 7x + 2y - 24 = 0.$$

Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x - 2y + 2 = 0 \\ 7x + 2y - 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11}{4} \\ y = \frac{19}{8} \end{cases} \Rightarrow M\left(\frac{11}{4}; \frac{19}{8}\right).$$

**Chú ý:** Qua thí dụ trên, nói riêng ta đã biết được cách tìm hình chiếu của một điểm trên một đường thẳng.

#### Thí dụ 6:

Trong mặt phẳng tọa độ cho bốn điểm A(1;0), B(-2;4), C(-1;4) và D(3;5). Giả sử  $\Delta$  là đường thẳng có phương trình  $3x - y - 5 = 0$ . Tìm điểm M trên  $\Delta$  sao cho hai tam giác MAB và MCD có diện tích bằng nhau.

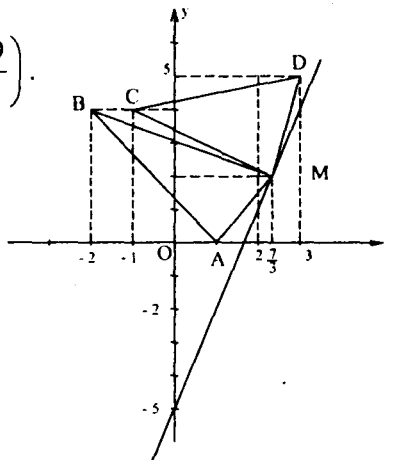
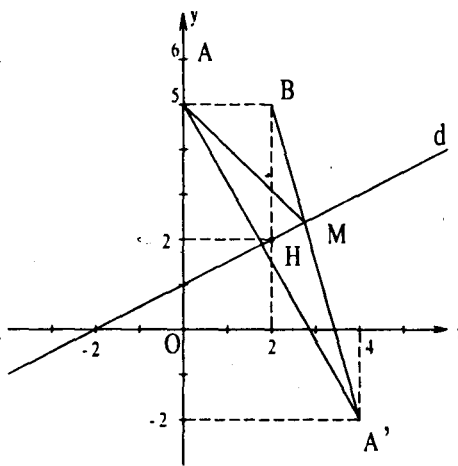
#### Giải

Ta có  $AB=5$ ,  $CD = \sqrt{17}$ . Gọi  $(x_0; y_0)$  là tọa độ của điểm M nằm trên  $\Delta$ . Khi đó ta có:  $3x_0 - y_0 = 5$  (1)

Để thấy các đường thẳng qua A, B và C, D lần lượt có phương trình:

$$4x + 3y - 4 = 0 \text{ và } x - 4y + 17 = 0.$$

$$\text{Từ đó: } S_{MAB} = S_{MCD}$$



$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot 5 \frac{|4x_0 + 3y_0 - 4|}{5} = \frac{1}{2} \sqrt{17} \frac{|x_0 - 4y_0 + 17|}{\sqrt{17}}$$

$$\Leftrightarrow |4x_0 + 3y_0 - 4| = |x_0 - 4y_0 + 17|. \quad (2)$$

Từ (1) (2) suy ra: 
$$\begin{cases} x_0 = \frac{7}{3}, y_0 = 2 \\ x_0 = -9; y_0 = -32 \end{cases}$$

Vậy trên  $\Delta$  có hai điểm cần tìm:  $M_1\left(\frac{7}{3}; 2\right)$  và  $M_2(-9; -32)$ .

**Thí dụ 7:**

Cho tam giác ABC có diện tích bằng  $\frac{3}{2}$  và hai điểm A(2; -3) và B(3; -2).

Trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng  $3x - y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ đỉnh C của tam giác.

**Giải**

Gọi M là trung điểm của AB

$$\Rightarrow M\left(\frac{5}{2}; -\frac{5}{2}\right). \text{ Đường thẳng nối } A(2; -3) \text{ và}$$

B(3; -2) dễ thấy có phương trình:  $x - y - 5 = 0$ .

Vì G là trọng tâm  $\Delta ABC$

$$\text{nên } S_{ABG} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{2}.$$

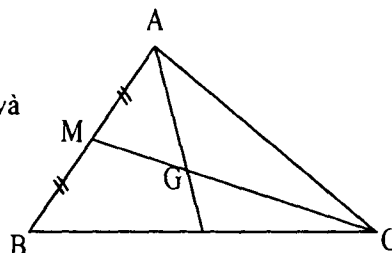
Giả sử G  $(x_0; y_0)$ , nên ta có:  $3x_0 - y_0 - 8 = 0$  (1)

$$\text{Ta có } AB = \sqrt{2} \text{ nên khoảng cách từ G tới AB là: } d(G, AB) = \frac{2S_{GAB}}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{|x_0 - y_0 - 5|}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow |x_0 - y_0 - 5| = 1. \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) (2) suy ra: } \begin{cases} x_0 = 1; y_0 = 5 \\ x_0 = 2; y_0 = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} G = (1; -5) \\ G = (2; -2) \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Áp dụng công thức tính tọa độ trọng tâm, từ (3) suy ra: } \begin{cases} C = (2; -2) \\ C = (1; -1) \end{cases}$$



## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Một hình thoi có một đường chéo có phương trình là  $x + 2y - 7 = 0$ , một cạnh có phương trình  $x + 3y - 3 = 0$ , một đỉnh là  $(0;1)$ . Viết phương trình ba cạnh còn lại và đường chéo thứ hai của hình thoi.

Đáp số: – Đường chéo thứ hai:  $2x - y + 1 = 0$

– Ba cạnh:  $x + 3y - 17 = 0$ ;  $9x + 13y - 83 = 0$ ;  $9x + 13y - 13 = 0$ .

### Bài 2:

Trong mặt phẳng  $xOy$ , cho hai điểm  $M(1;4)$  và  $N(6;2)$ . Lập phương trình đường thẳng qua  $N$  sao cho khoảng cách từ  $M$  tới nó bằng 2.

Đáp số:  $\begin{cases} y = 2 \\ 20x + 21y - 162 = 0. \end{cases}$

### Bài 3:

Trong mặt phẳng  $Oxy$ , cho điểm  $M(3;1)$ . Viết phương trình đường thẳng qua  $M$  và cắt hai nửa trục  $Ox$ ,  $Oy$  tương ứng tại  $A$ ,  $B$  sao cho  $OA+OB$  đạt giá trị bé nhất.

Đáp số:  $\frac{x}{3+\sqrt{3}} + \frac{y}{1+\sqrt{3}} = 1$ .

### Bài 4:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  có đỉnh  $A(1;0)$  và hai đường thẳng lần lượt chứa đường cao kẻ từ  $B$  và  $C$  có phương trình:

$$x-2y+1=0 \text{ và } 3x+y+1=0.$$

Tính diện tích tam giác  $ABC$ .

Đáp số: 14 (đvdt).

### Bài 5:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho đường thẳng  $d$  có phương trình:  $2x+3y+1=0$  và điểm  $M(1;1)$ . Viết phương trình của các đường thẳng qua  $M$  và tạo với  $d$  một góc  $45^\circ$ .

Đáp số:  $\begin{cases} 5x + y - 6 = 0 \\ x - 5y - 4 = 0. \end{cases}$

### Bài 6:

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  $Oxy$ , cho tam giác  $ABC$  với  $A(1;2)$ . Đường trung tuyến  $BM$  và đường phân giác trong  $CD$  tương ứng có phương trình là  $2x + y + 1 = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $BC$ .

Đáp số:  $4x + 3y + 4 = 0$ .

**Bài 7: (Đề thi Đại học khối B – 2003)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác ABC có  $AB = AC$ ,  $\widehat{BAC} = 90^\circ$ . Biết  $M(1; -1)$  là trung điểm của BC và  $G\left(\frac{2}{3}; 0\right)$  là trọng tâm của tam giác ABC. Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Đáp số:  $\begin{cases} A(0; 2), B(-2; -2), C(4; 0) \\ A(0; 2), B(4; 0), C(-2; -2) \end{cases}$ .

**Bài 8:**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho tam giác cân ABC đỉnh A, có trọng tâm  $G\left(\frac{4}{3}; \frac{1}{3}\right)$ . Phương trình đường thẳng BC là  $x - 2y - 4 = 0$ , phương trình đường thẳng BG là  $7x - 4y - 8 = 0$ . Tìm tọa độ các đỉnh A, B, C.

Đáp số:  $A(0; 3), B(0; -2), C(4; 0)$ .

**Bài 9: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)**

Trong mặt phẳng Oxy, cho hình chữ nhật có tâm  $I\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ . Phương trình đường thẳng AB là  $x - 2y + 2 = 0$  và  $AB = 2AD$ . Tìm tọa độ của đỉnh A, B, C, D biết rằng đỉnh A có hoành độ âm.

Đáp số:  $A(-2; 0), B(2; 2), C(3; 0), D(-1, -2)$ .

**Bài 10:**

Trong mặt phẳng Oxy cho  $A(0; 2)$  và đường thẳng d:  $x - 2y + 2 = 0$ . Tìm trên d hai điểm B, C sao cho tam giác ABC vuông ở B và  $AB = 2BC$ .

Đáp số:  $B\left(\frac{2}{5}; \frac{6}{5}\right)$  còn  $C(0; 1)$  hoặc  $C\left(\frac{4}{5}; \frac{7}{5}\right)$ .

## Bài giảng số 14

# ĐƯỜNG TRÒN

Cùng với đường thẳng, đường tròn là một trong hai chủ đề chính luôn được đề cập đến trong các đề thi môn Toán vào các trường Đại học và Cao đẳng trong những năm 2002–2009. Bài giảng này cung cấp các phương pháp cơ bản để giải các bài toán về đường tròn trong hình học giải tích phẳng.

### §1. CÁC BÀI TOÁN THIẾT LẬP PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN

– Người ta thường dùng hai dạng phương trình sau đây của đường tròn:

$$1/ (x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Dưới dạng này, đường tròn có tâm tại  $I(a; b)$  và bán kính  $R$ .

2/  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ , trong đó  $a^2 + b^2 > c$ .

Dưới dạng này đường tròn có tâm tại điểm  $I(-a; -b)$  và bán kính bằng  $\sqrt{a^2 + b^2 - c}$ .

Giả sử cho đường tròn (C):  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  và đường thẳng d:  $Ax + By + C = 0$ . Gọi  $h$  là khoảng cách từ tâm  $I(a; b)$  của (C) tới d. Khi đó ta có:

$$h = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Khi đó nếu:

–  $h > R$ : (C) và d không cắt nhau

–  $h = R$ : (C) và d tiếp xúc với nhau

–  $h < R$ : (C) và d cắt nhau tại hai điểm.

Các kết quả nói trên luôn luôn được sử dụng đến trong bài giảng này.

**Các dạng bài tập cơ bản:**

**Loại 1:** Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm không thẳng hàng cho trước.

Đây là dạng bài tập cơ bản nhất. Ta có thể sử dụng cả hai cách viết phương trình đường tròn để giải loại bài tập đơn giản này. Xét các thí dụ sau đây:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC với ba đỉnh  $A(0; 2)$ ,  $B(-2; -2)$ ,  $C(4; -2)$ . Gọi H là chân đường cao kẻ từ B xuống cạnh AC, còn M, N tương ứng là các trung điểm của AB, AC.

Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm H, M, N.

**Giải**

Vì M, N tương ứng là trung điểm của AB, AC nên ta có ngay:

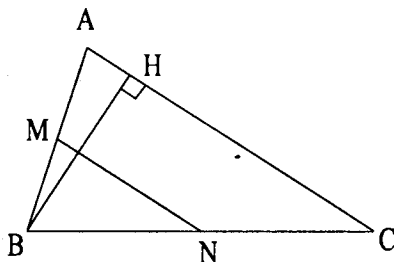
$M(-1; 0)$  và  $N(1; -2)$ .

H là hình chiếu của B trên AC, nên dễ dàng thấy  $H(1; 1)$  (xem thí dụ 1, loại 1, §2, bài giảng 13).

Bài toán quy về viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm  $H(1; 1)$ ,  $M(-1; 0)$ ,  $N(1; -2)$ .

Gọi  $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$  là phương trình đường tròn ấy. Ta có hệ ba phương trình sau để xác định  $a, b, c$ :

$$\begin{cases} 2a + 2b + c = -1 \\ -2a + c = -1 \\ 2a - 4b + c = -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{1}{2} \\ b = \frac{1}{2} \\ c = -2. \end{cases}$$



Vậy đường tròn phải tìm có phương trình:

$$x^2 + y^2 - x + y - 2 = 0$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Công nghiệp Hà Nội – 2004)**

Trong mặt phẳng Oxy cho tam giác ABC, hai cạnh AB, AC theo thứ tự có phương trình  $x + y - 2 = 0$  và  $2x + 6y - 3 = 0$ . Cạnh BC có trung điểm  $M(-1; 1)$ .

Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

**Giải**

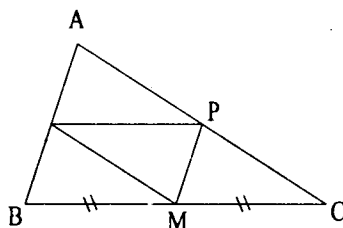
Tọa độ  $(x; y)$  của A là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x + 5y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{15}{4} \\ y = -\frac{7}{4} \end{cases} \Rightarrow A = \left( \frac{15}{4}; -\frac{7}{4} \right) \quad (1).$$

Gọi P là trung điểm của AC. Khi đó  $MP \parallel AB$ , nên MP có dạng  $x + y + \alpha = 0$ . Do MP qua  $M(-1; 1)$   $\alpha = 0$ .

Từ đó tọa độ  $(x; y)$  của P là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 6y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{4} \\ y = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow P = \left( \frac{3}{4}; -\frac{3}{4} \right) \quad (2)$$



Do P là trung điểm của AC, nên từ (1) (2) suy ra  $C\left(-\frac{9}{4}; \frac{1}{4}\right)$ .

Lập luận tương tự ta có:  $B\left(\frac{1}{4}; \frac{7}{4}\right)$ .

Bài toán trở thành: Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm A, B, C. Giải như thí dụ 1 (bài toán rất cơ bản) ta có phương trình đường tròn cần tìm là:

$$x^2 + y^2 - x + 3y - \frac{65}{8} = 0.$$

**Nhận xét:** Như vậy để giải các bài toán thuộc loại 1 viết phương trình đường tròn qua ba điểm A, B, C có hai bước:

- Tìm tọa độ ba điểm A, B, C.
- Lập hệ phương trình để xác định các tham số a, b, c trong phương trình tổng quát:

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0.$$

**Loại 2:** Lập phương trình đường tròn tiếp xúc với đường thẳng hoặc đường tròn cho biết trước.

Để giải các loại toán này chỉ cần sử dụng thành thạo các kiến thức sau đây:

1/ Đường thẳng  $Ax + By + C = 0$  là tiếp tuyến của đường tròn  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm  $I(a; b)$  tới đường thẳng bằng R.

2/ Hai đường tròn  $(O_1; R_1)$  và  $(O_2; R_2)$  tiếp xúc ngoài (tiếp xúc trong) với nhau khi và chỉ khi  $O_1O_2 = R_1 + R_2$  ( $O_1O_2 = |R_1 - R_2|$ )

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Cho đường tròn (C):  $(x - 2)^2 + y^2 = \frac{4}{5}$  và hai đường thẳng  $d_1: x - y = 0$ ,

$d_2: x - 7y = 0$ . Viết phương trình đường tròn tâm K nằm trên (C) và đồng thời tiếp xúc với  $d_1, d_2$ .

**Giải**

Giả sử đường tròn  $(C_1)$  cần tìm có tâm  $K(a; b)$  và bán kính R. Khi đó  $(C_1)$  có phương trình:  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$  (1)

Vì  $K \in (C)$  nên ta có:  $(a - 2)^2 + b^2 = \frac{4}{5}$  (2)

Mặt khác vì  $(C_1)$  tiếp xúc với cả  $d_1$  và  $d_2$  nên ta có:

$$d(K, d_1) = d(K, d_2) = R \Leftrightarrow \frac{|a - b|}{\sqrt{2}} = \frac{|a - 7b|}{\sqrt{50}} = R \Leftrightarrow |a - b| = \frac{|a - 7b|}{5} = R \quad (3)$$

$$\text{Từ (3) ta có } |a - 7b| = 5|a - b| \Leftrightarrow \begin{cases} a - 7b = 5a - 5b \\ a - 7b = 5b - 5a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{b}{2} \\ a = 2b \end{cases} \quad (4)$$

Từ (4) suy ra:

– Nếu  $a = -\frac{b}{2}$ , thay lại vào (2) và có  $25a^2 - 20a + 16 = 0$ ; vô nghiệm.

– Nếu  $a = 2b$ , thay lại vào (2) và có  $(5b - 4)^2 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{4}{5}$ .

Vậy ta có  $K = \left(\frac{8}{5}; \frac{4}{5}\right)$  và khi đó  $R = \frac{2\sqrt{2}}{5}$ . Do đó đường tròn cần tìm có dạng

$$(C): \left(x - \frac{8}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8}{25}.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Trong mặt phẳng Oxy cho hai điểm A(2;0) và B(6;4). Viết phương trình đường tròn (C) tiếp xúc với trục hoành tại điểm A và có khoảng cách từ tâm của (C) đến B bằng 5.

**Giải**

Do đường tròn tiếp xúc với trục hoành tại  $A(2; 0)$  nên tâm  $I$  của nó nằm trên đường thẳng  $x = 2$ . Giả sử  $I(2; y_0)$ , thì bán kính  $R$  của đường tròn chính là  $R = |y_0|$ . Theo giả thiết ta có:

$$IB = 5$$

$$\Leftrightarrow (2-6)^2 + (y_0-4)^2 = 25$$

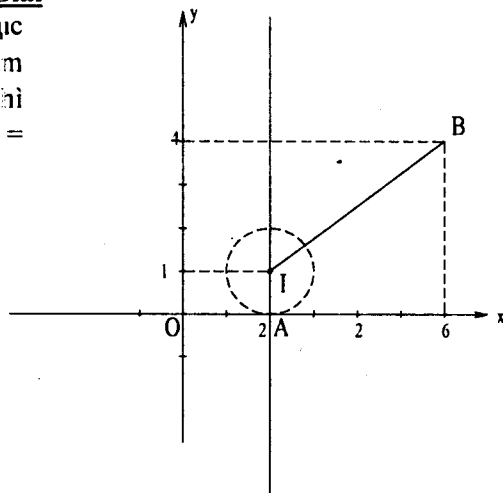
$$\Leftrightarrow y_0^2 - 8y_0 + 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = 7 \\ y_0 = 1. \end{cases}$$

- Khi  $y_0 = 7$  đường tròn là:

$$(x-2)^2 + (y-7)^2 = 49$$

- Khi  $y_0 = 1$  đường tròn là:

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 1$$

**Thí dụ 3:**

Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng  $x = 5$  và tiếp xúc với hai đường thẳng  $d_1: 3x - y + 3 = 0$  và  $d_2: x - 3y + 9 = 0$ .

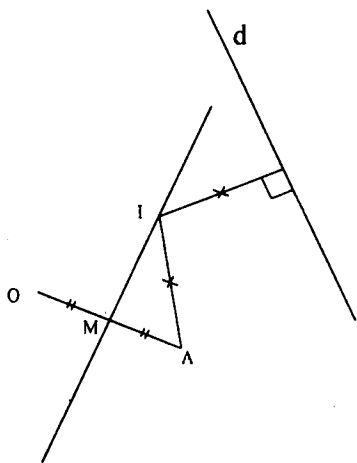
**Giải**

Gọi  $I(5; y_0)$  là tâm đường tròn cần tìm. Do đường tròn tiếp xúc với cả  $d_1$  và  $d_2$  nên ta có phương trình:

$$\frac{|15 - y_0 + 3|}{\sqrt{10}} = \frac{|5 - 3y_0 + 9|}{\sqrt{10}} (= R) \Leftrightarrow |18 - y_0| = |14 - 3y_0| \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = -2 \\ y_0 = 8. \end{cases}$$

- Khi  $y_0 = -2$   $R = \sqrt{40}$ , còn khi  $y_0 = 8$ ,  $R = \sqrt{10}$ .

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn yêu cầu đầu bài:

$$\begin{cases} (x-5)^2 + (y+2)^2 = 40 \\ (x-5)^2 + (y-8)^2 = 10. \end{cases}$$
**Thí dụ 4:**

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho đường thẳng  $d: x - y + 1 - \sqrt{2} = 0$  và điểm  $A(-1; 1)$ . Viết phương trình đường tròn (C) qua A, gốc tọa độ O và tiếp xúc với d.

**Giải**

Gọi M là trung điểm của OA thì

$M\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ . Ta có:  $\overrightarrow{OA} = (-1; 1)$  là vector

pháp tuyến của trung trực của đoạn OA, do đó trung trực của đoạn OA có phương trình:

$$-\left(x + \frac{1}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -x + y - 1 = 0.$$



Tâm I của đường tròn nằm trên trục này, nên ta có:  $I(x_0; x_0+1)$ . Theo bài ra ta có:

$$IA = d(I, d) \Leftrightarrow \sqrt{(x_0+1)^2 + x_0^2} = \frac{|-x_0 + x_0 + 1 - 1|}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = -1. \end{cases}$$

+ Khi  $x_0=0$  thì bán kính R của (C) là  $R=1$ .

+ Khi  $x_0=-1$  thì bán kính của (C) là  $R=1$ .

Vậy có hai đường tròn cần tìm 
$$\begin{cases} x^2 + (y-1)^2 = 1 \\ (x+1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

**Thí dụ 5:**

Lập phương trình đường tròn đi qua điểm  $A(4;2)$  và tiếp xúc với hai đường thẳng  $d_1: x-3y-2=0$  và  $d_2: x-3y+18=0$

**Giải**

Giả sử đường tròn (C) có phương trình:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2.$$

Do  $A \in (C)$ , nên ta có  $(4-a)^2 + (2-b)^2 = R^2$  (1)

Vì đường tròn (C) tiếp xúc với  $d_1$  và  $d_2$ , nên ta có:

$$\frac{|a-3b-2|}{\sqrt{10}} = \frac{|a-3b+18|}{\sqrt{10}} = R \Leftrightarrow |a-3b-2| = |a-3b+18|. \quad (2)$$

Ta có: (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} (4-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \\ |a-3b-2| = |a-3b+18| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (4-a)^2 + (2-b)^2 = R^2 \\ a-3b = -8 \\ R = \sqrt{10}. \end{cases}$

Giải hệ trên ta có:  $a = 1$ ;  $b = 3$  và  $a = \frac{29}{5}$ ;  $b = \frac{23}{5}$ .

Vậy có hai đường tròn cần tìm là:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 10 \text{ và } \left(x - \frac{29}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{23}{5}\right)^2 = 10.$$

**Thí dụ 6:**

Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C) có phương trình:

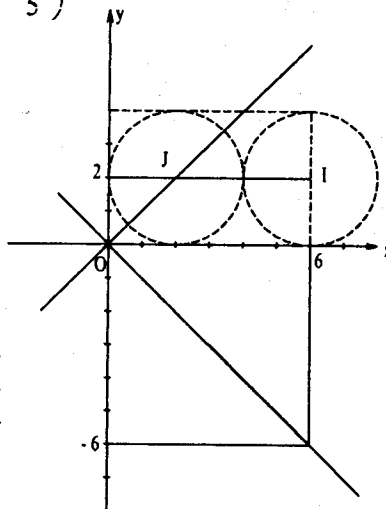
$$x^2 + y^2 - 12x - 4y + 36 = 0$$

Viết phương trình đường tròn  $(C_1)$  tiếp xúc với hai trục tọa độ và tiếp xúc ngoài với (C).

**Giải**

Viết lại (C) dưới dạng:  $(x-6)^2 + (y-2)^2 = 4$

Vậy (C) là đường tròn tâm  $I(6;2)$ , bán kính  $R = 2$ . Vì đường tròn cần tìm tiếp xúc với hai trục tọa độ nên tâm J của nó phải nằm trên  $y = x$  (hoặc  $y = -x$ ). Do đó, ta xét hai khả năng sau:



+ Nếu J thuộc đường thẳng  $y = x$ . Lúc đó, giả sử  $J = (x_0; y_0)$ , thì  $R = |x_0|$ . Vì đường tròn tâm J, bán kính  $x_0$  tiếp xúc ngoài với đường tròn (C), nên ta có:

$$IJ = |x_0| + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 6)^2 + (x_0 - 2)^2} = |x_0| + 2 \Leftrightarrow 2x_0^2 - 16x_0 + 40 = x_0^2 + 4 + 4|x_0| \quad (1)$$

+ Nếu  $x_0 < 0$ , thì (1):  $\Leftrightarrow 2x_0^2 - 16x_0 + 40 = x_0^2 + 4 - 4x_0$   
 $\Leftrightarrow x_0^2 - 12x_0 + 36 = 0$ : Vô nghiệm.

+ Nếu  $x_0 > 0$ , thì (1)  $\Leftrightarrow x_0^2 - 20x_0 + 36 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2 \\ x_0 = 18. \end{cases}$

\* Nếu J thuộc đường thẳng  $y = -x$ . Lúc đó giả sử  $J = (x_0; -x_0)$ , thì  $R = |x_0|$ . Lúc này, làm tương tự như trên, ta có:

$$IJ = |x_0| + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x_0 - 6)^2 + (-x_0 - 2)^2} = |x_0| + 2$$

Khi đó ta có  $x_0 = 6$ . Vậy có ba đường tròn cần tìm là

$$(x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 4; (x - 18)^2 + (y - 18)^2 = 24 \text{ và } (x - 6)^2 + (y + 6)^2 = 36.$$

## §2. BÀI TOÁN VIẾT PHƯƠNG TRÌNH TIẾP TUYẾN VÀ CÁT TUYẾN VỚI ĐƯỜNG TRÒN

Trong mục này xét các bài toán về lập phương trình tiếp tuyến và cát tuyến với đường tròn (C) cho trước và thỏa mãn những điều kiện nào đó:

Phương pháp giải các bài toán này cũng dựa vào công thức tính khoảng cách từ tâm  $I(a, b)$  của đường tròn (C):  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ , tới đường thẳng  $Ax + By + C = 0$  sau đây:  $d(I, \Delta) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

$= 0$  sau đây:  $d(I, \Delta) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ .

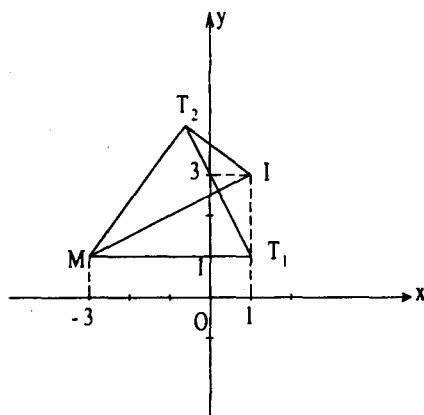
Ngoài ra ta cũng cần sử dụng đến các điều kiện sau:

$\Delta$  là tiếp tuyến của (C)  $\Leftrightarrow d(I, \Delta) = R$

$\Delta$  cắt (C) tại hai điểm phân biệt  $\Leftrightarrow d(I, \Delta) < R$ .

**Loại 1:** Các bài toán về tiếp tuyến với đường tròn

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh đại học khối B - 2006)**



Trong mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C):  $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 6 = 0$  và điểm  $M(-3; 1)$ . Gọi  $T_1, T_2$  là các tiếp điểm của các tiếp tuyến kẻ từ M đến (C). Viết phương trình đường thẳng  $T_1T_2$ .

**Giải**

Viết lại (C) dưới dạng:  $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 4$ . Đó là đường tròn tâm  $I(1; 3)$  và bán kính  $R = 2$ . Vì  $M = (-3; 1)$  nên ta có ngay  $y = 1$  là một tiếp tuyến của (C) vẽ từ M, do đó  $T_1(1; 1)$  là một tiếp điểm của tiếp tuyến  $y = 1$  với (C).

Tiếp điểm  $T_2$  đối xứng với  $T_1$  qua  $MI$  nên  $T_1T_2$  là đường thẳng qua  $T_1$  và nhận  $MI(4;2)$  là vector pháp tuyến. Do đó đường thẳng  $T_1T_2$  có dạng:

$$4(x-1) + 2(y-1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0$$

*Nhận xét:*

Ta hãy xét lời giải sau đây, lời giải này áp dụng được cho mọi bài toán có dạng trên:

Gọi  $T_1(x_1; y_1)$  và  $T_2(x_2; y_2)$  là hai tiếp điểm. Khi đó các tiếp tuyến  $MT_1$ ,  $MT_2$  và  $(C)$  lần lượt có phương trình:

$$(x-1)(x_1-1) + (y-3)(y_1-3) = 4 \quad (1)$$

$$(x-1)(x_2-1) + (y-3)(y_2-3) = 4 \quad (2)$$

Do hai tiếp tuyến này đều đi qua điểm  $M(-3;1)$ , nên thay vào (1), (2) ta có

$$\begin{cases} 4(1-x_1) + 2(3-y_1) = 4 \\ 4(1-x_2) + 2(3-y_2) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + y_1 - 3 = 0 \\ 2x_2 + y_2 - 3 = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (3) \\ (4) \end{matrix}$$

Hệ phương trình (3) (4) chứng tỏ rằng đường thẳng nối  $T_1, T_2$  có phương trình  $2x + y - 3 = 0$ .

Ta thu lại lời giải trên.

*Chú ý:*

Lời giải này dựa trên kết quả sau: Tiếp tuyến tại điểm  $M(x_0; y_0) \in (C)$  có dạng:

$$(x-a)(x_0+a) + (y-b)(y_0-b) = R^2,$$

ở đây  $(C): (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$ .

**Thí dụ 2: (Bài toán cơ bản về viết phương trình tiếp tuyến)**

Cho đường tròn  $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0$  và điểm  $M(4; 1)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với  $(C)$  và đi qua  $M$ .

**Giải**

Viết lại  $(C)$  dưới dạng  $(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4$ . Vậy  $(C)$  là đường tròn có tâm tại  $I(1;3)$  và bán kính  $R = 2$ .

Đi qua  $M(4; 1)$  có hai dạng đường thẳng:

1/  $\Delta_1: x = 4$ . Khi đó  $d(I, \Delta_1) = |4-1| = 3 > R$ ,  $\Delta_1$  không phải là tiếp tuyến.

2/  $\Delta_2: y = k(x-4) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 1 - 4k = 0$ .

Vì  $\Delta_2$  là tiếp tuyến, nên ta có:  $d(I, \Delta_2) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{|k-3+1-4k|}{\sqrt{k^2+1}} = 2 \Leftrightarrow |-2-3k|^2 = 4(k^2+1) \Leftrightarrow 5k^2 + 12k = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = -\frac{12}{5} \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến  $y = 1$  và  $12x + 5y - 53 = 0$ .

*Chú ý:*

Ta đưa ra cách 2 giải bài toán trên:

Gọi  $Ax + By + C = 0$  ( $A^2 + B^2 > 0$ ) là tiếp tuyến. Vì đi qua  $M(4; 1)$  nên có:

$$4A + B + C = 0 \Rightarrow C = -4A - B.$$

Do đó tiếp tuyến  $\Delta$  có dạng:  $Ax + By - 4A - B = 0$ .

Theo bài ra ta có phương trình:

$$d(I, \Delta) = 2 \Leftrightarrow \frac{|A+3B-4A-B|}{\sqrt{A^2+B^2}} = 2 \Leftrightarrow (2B-3A)^2 = 4(A^2+B^2)$$

$$\Leftrightarrow 5A^2 - 12AB = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} A = 0 \\ 5A = 12B. \end{cases}$$

+ Nếu  $A = 0$ , chọn  $B = 1$   $\Delta: y = 1$ .

Nếu  $5A = 12B$ , chọn  $A = 12$ ,  $B = 5$ ,  $C = -53$ , thì  $\Delta: 12x + 5y - 53 = 0$ .

**Thí dụ 3:**

Trong mặt phẳng  $xOy$ , cho đường tròn  $(C): -x^2 + y^2 + 2x - 4y - 20 = 0$ . Viết phương trình tiếp tuyến của  $(C)$  biết rằng nó vuông góc với đường thẳng  $x + y = 0$ .

**Giải**

Vì vuông góc với đường thẳng  $x + y = 0$ , nên tiếp tuyến  $\Delta$  có dạng  $x - y + C = 0$ . Ta có  $(C): (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$  nên  $(C)$  là đường tròn tâm  $I(-1; 2)$ , bán kính  $R = 5$ . Từ đó ta có:

$$d(I, \Delta) = 5 \Leftrightarrow \frac{|-1 - 2 + C|}{\sqrt{2}} = 5 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 5\sqrt{2} + 3 \\ C = -5\sqrt{2} + 3. \end{cases}$$

Vậy có hai tiếp tuyến phải tìm  $\begin{cases} x - y + 5\sqrt{2} + 3 = 0 \\ x - y - 5\sqrt{2} + 3 = 0. \end{cases}$

**Loại 2:** Các bài toán về cát tuyến với đường tròn:

**Thí dụ 1:**

Trong mặt phẳng  $xOy$  cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$  và đường thẳng  $d: x - y + 1 = 0$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  sao cho  $\Delta // d$  và cắt  $(C)$  tại hai điểm  $M, N$  sao cho độ dài  $MN = 2$ .

**Giải**

Vì  $\Delta // d$  nên  $\Delta$  có dạng  $x - y + C = 0$

Kẻ  $IH \perp MN$   $HM = HN = \frac{1}{2} MN = 1$ .

Viết lại phương trình  $(C)$  dưới dạng:

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 5.$$

Do đó  $(C)$  có tâm  $I(-1; 2)$  và bán kính  $R = \sqrt{5}$ .

Từ đó  $IH = \sqrt{IM^2 - HM^2} = 2$

Như vậy ta có:  $d(I, \Delta) = 2$

$$\Leftrightarrow \frac{|-1 - 2 + C|}{\sqrt{2}} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 2\sqrt{2} + 3 \\ C = -2\sqrt{2} + 3. \end{cases}$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm:

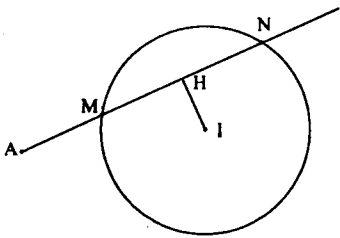
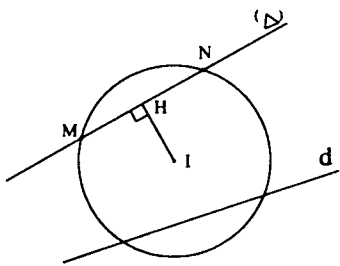
$$x - y + 2\sqrt{2} + 3 = 0 \text{ và } x - y - 2\sqrt{2} + 3 = 0.$$

**Thí dụ 2:**

Cho đường tròn  $(C): x^2 + y^2 - 8x - 2y = 0$  và điểm  $A(9; 6)$ . Viết phương trình đường thẳng qua  $A$  và cắt  $(C)$  theo một dây cung có độ dài  $4\sqrt{5}$ .

**Giải**

Gọi  $\Delta: Ax + By + C = 0$  là đường thẳng phải tìm.



Do qua A(9; 6) nên ta có:  $9A + 6B + C = 0 \Rightarrow C = -9A + 6B$ .

Vậy  $\Delta$  có dạng:  $Ax + By - 9A - 6B = 0$ . Kẻ  $IH \perp MN$ . Lập luận như thí dụ 1 ta có:

$$d(I, \Delta) = IH = \sqrt{5} \Leftrightarrow \frac{|4A + B - 9A - 6B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sqrt{5}$$

$$\Leftrightarrow 4A^2 + 10AB + 4B^2 = 0 \Leftrightarrow 2\left(\frac{A}{B}\right)^2 + 5\left(\frac{A}{B}\right) + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{A}{B} = -2 \\ \frac{A}{B} = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

+ Nếu  $\frac{A}{B} = -2$ , chọn  $B = -1, A = 2 \Rightarrow \Delta: 2x - y - 12 = 0$ .

+ Nếu  $\frac{A}{B} = -\frac{1}{2}$ , chọn  $B = -2, A = 1 \Rightarrow \Delta: x = 2y + 3 = 0$ .

**Thí dụ 3:**

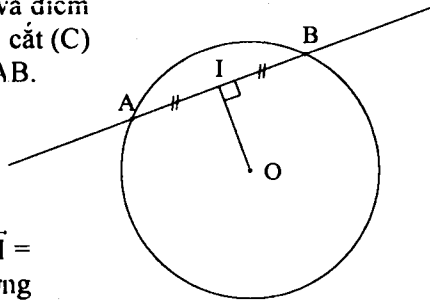
Cho đường tròn (C):  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$  và điểm  $I(5; 2)$ . Viết phương trình đường thẳng  $\Delta$  qua I cắt (C) tại hai điểm A, B sao cho I là trung điểm của AB.

**Giải**

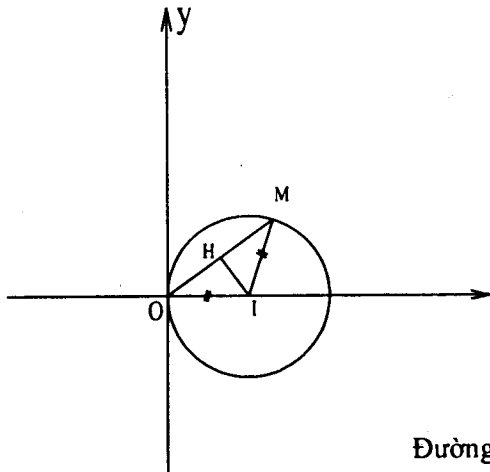
Có thể thấy ngay  $I(5; 2)$  nằm trong đường tròn (vì  $(5 - 4)^2 + (2 - 3)^2 = 2 < 4$ )

Do  $IA = IB$   $IO \perp AB$ .

Ta có đường thẳng  $\Delta$  qua  $I(5; 2)$  nhận  $\overrightarrow{OI} = (1; -1)$  là vector pháp tuyến nên  $\Delta$  có phương trình:  $(x - 5) - (y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$ .



### §3. BÀI TOÁN XÁC ĐỊNH ĐIỂM NHỜ PHƯƠNG TRÌNH ĐƯỜNG TRÒN



Một trong những dạng hay gặp của các bài toán thuộc chuyên mục đường tròn là bài toán xác định các điểm thỏa mãn những yêu cầu cho trước nào đó.

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D-2009)**

Cho đường tròn (C):  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ . Tìm điểm  $M \in (C)$  sao cho  $\widehat{IMO} = 30^\circ$ , ở đây I là tâm của (C) và O là gốc tọa độ.

**Giải**

Đường tròn (C) có tâm  $I(1; 0)$  và bán kính  $R = 1$ .

Trong tam giác cân OIM có  $\widehat{IOM} = 30^\circ$  nên  $\widehat{OIM} = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ .

$$x_0 = \frac{3}{2}; y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

...  $M_1(x_0; y_0)$ . Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} (x_0 - 1)^2 + y_0^2 = 1 \\ x_0^2 + y_0^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{3}{2}; y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_0 = \frac{3}{2}; y_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Vậy có hai điểm  $M_1\left(\frac{3}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  và  $M_2\left(\frac{3}{2}; -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  cần tìm.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D-2006)**

Trong mặt phẳng xOy, cho đường tròn (C)  $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 1 = 0$  và đường thẳng d:  $x - y + 3 = 0$ . Tìm tọa độ M  $\in$  d sao cho đường tròn tâm M có bán kính gấp đôi bán kính (C) và tiếp xúc ngoài với (C).

**Giải**

Do  $M \in d \Rightarrow M = (x_0; x_0 + 3)$ . Dễ thấy (C) có dạng

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

nên (C) có tâm I(1;1) và bán kính R = 1. Từ đó đường tròn (C<sub>1</sub>) tâm M có bán kính gấp đôi bán kính (C) có bán kính R<sub>1</sub> = 2.

Do (C) và (C<sub>1</sub>) tiếp xúc ngoài nên  $IM = R_1 + R = 3 \Leftrightarrow IM^2 = 9$ .

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 + (x_0 + 3 - 1)^2 = 9 \Leftrightarrow x_0^2 + x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -2. \end{cases}$$

Vậy có hai điểm cần tìm là:  $M_1(1;4)$  và  $M_2(-2;1)$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D - 2007)**

Trong mặt phẳng xOy, cho đường tròn (C):  $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 9$ , và đường thẳng d:  $3x - 4y + m = 0$ .

Tìm M để trên d có duy nhất điểm P sao cho từ P vẽ được 2 tiếp tuyến PA, PB (C) và PAB là tam giác đều.

**Giải**

(C) là đường tròn có tâm I(1;-2) bán kính R=3. Vì PAB là tam giác đều nên

$$\widehat{IPA} = \widehat{IPB} = 30^\circ \Rightarrow IP = 2IA = 2R = 6.$$

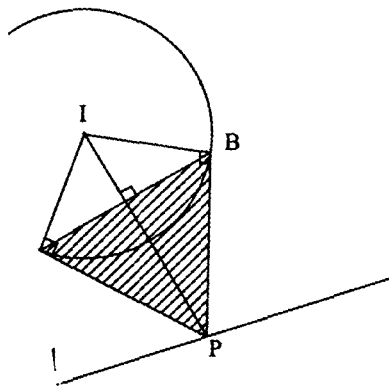
Vậy P là giao điểm của d với đường tròn tâm I bán kính 6.

Do đó để có duy nhất P thỏa mãn yêu cầu đầu bài, thì khoảng cách từ I tới d bằng 6.

Từ đó ta có phương trình sau để xác định m:

$$\frac{|3 + 8 + m|}{5} = 6 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 19 \\ m = -41. \end{cases}$$

Vậy  $m = 19$  và  $m = -41$  là hai giá trị cần tìm của tham số M.



## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1: (Đề thi tuyển sinh đại học khối D – 2003)

Trên mặt phẳng tọa độ cho đường tròn (C)  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 4$  và đường thẳng d:  $x - y - 1 = 0$ .

Viết phương trình đường tròn (C') đối xứng với (C) qua d.

Đáp số:  $(x - 3)^2 + y^2 = 4$ .

### Bài 2:

Cho tam giác ABC với A(8; 0), B(0; 6), C(9;3). Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Đáp số:  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$ .

### Bài 3:

Trong mặt phẳng cho đường thẳng d:  $2x - y - 5 = 0$  và hai điểm A(1; 2), B(4;1). Viết phương trình đường tròn có tâm thuộc d và đi qua A, B.

Đáp số:  $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 25$ .

### Bài 4:

Trong mặt phẳng cho đường thẳng d:  $4x + 3y - 43 = 0$  và điểm A(7; 5) trên d. Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với d tại A và có tâm nằm trên đường thẳng  $\Delta: 2x - 5y - 4 = 0$ .

Đáp số:  $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 25$ .

### Bài 5:

Trong mặt phẳng cho hai đường thẳng  $d_1: 3x + 4y - 47 = 0$  và  $d_2: 4x + 3y - 45 = 0$ . Lập phương trình đường tròn có tâm nằm trên đường thẳng d:  $5x + 3y - 22 = 0$  và tiếp xúc với cả  $d_1$  và  $d_2$ .

Đáp số:  $\left(x + \frac{61}{7}\right)^2 + \left(y - \frac{153}{7}\right)^2 = \frac{400}{49}$ .

### Bài 6:

Cho tam giác ABC với A(2; 2), B(4; 5) và C(4; 1).

1/ Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

2/ Viết phương trình đường thẳng d đi qua điểm K(5; 2) cắt đường tròn ở câu 1/ tại hai điểm M, N sao cho K là trung điểm của MN.

Đáp số: 1/  $(x - 4)^2 + (y - 3)^2 = 4$   
2/  $x - y - 3 = 0$ .

### Bài 7:

Trên mặt phẳng cho đường thẳng d:  $x - y + 1 = 0$  và đường tròn (C)  $x^2 + y^2 + 2x - 4y = 0$ . Tìm điểm M  $\in d$  sao cho qua M vẽ được hai đường thẳng tiếp xúc với (C) tại A, B sao cho  $\widehat{AMB} = 60^\circ$ .

Đáp số: M=(-3; -2) hoặc M = (3; 4)

### Bài 8:

Cho hai đường tròn:  $(C_1): x^2 + y^2 - 10x = 0$ ;  $(C_2): x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$ . Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của  $(C_1)$ ,  $(C_2)$  và có tâm nằm trên đường thẳng  $x + 6y - 6 = 0$

Đáp số:  $(x - 12)^2 + (y + 1)^2 = 125$ .

## Bài giảng số 15

# BA ĐƯỜNG CONIC

Bài giảng này đề cập đến phương pháp giải các bài toán về elíp, hypebol và parabol là ba đường conic được đề cập đến trong hình học giải tích phẳng trong nhà trường phổ thông hiện nay. So với các bài toán về đường thẳng, đường tròn, các bài toán về ba đường conic tuy có mặt không nhiều trong các đề thi tuyển sinh môn Toán trong những năm 2002–2009, nhưng nó là một trong những chủ đề không thể thiếu được trong việc ôn luyện thi môn Toán vào các trường Đại học, Cao đẳng hiện nay.

## §1. LẬP PHƯƠNG TRÌNH CÁC ĐƯỜNG CONIC VÀ TÌM CÁC YẾU TỐ CỦA NÓ<sup>1</sup>

Phương pháp giải các bài tập thuộc loại này là phải thuộc các dạng phương trình chính tắc của các đường conic, thuộc các công thức liên quan đến conic như cách tính bán kính qua tiêu...

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A–2008)**

Cho elíp với tâm sai  $e = \frac{\sqrt{5}}{3}$  và hình chữ nhật cơ sở của nó có chu vi bằng 20.

Viết phương trình chính tắc của elíp.

**Giải**

Elíp có phương trình chính tắc là:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ . (1)

Từ giả thiết, ta có:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \Rightarrow \frac{c^2}{a^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{a^2 - b^2}{a^2} = \frac{5}{9} \Rightarrow \frac{b^2}{a^2} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \quad (\text{do } a > 0, b > 0).$$

Hình chữ nhật cơ sở của elíp có hai cạnh là  $2a, 2b$ . Từ giả thiết, ta có:

$$2a + 2b + 20 \Rightarrow a + b = 10.$$

Vậy có hệ phương trình sau để xác định  $a, b$ : 
$$\begin{cases} a + b = 10 \\ \frac{b}{a} = \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2. \end{cases}$$

Thay vào (1) ta thấy elíp có phương trình chính tắc là:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

<sup>1</sup> Về định nghĩa các tính chất cơ bản của ba đường conic, bạn đọc có thể tìm thấy trong mọi SGK Hình học lớp 10. Ở đây, chúng tôi bỏ qua và không nhắc lại chi tiết phần này.



**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh khối D – 2005)**

Trong mặt phẳng tọa độ cho điểm  $C(2;0)$  và elip  $(E): \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$ . Tìm hai điểm  $A, B \in (E)$ , biết rằng  $A, B$  đối xứng với nhau qua trục hoành và  $ABC$  là tam giác đều.

**Giải**

Giả sử  $A(x_0; y_0)$  và  $B(x_0; -y_0)$  là hai điểm thuộc  $(E)$  và đối xứng nhau qua trục hoành (có thể giả sử  $y_0 > 0$ ). Khi đó  $AB = 2y_0$ .

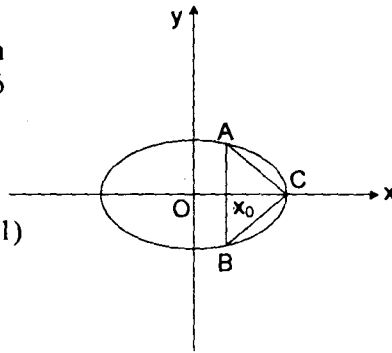
Vì  $ABC$  là tam giác đều, nên ta có:

$$AB = AC$$

$$\Leftrightarrow y_0^2 + (2 - x_0)^2 = 4y_0^2 \Leftrightarrow (2 - x_0)^2 = 3y_0^2 \quad (1)$$

Vì  $A(x_0; y_0) \in (E)$  nên ta có:

$$\frac{x_0^2}{4} + \frac{y_0^2}{4} = 1 \quad (2)$$



Từ hệ (1) (2) ta dễ dàng suy ra  $x_0 = 2$ ;  $y_0 = 0$  và  $x_0 = \frac{2}{7}$ ;  $y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ .

Do  $y_0 > 0$  nên  $x_0 = \frac{2}{7}$ ;  $y_0 = \frac{4\sqrt{3}}{7}$ . Từ đó hai điểm cần tìm có tọa độ là:

$$A\left(\frac{2}{7}; \frac{4\sqrt{3}}{7}\right) \text{ và } B\left(\frac{2}{7}; -\frac{4\sqrt{3}}{7}\right).$$

**Thí dụ 3:**

Lập phương trình chính tắc của elip  $(E)$  biết rằng elip có tâm  $O$ , tiêu điểm trên  $Ox$  qua  $M(-\sqrt{3}, 1)$  và khoảng cách giữa hai đường chuẩn bằng 6.

**Giải**

Giả sử elip  $(E)$  có phương trình chính tắc:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Vì  $M(-\sqrt{3}, 1) \in (E)$  nên có:  $\frac{3}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1$ . (1)

Khoảng cách giữa hai đường chuẩn là:  $\left(\frac{a}{e}\right) - \left(-\frac{a}{e}\right) = \frac{2a}{e} = 6$ .

Từ đó ta có  $\frac{a}{e} = 3 \Leftrightarrow \frac{a^2}{c} = 3$  (2)

Vì thế  $b^2 = a^2 - c^2 = 3c - c^2$ . (3)

Từ (1) (2) (3) suy ra hệ sau:  $\begin{cases} \frac{3}{a^2} + \frac{1}{a^2 - c^2} = 1 \\ a^2 = 3c. \end{cases}$  (4)

Thay (5) vào (4) và có:  $c^2 - 4c + 4 = 0 \Rightarrow c = 2$  (5)

Vậy (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$ .

**Thí dụ 4:**

Cho elip có phương trình:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ . Tìm điểm M sao cho  $MF_2 = 2MF_1$ , ở đây  $F_1, F_2$  lần lượt là tiêu điểm trái và tiêu điểm phải của (E).

**Giải**

Theo công thức tính bán kính qua tiêu điểm và giả sử  $M = (x_0; y_0)$  ta có:

$$MF_2 = 2MF_1 \Leftrightarrow a - \frac{cx_0}{a} = 2\left(a + \frac{cx_0}{a}\right) \Leftrightarrow a = -\frac{3cx_0}{a} \Leftrightarrow x_0 = \frac{-a^2}{3c},$$

ở đây  $a^2 = 25, c = 3$  nên  $x_0 = -\frac{25}{9}$ .

Từ đó do:  $\frac{x_0^2}{25} + \frac{y_0^2}{16} = 1 \Leftrightarrow y_0 = \pm \frac{4\sqrt{56}}{9}$ .

Vậy trên (E) có hai điểm phải tìm  $M_1 = \left(-\frac{25}{9}; \frac{4\sqrt{56}}{9}\right)$  và  $M_2 = \left(-\frac{25}{9}; -\frac{4\sqrt{56}}{9}\right)$ .

**Thí dụ 5:**

Lập phương trình hypebol (H), biết rằng tiêu điểm trên Ox, độ dài tiêu cự là 10 và một đường tiệm cận có phương trình  $3x - 4y = 0$ .

**Giải**

Do tiêu điểm trên Ox nên (H) có dạng:  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

Ta có  $2c = 10 \Rightarrow c = 5 \Rightarrow a^2 + b^2 = c^2 = 25$ .

Tiệm cận có dạng:  $y = \pm \frac{b}{a}x$ . Từ  $3x - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{3}{4}x$ . Vậy  $\frac{b}{a} = \frac{3}{4}$ .

Từ đó ta có hệ phương trình: 
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ \frac{b}{a} = \frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 16 \\ b^2 = 9. \end{cases}$$

Vậy (H) có phương trình:  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

**Thí dụ 6:**

Cho hypebol (H):  $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ .

1/ Tìm điểm  $M \in (H)$  sao cho M nhìn hai tiêu điểm dưới góc  $60^\circ$ .

2/ Tìm điểm  $M \in (H)$  sao cho bán kính qua tiêu điểm này bằng hai lần bán kính qua tiêu điểm kia.

**Giải**

1/ Gọi  $F_1, F_2$  lần lượt là hai tiêu điểm trái và phải của (H) thì

$F_1 = (-5; 0)$  và  $F_2 = (5; 0)$ . Giả sử  $M = (x_0; y_0) \in (H)$ , khi đó:

$$\overrightarrow{MF_1} = (-5 - x_0; -y_0); \overrightarrow{MF_2} = (5 - x_0; -y_0).$$

$$\text{Từ đó } \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = -25 + x_0^2 - y_0^2. \quad (1)$$

$$\text{Lại có: } \overrightarrow{MF_1} \cdot \overrightarrow{MF_2} = |\overrightarrow{MF_1}| \cdot |\overrightarrow{MF_2}| \cos 60^\circ.$$

$$\Leftrightarrow \left| a + \frac{cx_0}{a} \right| \left| a - \frac{cx_0}{a} \right| = \frac{1}{2} \quad (2)$$

(ở đây  $a = 4; c = 5$ ).

Từ (1) (2) suy ra hệ phương trình sau để xác định  $(x_0; y_0)$ :

$$\begin{cases} \frac{x_0^2}{16} - \frac{y_0^2}{9} = 1 \\ -25 + x_0^2 + y_0^2 = \frac{|(16 + 5x_0)(16 - 5x_0)|}{32} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x_0^2 - 16y_0^2 = 144 \\ -800 + 32x_0^2 + 32y_0^2 = |256 - 2x_0^2| \end{cases} \quad (3) \quad (4)$$

$$\text{Giải hệ (3) (4) dễ dàng ta có: } x_0^2 = \frac{732}{25}; y_0^2 = \frac{243}{25}.$$

Vậy trên (H) có bốn điểm phải tìm:

$$M_1\left(\frac{8\sqrt{13}}{5}; \frac{9\sqrt{13}}{5}\right); M_2\left(\frac{8\sqrt{13}}{5}; -\frac{9\sqrt{13}}{5}\right); M_3\left(-\frac{8\sqrt{13}}{5}; \frac{9\sqrt{13}}{5}\right); M_4\left(-\frac{8\sqrt{13}}{5}; -\frac{9\sqrt{13}}{5}\right)$$

2/ Ta có:  $MF_1 = 2MF_2$  hoặc  $MF_2 = 2MF_1$ .

$$+ \text{ Nếu } MF_1 = 2MF_2 \text{ ta có: } \left| 4 + \frac{5x_0}{4} \right| = 2 \left| 4 - \frac{5x_0}{4} \right| \Leftrightarrow |16 + 5x_0| = |32 - 10x_0|$$

$$\text{Vậy có hệ phương trình } \begin{cases} 9x_0^2 - 16y_0^2 = 144 \\ |16 + 5x_0| = |32 - 10x_0| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \frac{48}{5} \\ y_0 = \pm \frac{\sqrt{119}}{5} \end{cases}$$

+ Tương tự sẽ thấy trường hợp  $MF_2 = 2MF_1$  dẫn đến một hệ vô nghiệm (các bạn tự nghiệm lại).

$$\text{Vậy có hai điểm cần tìm: } M_1\left(\frac{48}{5}; \frac{\sqrt{119}}{5}\right); M_2\left(\frac{48}{5}; -\frac{\sqrt{119}}{5}\right).$$

**Thí dụ 7:**

1/ Cho (C) là đường cong có phương trình:  $y^2 + 4y - 4x = 0$ . Bằng phép tịnh tiến trục tọa độ, chứng minh (C) là một parabol. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của parabol này.

2/ Cùng câu hỏi như phần 1/ với (C):  $x^2 + 6x - y + 8 = 0$ .

**Giải**

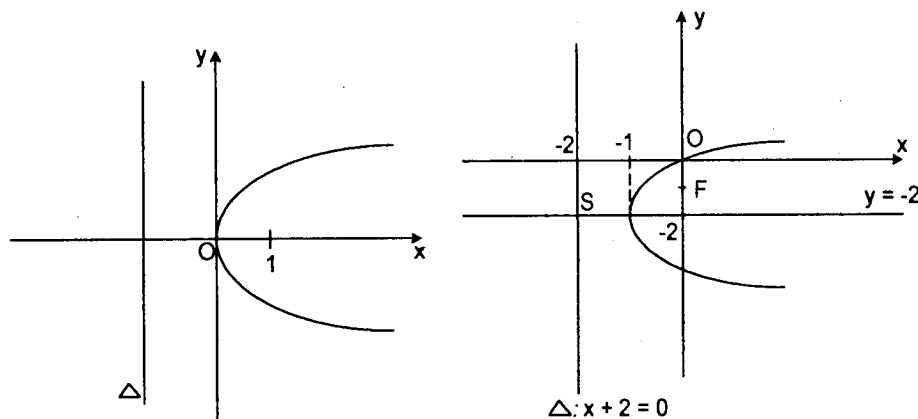
$$1/ \text{Viết lại (C) dưới dạng: } (y + 2)^2 - 4 - 4x = 0 \Leftrightarrow (y + 2)^2 = 4(1 + x) \quad (1)$$

$$\text{Thực hiện phép thay đổi: } \begin{cases} X = x + 1 \\ Y = y + 2 \end{cases}, \text{ thì từ (1) ta có: } Y^2 = 4X \quad (2)$$

Như vậy (2) có dạng  $Y^2 = 2pX$ . Trong hệ tọa độ mới (X; Y), đây là parabol có tham số tiêu  $p = 2$  ( $2p = 4 \Leftrightarrow p = 2$ ). Parabol nhận (0;0) làm đỉnh; trục đối xứng

$Y = 0$ ; Tiêu điểm  $(1;0)$  (chú ý  $\frac{p}{2} = 1$ ), đường chuẩn là  $X = -\frac{p}{2} = -1$ .

Trở về biến cũ: parabol (P):  $y^2 + 4y - x = 0$  nhận điểm  $S(-1;-2)$  làm đỉnh; trục đối xứng là  $y = -2$ ; tiêu điểm  $F(0; -2)$  và đường chuẩn  $x = -2$ .



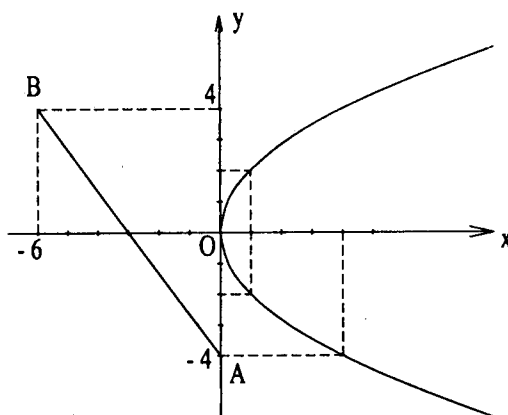
2/ Viết lại (P) dưới dạng:  $(x + 3)^2 - y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 3)^2 = y + 1$

Đặt  $\begin{cases} X = x + 3 \\ Y = y + 1 \end{cases}$  ta có:  $X^2 = Y$  (3)

Từ (3) suy ra, trong hệ (X; Y), (3) có dạng  $X^2 = 2pY$ . Khi đó ta có  $2p = 1$   
 $p = \frac{1}{2}$ . Vậy parabol nhận (0;0) làm đỉnh, trục đối xứng là  $X = 0$ , tiêu điểm là  $(0; \frac{1}{4})$

và đường chuẩn  $Y = (0; -\frac{1}{4})$ .

Trở về biến cũ thì (P) là parabol nhận  $(-3;-1)$  làm đỉnh, trục đối xứng là  $x = -3$ ; tiêu điểm  $F(-3; -\frac{3}{4})$  và đường chuẩn  $y = -\frac{5}{4}$ .



**Thí dụ 7:**

Cho parabol  $y^2 = 4x$  và hai điểm  $A(0; 4)$ ,  $B(-6; 4)$

1/ Tìm trên (P) điểm C sao cho ABC là tam giác vuông tại A.

2/ Tìm trên (P) điểm C sao cho tam giác ABC có diện tích bé nhất.

**Giải**

1/ Dễ thấy đường thẳng nối AB có phương trình:  $4x + 3y + 12 = 0$ .

Vậy đường thẳng d vuông góc với AB có dạng:  $-3x + 4y + m = 0$ .

Do (d) qua  $A(0; -4) \Rightarrow -16 + m = 0 \Rightarrow m = 16$ . Vậy d:  $-3x + 4y + 16 = 0$ .  
 Từ đó điểm C là nghiệm của hệ phương trình:

$$x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = u^3 - 3u \Leftrightarrow \begin{cases} x = 16; y = 8 \\ x = \frac{16}{9}; y = -\frac{8}{3} \end{cases}$$

Vậy  $C_1(16; 8)$ ,  $C_2\left(\frac{16}{9}; -\frac{8}{3}\right)$  là hai điểm phải tìm.

2/ Ta có  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CH$ . Do AB không đổi nên  $S_{ABC}$  đạt giá trị nhỏ nhất khi CH nhỏ nhất. Gọi  $C(x_0; y_0) \in (P)$ , ta có (theo công thức tính khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng).

$$CH = \frac{|4x_0 + 3y_0 + 12|}{5} = \frac{|y_0^2 + 3y_0 + 12|}{5}$$

$$= \frac{1}{5}(y_0^2 + 3y_0 + 12) = \frac{1}{5}\left[\left(y_0 + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{39}{4}\right]$$

Vì thế CH nhỏ nhất khi  $y_0 + \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow y_0 = -\frac{3}{2}$  (khi ấy  $x_0 = \frac{9}{16}$ )

Vì lẽ ấy  $C\left(\frac{9}{16}; -\frac{3}{2}\right)$  là điểm duy nhất trên (P) sao cho tam giác CAB có diện tích bé nhất.

## § 2. BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA CONIC VỚI CÁC ĐƯỜNG KHÁC

Trong mục này xét các bài toán về sự tương giao của đường conic với đường thẳng, đường tròn hoặc giữa các conic với nhau:

Phương pháp giải đều dựa vào kết quả sau:

Cho hai đường lần lượt có phương trình  $f(x, y) = m$ ;  $g(x, y) = n$

Khi đó số giao điểm của hai đường bằng số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x, y) = m & (1) \\ g(x, y) = n & (2) \end{cases}$$

Khi đó tọa độ  $(x; y)$  của các giao điểm chính là nghiệm của hệ phương trình trên.

Như vậy bài toán về sự tương giao của các đường quy về khảo sát hệ phương trình dạng (1) và (2).

### Thí dụ 1

Cho (H):  $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1$  và đường thẳng d:  $2x - y + m = 0$ .

1/ Chứng minh rằng với mọi m, (H) và d luôn cắt nhau tại A, B thuộc hai nhánh khác nhau của (H) (giả sử  $x_A < x_B$ ).

2/ Tìm M sao cho  $BF_2 = 2AF_1$ , ở đây  $F_1(-3; 0)$  và  $F_2(3; 0)$  là các tiêu điểm của (H)

**Giải**

1/ Xét hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{8} = 1 \\ 2x - y + m = 0 \end{cases} \quad (I)$$

Từ (I) dẫn đến phương trình:  $4x^2 - 4mx - m^2 - 8 = 0 \quad (1)$ .

Vì  $-\frac{m^2+8}{4} < 0$  với mọi  $m$ , nên (1) luôn có hai nghiệm trái dấu với mọi  $m$ .

Vậy (H) và d luôn cắt nhau tại A, B, trong đó  $x_A < x_B$ .

b) Ta có:  $BF_2 = 2AF_1 \Leftrightarrow \left| \frac{cx_B}{a} - a \right| = 2 \left| \frac{cx_A}{a} + a \right|$

Do A, B thuộc hai nhánh khác nhau của (H) ( $x_A < x_B$ ),

nên:  $x_A < -a$ ;  $x_B > a$ . Vì  $\frac{c}{a} > 1$  nên từ (2) suy ra:

$$\frac{cx_B}{a} - a = 2 \left( -a - \frac{cx_A}{a} \right) \quad (\text{ở đây } a = 1; c = 3)$$

$$\Leftrightarrow 3x_B - 1 = -2 - 6x_A \Leftrightarrow 6x_A + 3x_B + 1 = 0$$

Do  $x_A, x_B$  là hai nghiệm của (1), nên theo định lý Vi-ét ta có:

$$\begin{cases} x_A + x_B = m \\ x_A x_B = \frac{m^2 + 8}{4} \end{cases} \quad (4)$$

$$\begin{cases} x_A + x_B = m \\ x_A x_B = \frac{m^2 + 8}{4} \end{cases} \quad (5)$$

Từ (3) và (4) ta có hệ: 
$$\begin{cases} x_A + x_B = m \\ 6x_A + 3x_B = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_A = \frac{3m+1}{3} \\ x_B = \frac{6m+1}{3} \end{cases} \quad (II)$$

Thay (II) vào (5) và có:  $63m^2 + 36m - 68 = 0$

$$\Leftrightarrow m = \frac{-6 \pm 16\sqrt{2}}{21}$$

Đó là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

**Thí dụ 2:**

Cho elip (E) có phương trình  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$  và đường thẳng d:  $2x + 15y - 10 = 0$ .

Chứng minh d cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B, trong đó  $A \in Ox$ . Tìm độ dài đoạn AB.

**Giải**

Số giao điểm của d và (E) bằng số nghiệm của hệ phương trình:

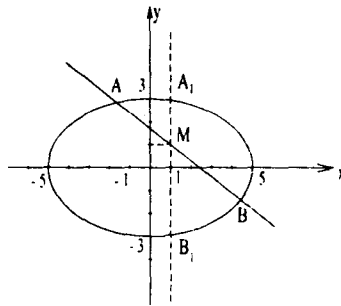
$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ 2x + 15y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{10-15y}{2} \\ 5y^2 - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5; y = 0 \\ x = -4; y = \frac{6}{5} \end{cases}$$

Vậy  $A(5; 0)$  và  $B(-4; \frac{6}{5})$ . Rõ ràng  $A \in Ox$  và  $AB = \frac{3\sqrt{229}}{5}$ .

**Thí dụ 3:**

Cho elip (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ,

và điểm  $M(1; 1)$ . Viết phương trình đường thẳng qua M và cắt (E) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho M là trung điểm của AB.



**Giải**

Đường thẳng qua M có hai dạng:

1/ Nếu  $x = 1$  khi đó dễ thấy  $x = 1$  cắt (E) tại

$A_1, B_1$  (xem hình vẽ) và ta có ngay:

$$MB_1 > 3 > MA_1.$$

Vì thế loại khả năng này.

2/ Nếu  $y = k(x - 1) + 1 \Leftrightarrow kx - y + 1 - k = 0$

Khi đó tọa độ  $(x; y)$  của các giao điểm A, B của d với (E) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \\ kx - y + 1 - k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx + 1 - k \\ (25k^2 + 9)x^2 + 50k(1 - k)x + 25(1 - k)^2 - 225 = 0 \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

Để hệ (1) (2) có hai nghiệm phân biệt, trước tiên ta cần có:

$$\Delta' = 25k^2(1 - k)^2 - [25(1 - k)^2 - 225](25k^2 + 9) > 0 \quad (3)$$

Khi thỏa mãn (3), giả sử hệ (1) (2) có hai nghiệm phân biệt  $(x_1; y_1), (x_2; y_2)$ .

Do  $M(1; 1)$  là trung điểm của A, B nên ta có:  $x_1 + x_2 = 2$ .

Theo định lí Viét ta có:  $\frac{50k(k - 1)}{25k^2 + 9} = 2 \Leftrightarrow k = -\frac{9}{25}$ .

(chú ý  $k = -\frac{9}{25}$  thỏa mãn (3): Bạn đọc tự kiểm tra điều này.)

Từ đó d:  $-\frac{9}{25}x - y + 1 + \frac{9}{25} = 0 \Leftrightarrow 9x + 25y - 34 = 0$

là đường thẳng cần tìm.

**Thí dụ 4:**

Cho hai elip:  $E_1: \frac{x^2}{16} + y^2 = 1$  và  $E_2: \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

Viết phương trình đường tròn đi qua giao điểm của hai elip nói trên.

### Giải

Gọi tọa độ  $(x; y)$  là các giao điểm của  $(E_1)$  và  $(E_2)$  là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + y^2 = 1 \\ \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 16y^2 = 16 \\ 4x^2 + 9y^2 = 36 \end{cases} \Leftrightarrow x^2 = \frac{432}{55}; y^2 = \frac{28}{55}.$$

Điều đó chứng tỏ rằng  $E_1$  và  $E_2$  cắt nhau tại 4 điểm phân biệt.

Ngoài ra ta có:  $x^2 + y^2 = \frac{92}{11}$ , suy ra bốn giao điểm của chúng nằm trên đường

tròn  $(C): x^2 + y^2 = \frac{92}{11}$ .

$(C)$  chính là đường tròn cần tìm.

## §3. CÁC BÀI TOÁN ĐỊNH TÍNH VỀ BA ĐƯỜNG CONIC

**Loại 1:** Các bài toán sử dụng định nghĩa của ba đường conic

**Thí dụ 1:** Cho parabol  $(P) y^2 = 2px$  và đường thẳng  $\Delta$  đi động đi qua tiêu điểm  $F$  của parabol và cắt  $(P)$  tại hai điểm phân biệt  $M, N$ . Chứng minh rằng các đường tròn đường kính  $MN$  luôn tiếp xúc với một đường thẳng cố định.

### Giải

Kẻ  $NH$  và  $MK$  vuông góc với đường

chuẩn  $\Delta: (x = -\frac{p}{2})$ .

Theo định nghĩa của parabol ta có:

$$NF = NH, MF = MK$$

$$\text{Vậy } NF + MF = NH + MK$$

$$\text{hay } MN = NH + MK.$$

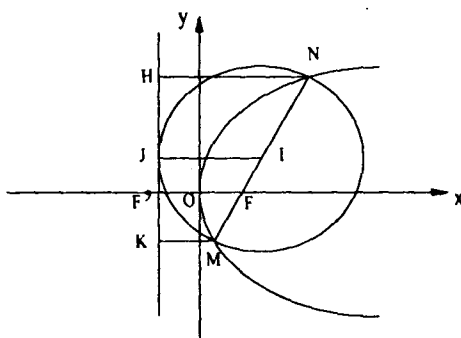
Gọi  $I$  là trung điểm  $MN$ ,

ta có:  $IJ = \frac{1}{2}(NH + MK)$ ,  $J$  là hình

chiếu của  $I$  trên  $(\Delta)$  (do  $IJ$  là đường trung bình của hình thang  $NHMK$ ).

$$\text{Như vậy } IJ = \frac{1}{2}MN.$$

Điều đó chứng tỏ rằng đường tròn đường kính  $MN$  luôn luôn tiếp xúc với đường chuẩn  $\Delta$  của  $(P) \Rightarrow$  đpcm.





**Thí dụ 2:**

Cho hai đường tròn  $(C_1)$  có tâm  $F_1$ , bán kính  $R_1$ ;  $(C_2)$ , có tâm  $F_2$ , bán kính  $R_2$ , trong đó  $R_1 > R_2$  và  $0 < F_1F_2 < R_1 - R_2$ . Gọi  $M$  là tâm các đường tròn  $(C)$  di động sao cho  $(C)$  tiếp xúc trong với  $(C_1)$  và tiếp xúc ngoài với  $(C_2)$ . Tìm quỹ tích của  $M$ .

**Giải**

Gọi  $M$  là tâm của  $(C)$  tiếp xúc ngoài với  $(C_2)$  tại  $B$ , còn tiếp xúc trong với  $(C_1)$

tại  $A$ . Ta có: 
$$\begin{cases} MF_1 = R_1 - MA \\ MF_2 = R_2 + MB. \end{cases} \quad (I)$$

Do  $MA = MB$  (cùng bằng bán kính của  $(C)$ ).  
Do đó từ (I) suy ra:  $MF_1 + MF_2 = R_1 + R_2 = \text{const.}$

Theo định nghĩa của elip, ta suy ra quỹ tích của  $M$  là elip nhận  $F_1$  và  $F_2$  là hai tiêu điểm với trục lớn là  $R_1 + R_2$ .

**Chú ý:** Ta xét trường hợp cụ thể:

$$(C_1): (x + 5)^2 + y^2 = 441;$$

$$(C_2): (x - 5)^2 + y^2 = 25.$$

Khi đó, ta có:  $F_1(-5; 0)$  và  $R_1 = 21$ ;  $F_2(5; 0)$  và  $R_2 = 5$ .

Ta có  $R_1 + R_2 = 26$  suy ra:  $a = 13$ ;

$$F_1F_2 = 10; c = 5; b = 12.$$

Vậy quỹ tích của  $M$  là elip với phương trình:

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

**Thí dụ 3:**

Cho đường tròn tâm  $F_1$  bán kính bằng  $2a$  và một điểm  $F_2$  ở ngoài đường tròn. Tìm quỹ tích tâm  $M$  của đường tròn qua  $F_2$  và tiếp xúc với đường tròn nói trên.

**Giải**

Xét hai khả năng sau:

\* Đường tròn tâm  $M$  bán kính  $r$  tiếp xúc ngoài với đường tròn  $(F_1; 2a)$ . Gọi tiếp điểm là  $I$ . Ta có  $MF_1 = MI + IF_1 = MF_2 + 2a$ .

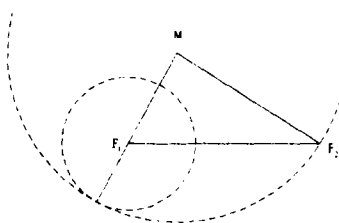
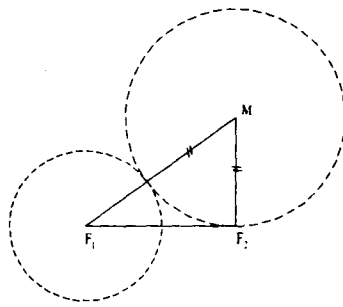
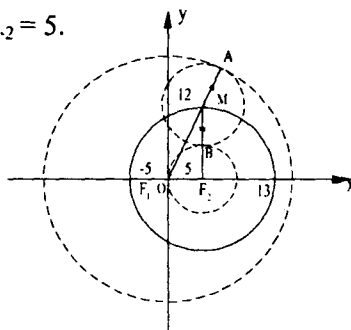
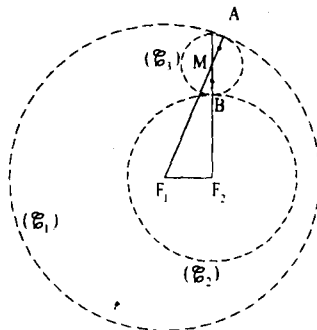
$$\Rightarrow MF_1 - MF_2 = 2a. \quad (1)$$

\* Đường tròn tâm  $M$  bán kính  $r$  tiếp xúc trong với đường tròn  $(F_1; 2a)$ . Gọi  $I$  là tiếp điểm, ta có:  $MF_1 = MI - IF_1 = MF_2 - 2a$

$$\Rightarrow MF_2 - MF_1 = 2a \quad (2)$$

$$\text{Từ (1), (2) suy ra: } |MF_1 - MF_2| = 2a \quad (3)$$

Vậy từ (3) đi đến quỹ tích tâm  $M$  các đường tròn đi qua  $F_2$  và tiếp xúc với đường tròn  $(F_1; 2a)$  là hypebol nhận  $F_1, F_2$  làm hai tiêu điểm và trục thực bằng  $2a$ .



Xét ví dụ cụ thể sau: Đường tròn tâm  $F_1(-5; 0)$ . Khi đó  $c = 5$ ;  $2a = R = 4$   
 $\Rightarrow a = 2$ , do đó:  $b^2 = c^2 - a^2 = 21$ . Vậy quỹ tích tâm  $M$  là hypebol (H) với phương trình:  $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{21} = 1$ .

**Thí dụ 4:**

Trên mặt phẳng cho elip (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ ,

có hai tiêu điểm  $F_1, F_2$ ; A và B là hai điểm trên (E) sao cho  $AF_1 + BF_2 = 8$ .

Tính  $AF_2 + BF_1$ .

**Giải**

Từ:  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$  suy ra (E) có trục lớn  $2a = 10$ .

Theo định nghĩa elip thì:  $(AF_1 + AF_2) = (BF_1 + BF_2) = 10$

$$\Rightarrow AF_2 + BF_1 = (AF_1 + AF_2) + (BF_1 + BF_2) - (AF_1 + BF_2) \\ = 10 + 10 - 8 = 12.$$

**Loại 2:** Một số bài toán định tính về ba đường conic:

**Thí dụ 1:**

Cho hypebol (H):  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ,  $M(x_0; y_0)$  là một điểm bất kì trên (H). Gọi  $\Delta$  và  $\Delta'$  là hai tiệm cận của (H). Chứng minh rằng đại lượng  $d(M, \Delta) \cdot d(M, \Delta')$  không phụ thuộc vào vị trí của M trên (H).

**Giải**

Dễ thấy  $\Delta: y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx - ay = 0$  và  $\Delta': y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx + ay = 0$ .

$$\text{Do đó: } d(M, \Delta) \cdot d(M, \Delta') = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2 + b^2} \quad (1)$$

$$\text{Do } M \in (H) \Rightarrow \frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \Rightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2. \quad (2)$$

Thay (2) vào (1) và có:

$$d(M, \Delta) \cdot d(M, \Delta') = \frac{a^2b^2}{a^2 + b^2} = \text{const} \Rightarrow d_{\text{pcm}}.$$

... điểm F  
... (P) tại A và B. Chứng  
... rằng tích các khoảng cách từ A, B  
đến trục của (P) là một hằng số.

**Giải**

(P) có dạng:  $y^2 = 2px$ , nên ta có  $p = 2$ .

Vậy, tiêu điểm F của (P) là  $F(1; 0)$ .

Xét hai khả năng sau:

\* Nếu  $AB \parallel Oy$ . Khi đó ta có hai giao  
điểm là  $A(1; 2)$ ,  $B(1; -2)$ . Từ đó suy ra:

$$d(A, Ox) \cdot d(B, Ox) = |FA| \cdot |FB| = 2 \cdot 2 = 4.$$

\* Nếu AB không song song với Oy, suy ra AB có dạng:

$$y = k(x - 1) \Leftrightarrow kx - y - k = 0$$

Giả sử nó cắt (P) tại  $A_1, B_1$ . Tọa độ của  $A_1, B_1$  là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} kx - y - k = 0 \\ y^2 = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = kx - k \\ y^2 = 4 \cdot \frac{y + k}{k} \end{cases}$$

Vậy tung độ của  $A_1, B_1$  là nghiệm của phương trình:  $ky^2 - 4y - 4k = 0$  (1)

Gọi  $y_1, y_2$  là nghiệm của (1), khi đó  $y_1 y_2 = 4$ .

$$\text{Ta có: } d(A_1, Ox) \cdot d(B_1, Ox) = |y_1| \cdot |y_2| = |y_1 y_2| = 4.$$

ôm lại, luôn có  $d(A, Ox) \cdot d(B, Ox) = 4 = \text{const}$  (đpcm).

**Ví dụ 3 (Đề thi Đại học, Cao Đẳng khối D – 2008)**

o parabol (P):  $y^2 = 16x$  và điểm  $A(1; 4)$ . Hai điểm B, C thuộc (P) sao cho  
 $\angle BAC = 90^\circ$ . Chứng minh rằng dây cung BC luôn đi qua một  
điểm.

**Giải**

$B\left(\frac{m^2}{16}; m\right); C\left(\frac{n^2}{16}; n\right)$  thuộc (P). Ta có:

$$\overrightarrow{AB} = \left(\frac{m^2}{16} - 1; m - 4\right); \overrightarrow{AC} = \left(\frac{n^2}{16} - 1; n - 4\right).$$

$\angle BAC = 90^\circ$ , nên ta có:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow \frac{(m^2 - 16)(n^2 - 16)}{256} + (m - 4)(n - 4) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 4)(n + 4) + 256 = 0 \text{ (do } B, C \neq A \text{ nên } m \neq 4, n \neq 4)$$

$$mn + 4(m + n) + 272 = 0$$

Ta có  $\overrightarrow{BC} = \left( \frac{n^2 - m^2}{16}; n - m \right)$  là vectơ chỉ phương của đường thẳng BC nên vectơ pháp tuyến của đường thẳng BC là  $\vec{n} = \left( -1; \frac{n+m}{16} \right)$ . Do đó, đường thẳng qua

$$B, C \text{ có dạng: } -\left(x - \frac{m^2}{16}\right) + \frac{n+m}{16}(y-m) = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x + m^2 + (n+m)y - (n+m)m = 0$$

$$\Leftrightarrow -16x + (m+n)y + 4(m+n) + 272 = 0 \quad (3)$$

Đặt  $m+n = \alpha$  thì (3) trở thành:

$$-16x + \alpha y + 4\alpha + 272 = 0 \Leftrightarrow -16x + 272 + \alpha(y + 4) = 0 \quad (4)$$

Gọi  $(x_0; y_0)$  là điểm cố định của họ (4), ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} -16x_0 + 272 = 0 \\ y_0 + 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 17 \\ y_0 = -4 \end{cases}$$

Vậy dây cung BC luôn đi qua điểm cố định  $I(17; -4)$  (đpcm).

### BÀI TẬP TỰ GIẢI

**Bài 1:** Trên mặt phẳng cho elip (E) có phương trình:  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ ;  $F_1, F_2$  lần lượt là tiêu điểm trái và phải của (E). Tìm điểm  $M \in (E)$  sao cho  $MF_1 - MF_2 = 2$ .

**Đáp số:**  $M = (\sqrt{2}; \sqrt{3})$  và  $M(-\sqrt{2}; -\sqrt{3})$ .

**Bài 2:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy, hãy lập phương trình chính tắc của elip (E) có độ dài trục lớn bằng  $4\sqrt{2}$ , các đỉnh trên trục nhỏ và hai tiêu điểm cùng nằm trên một đường tròn.

**Đáp số:**  $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Bài 3:** Trên mặt phẳng, cho hypebol (H):  $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{3} = 1$  và điểm  $M(2; 1)$ . Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (H) tại A và B sao cho M là trung điểm của AB.

**Đáp số:**  $3x - y - 5 = 0$ .

**Bài 4:**

Cho hypebol (H) có phương trình:  $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1$ .

1/ Xét các điểm  $M(16; 6\sqrt{3})$  và  $N(8; 0)$  thuộc (H). Tìm các giao điểm P, Q của đường thẳng  $\Delta$  nối M, N với (H).

2/ Chứng minh các trung điểm của MN và PQ trùng nhau.

**Đáp số:**  $P(12 - 4\sqrt{3}; 3\sqrt{3} - 9)$  và  $Q(12 + 4\sqrt{3}; 3\sqrt{3} + 9)$ .

**Bài 5:** Trên mặt phẳng, cho elip (E):  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$  và hypebol (H):

$\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$ . Lập phương trình đường tròn (C) đi qua giao điểm của (E) và (H).

**Đáp số (C):**  $x^2 + y^2 = 5$ .

**Bài 6:** Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho parabol (P) có phương trình  $y^2 = x$  và điểm  $I(0; 2)$ . Tìm tọa độ hai điểm M, N  $\in$  (P) sao cho  $\overline{IM} = 4\overline{IN}$ .

**Đáp số:**  $\begin{cases} M_1(4; -2), N_1(1; 1) \\ M_2(36; 6), N_2(9; 3) \end{cases}$ .

**Bài 7:** Trên mặt phẳng, cho parabol (P) và đường thẳng d như sau:

(P):  $y^2 = 2x$ ; (d):  $2my - 2x + 1 = 0$ .

1/ Chứng minh rằng với mọi giá trị của m, (d) luôn đi qua tiêu điểm F của (P) và cắt (P) tại hai điểm phân biệt M, N.

2/ Tìm quỹ tích trung điểm I của đoạn MN khi m thay đổi.

**Đáp số:** 2/ Quỹ tích là parabol;  $y = x^2 + \frac{1}{2}$ .

**Bài 8:**

Cho đường tròn (C):  $(x + 2)^2 + y^2 = 36$  và điểm  $F_2(2; 0)$ . Xét các đường tròn tâm M đi qua  $F_2$  và tiếp xúc với (C). Tìm quỹ tích tâm M.

**Đáp số:** Quỹ tích là elip:  $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{5} = 1$ .

## Bài giảng số 16

# HÀM SỐ ĐA THỨC

Hàm số là một trong những nội dung chủ yếu của môn Toán được giảng dạy trong nhà trường phổ thông, chủ đề hàm số luôn luôn là câu số 1 trong mọi đề thi về môn Toán vào các trường Đại học và Cao đẳng.

Hàm số đa thức và hàm số phân thức là hai cấu thành chính của chuyên mục hàm số. Bài giảng này đề cập đến các bài toán liên quan đến hàm số đa thức, trong bài giảng số 17 sẽ trình bày các bài toán tương tự nhưng đối với lớp hàm số phân thức.

## §1. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN VỚI HÀM ĐA THỨC

Các kiến thức cơ bản sau đây luôn luôn được sử dụng đến trong quá trình giải toán.

Cho đường cong  $y = f(x)$  và điểm  $M$  nằm trên đường cong có hoành độ là  $x_0$ . Gọi  $a_{tt}$  là hệ số góc của tiếp tuyến với đường cong tại  $M$ . Khi đó ta có:

$$1/ a_{tt} = y'(x_0) = f'(x_0).$$

2/ Phương trình tiếp tuyến với đường cong tại  $M$  là  $y - y_0 = y'(x_0).(x - x_0)$  (1)

Chú ý rằng (1) là phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = f(x)$  tại điểm  $M$  cho trước trên đường cong, còn các trường

hợp khác để giải các bài toán về tiếp tuyến người ta sử dụng kết quả sau:

Cho hai đường  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$ . Hai đường tiếp xúc với nhau tại điểm  $M$  có hoành độ  $x_0$  nếu như hệ sau đây thỏa mãn:

$$\begin{cases} f(x_0) = g(x_0) \\ f'(x_0) = g'(x_0) \end{cases}$$

**Loại 1:** Tiếp tuyến với đường cong tại một điểm cho trước trên đường cong.

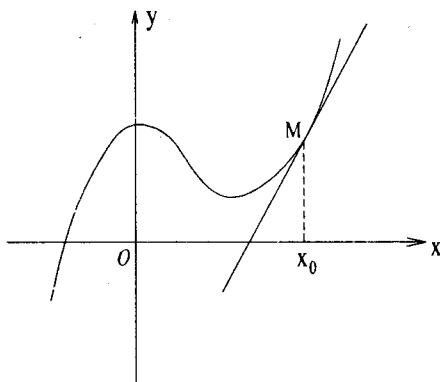
Để giải các bài toán loại này nhất thiết phải tìm được tiếp điểm của tiếp tuyến với đường cong, sau đó sẽ sử dụng công thức (1) nói trong phần mở đầu.

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)

Cho đường cong:  $y = \frac{x+2}{2x+3}$  (C).

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến cắt trục hoành tại A, trục tung tại B sao cho OAB là tam giác vuông cân tại O, ở đây O là gốc tọa độ.



### Giải

Ta có:  $y' = \frac{-1}{(2x+3)^2}$ . Vì tiếp tuyến tạo với hai trục tọa độ một tam giác

vuông cân nên hệ số góc của tiếp tuyến là  $\pm 1$ .

$$\text{Khi đó } a_{tt} = \pm 1 \Leftrightarrow \frac{-1}{(2x_0+3)^2} = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -2 \\ x_0 = -1. \end{cases}$$

Khi  $x_0 = -2$ , thì  $y_0 = -4$ , lúc đó tiếp tuyến có dạng  $y = -x - 2$ .

Khi  $x_0 = -1$ , thì  $y_0 = 1$ , lúc đó tiếp tuyến có dạng  $y = -x$  (trường hợp này loại vì  $y = -x$  đi qua gốc tọa độ, nên không tạo thành tam giác OAB).

Vậy có duy nhất  $y = -x - 2$  là tiếp tuyến cần tìm.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến  $\Delta$  của (C) tại điểm uốn và chứng minh  $\Delta$  là tiếp tuyến của (C) có hệ số góc nhỏ nhất.

### Giải

Ta có  $y' = x^2 - 4x + 3$  và  $y'' = 2x - 4$ . Từ đó suy ra  $M\left(2; \frac{2}{3}\right)$  là điểm uốn của

(C). Tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:  $y - \frac{2}{3} = -(x - 2) \Rightarrow y = -x + \frac{8}{3}$ .

Tiếp tuyến này có hệ số góc  $a = -1$ . Mặt khác tiếp tuyến với (C) tại điểm bất kì trên (C) có hoành độ  $x$  có:

$$a_{tt} = x^2 - 4x + 3 = (x - 2)^2 - 1 \geq -1 = a \Rightarrow \text{đpcm.}$$

**Nhận xét:**

Dễ thấy ta có kết quả tổng quát như sau (với chứng minh hoàn toàn tương tự): Với đường cong  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  với  $a > 0$  thì tiếp tuyến tại điểm uốn có hệ số góc bé nhất; (còn khi  $a < 0$  thì hệ số góc lại lớn nhất).

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Gọi  $(C_m)$  là đồ thị của hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{m}{2}x^2 + \frac{1}{3}$ . Gọi M là điểm thuộc  $(C_m)$  có hoành độ bằng  $-1$ . Tìm  $m$  để tiếp tuyến với  $(C_m)$  tại M song song với đường thẳng  $5x - y = 0$ .

### Giải

Đường thẳng  $5x - y = 0$  có hệ số góc bằng 5, nên để tiếp tuyến tại M song song với  $\Delta$  trước hết ta cần có:  $y'(-1) = 5 \Leftrightarrow m + 1 = 5 \Leftrightarrow m = 4$ .

Khi  $m = 4$  thì tiếp tuyến có dạng:  $y - (-2) = 5(x + 1) \Leftrightarrow y = 5x + 3$ . Rõ ràng đường này song song với  $\Delta$ , vậy  $m = 4$  là giá trị duy nhất cần tìm.

**Thí dụ 4:**

Cho  $y = x^3 + 1 - m(x + 1)$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để tiếp tuyến với  $(C_m)$  tại giao điểm của nó với trục tung, tạo với hai trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 8.

### Giải

Dễ thấy  $M(0; 1 - m)$  là giao điểm của  $(C_m)$  với trục tung, nên cũng dễ thấy  $y = -mx + 1 - m$  là tiếp tuyến với  $(C_m)$  tại M.

Gọi A, B tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến này với trục hoành và trục tung, ta có ngay:  $A = \left(\frac{1-m}{m}; 0\right)$  và  $B = (0; 1-m)$ .

(chú ý khi  $m = 0$ , thì tiếp tuyến song song với Ox nên loại khả năng này).  
Từ đó:

$$S_{OAB} = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} OA \cdot OB = 8 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left| \frac{1-m}{m} \right| |1-m| = 8 \Leftrightarrow \frac{(1-m)^2}{|m|} = 16$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m = 9 \pm 4\sqrt{5} \\ m = -7 \pm 4\sqrt{3} \end{cases}$$

Đó là 4 giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

### Thí dụ 5:

Cho đường cong (C):  $y = x^3 - 2x^2 + 8x + 5$ . Chứng minh không có bất kì hai tiếp tuyến nào của đường cong lại vuông góc với nhau.

### Giải

Giả sử trái lại có hai đường tiếp tuyến của (C) vuông góc với nhau. Gọi  $x_1, x_2$  tương ứng là các hoành độ của hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến ấy. Gọi  $a_1, a_2$  lần lượt là các hệ số góc của hai tiếp tuyến tại các điểm trên (C) có hoành độ  $x_1, x_2$ . Khi đó từ  $a_1 a_2 = -1 \Rightarrow y'(x_1) \cdot y'(x_2) = -1$ .

$$\Rightarrow (3x_1^2 - 2x_1 + 7)(3x_2^2 - 2x_2 + 7) = -1 \quad (1).$$

Tam thức  $f(t) = 3t^2 - 2t + 7$  có  $\Delta' < 0$  nên  $f(t) > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$ . Từ đó và từ (1) suy ra mâu thuẫn. Vậy giả thiết phản chứng là sai  $\Rightarrow$  đpcm.

### Thí dụ 6:

Cho  $y = x^3 - 3x + 1$  (C).

1/ Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ  $x = 2$

2/ Tiếp tuyến ở câu 1/ cắt lại đường cong (C) tại điểm  $M'$ . Tìm tọa độ của  $M'$ .

### Giải

1/ Tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$y - 3 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y = 9x - 15.$$

2/ Giả sử tiếp tuyến ở câu 1/ cắt (C) tại  $M'$ .

Xét phương trình:

$$x^3 - 3x + 1 = 9x - 15 \Leftrightarrow x^3 - 12x + 16 \quad (2)$$

Chú ý rằng (2) chắc chắn có nghiệm

$$x = 2, \text{ vì thế } (2) \Leftrightarrow x^3 - 8 - 12x + 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x^2 + 2x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2(x + 4) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -4. \end{cases}$$

Vậy  $M'(-4; -51)$  là giao điểm thứ hai của tiếp tuyến tại M với (C).

### Thí dụ 7:

Cho đường cong  $y = x^3 - 3x^2 + 1$  (C).

Chứng minh rằng trên (C) tồn tại vô số cặp điểm mà hai tiếp tuyến tại từng cặp điểm song song với nhau.



### Giải

Ta có  $y' = 3x^2 - 6x$ . Bài toán đã cho có dạng tương đương sau:  
Chứng minh rằng tồn tại vô số  $k$  sao cho các phương trình:

$$3x^2 - 6x = k \quad (1)$$

đều có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow 3x^2 - 6x - k = 0 \quad (2)$$

$$\text{Để thấy } \Delta' > 0 \Leftrightarrow 9 + 3k > 0 \Leftrightarrow k > -3 \quad (3).$$

Từ (3) suy ra đpcm.

Nhận xét:

1/ Kết quả trên vẫn đúng cho mọi đường cong bậc ba tùy ý.

2/ Các bạn hãy tự chứng minh nhận xét sau: Mọi đường thẳng nối từng cặp trên luôn đi qua một điểm cố định  $(1; -1)$ .

**Loại 2:** Phương trình tiếp tuyến với đường cong đi qua một điểm cho trước:

Lược đồ chung giải các bài toán này như sau:

– Hoặc là quy về bài toán loại 1 (tức là quy về tìm tiếp điểm của tiếp tuyến với đường cong đã cho).

– Hoặc là sử dụng mệnh đề về điều kiện hai đường tiếp xúc với nhau đã trình bày trong phần mở đầu.

Phương pháp thứ hai là phương pháp hay được sử dụng hơn.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2008)**

Cho đường cong  $y = 4x^3 - 6x^2 + 1$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm  $M(-1; -9)$

### Giải

Đi qua điểm  $M(-1; -9)$  thì  $x = -1$  chắc chắn không phải là tiếp tuyến với (C) nên mọi tiếp tuyến của (C) đi qua M phải có dạng:  $y = k(x + 1) - 9$

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} 4x_0^3 - 6x_0^2 + 1 = k(x_0 + 1) - 9 & (1) \\ 12x_0^2 - 12x_0 = k & (2). \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta có:

$$4x_0^3 + 3x_0^2 - 6x_0 - 5 = 0 \Leftrightarrow (x_0 + 1)(4x_0^2 - x_0 - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = -1 \\ x_0 = \frac{5}{4}. \end{cases}$$

+ Khi  $x_0 = -1$ , thì  $k = 24$ . Lúc này tiếp tuyến là  $y = 24x + 15$ .

+ Khi  $x = \frac{5}{4}$  thì  $k = \frac{15}{4}$ . Lúc này tiếp tuyến là  $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$ .

Nhận xét:

Trong thí dụ trên điểm  $M(-1; -9) \in (C)$ . Vì thế nếu ta cho rằng  $M \in (C)$ , nên tiếp tuyến có dạng:

$$y - (-9) = y'(-1) \cdot (x + 1) = 24(x + 1) \Rightarrow y = 24x + 15$$

Giải như vậy sẽ thiếu đáp số:  $y = \frac{15}{4}x - \frac{21}{4}$ .

Từ đó ta có bài học sau: Phải phân biệt xem đầu bài yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M, hay qua M (điểm M nằm trên (C) hay không nằm trên (C) không đóng vai trò gì ở đây cả).

### Thí dụ 2:

Cho đường cong  $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết tiếp tuyến đi qua điểm  $M(0; \frac{3}{2})$ .

### Giải

Lập luận như thí dụ 1 tiếp tuyến có dạng:  $y = kx + \frac{3}{2}$ .

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm. Khi đó có hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x_0^4 - 3x_0^2 + \frac{3}{2} = kx_0 + \frac{3}{2} \\ 2x_0^3 - 3x_0 = k \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta có:  $x_0^2(x_0^2 - 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_0 = \pm\sqrt{2} \end{cases}$

Từ đó suy ra có ba tiếp tuyến:  $y = \frac{3}{2}$ ;  $y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$ ;  $y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$ .

### Thí dụ 3:

Có bao nhiêu tiếp tuyến đi qua điểm  $M(-2; 5)$  với đường cong (C):  $y = x^3 - 9x^2 + 17x + 2$ .

### Giải

Mọi tiếp tuyến với (C) qua M có dạng:  $y = k(x + 2) + 5$ . Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm. Khi đó ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^3 - 9x_0^2 + 17x_0 + 2 = k(x_0 + 2) + 5 \\ 3x_0^2 - 18x_0 + 17 = k \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn, ta có:  $(x_0 - 1)(2x_0^2 - x_0 + 17) = 0$  (3)

Đối với đường cong bậc ba số tiếp tuyến bằng số tiếp điểm (vì mỗi tiếp tuyến với  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ ,  $a \neq 0$ , chỉ tiếp xúc với đường cong tại một tiếp điểm duy nhất).

Vì thế số nghiệm của (3) bằng số tiếp tuyến với (C) tại M.

Do phương trình  $2x_0^2 - x_0 - 37 = 0$  (ẩn  $x_0$ ) có hai nghiệm phân biệt khác 1, nên (3) có ba nghiệm phân biệt, vì thế qua điểm M vẽ được ba tiếp tuyến đến (C).

### Thí dụ 4:

Cho đường cong  $y = x^3 - 3x + 2$  (C). Tìm các điểm  $M \in (C)$  sao cho qua M chỉ có thể vẽ được duy nhất một tiếp tuyến đến (C).

### Giải

Giả sử  $M(\alpha; \alpha^3 - 3\alpha + 2)$  là điểm thuộc (C) cần tìm. Tiếp tuyến qua M có dạng:  $y = k(x - \alpha) + \alpha^3 - 3\alpha + 2$ .

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^3 - 3x_0 + 2 = k(x_0 - \alpha) + \alpha^3 - 3\alpha + 2 & (1) \\ 3x_0^2 - 3 = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn, ta có:

$$2x_0^3 - 3\alpha x_0^2 + \alpha^3 = 0 \Leftrightarrow (x_0 - \alpha)^2 (2x_0 + \alpha) = 0 \quad (3).$$

Từ giả thiết suy ra (3) (ẩn  $x_0$ ) phải có nghiệm duy nhất. Điều này xảy ra khi và chỉ khi  $\alpha = -\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha = 0$ .

Vậy  $M(0;2)$  là điểm duy nhất trên (C) cần tìm.

**Nhận xét:**

Điểm  $M(0; 2)$  chính là điểm uốn của (C).

Ta có kết quả sau (chứng minh hoàn toàn tương tự và xin dành cho bạn đọc).  
Kết quả của thí dụ trên hoàn toàn đúng với mọi đường bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ,  $a \neq 0$ .

**Thí dụ 5:**

Tìm các điểm trên trục hoành sao cho từ đó vẽ được ba tiếp tuyến đến đồ thị của (C):  $y = x^3 + 3x^2$ , trong đó có hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

**Giải**

Gọi  $M(\alpha;0)$  là điểm cần tìm. Tiếp tuyến với (C) qua M có dạng:  
 $y = k(x - \alpha)$ .

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, thì ta có hệ:

$$\begin{cases} x_0^3 + 3x_0^2 = k(x_0 - \alpha) & (1) \\ 3x_0^2 + 6x_0 = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn ta có kết quả:

$$2x_0^3 + 3(1 - \alpha)x_0^2 - 6\alpha x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 0 & (3) \\ f(x_0) = 2x_0^2 + 3(1 - \alpha)x_0 - 6\alpha = 0 & (4) \end{cases}$$

Để (3) và (4) có ba nghiệm phân biệt thì (4) cần có hai nghiệm phân biệt khác 0.

$$\text{Điều đó xảy ra khi: } \begin{cases} \Delta > 0 \\ f(0) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha < -3 \\ \alpha > -\frac{1}{3} \text{ và } \alpha \neq 0 \end{cases} \quad (*)$$

Tại điểm  $M_1$  có hoành độ 0 thì theo (2) suy ra tiếp tuyến với (C) tại  $M_1$  song song với Ox. Vì mọi đường thẳng song song với Oy không phải là tiếp tuyến của (C), nên để thỏa mãn điều kiện đầu bài thì các tiếp tuyến với (C) tại điểm  $M_1, M_2$  phải vuông góc với nhau. Hoành độ  $M_1, M_2$  tương ứng là các nghiệm  $t_1, t_2$  của phương trình:

$$2t^2 + 3(1 - \alpha)t - 6\alpha = 0 \quad (5)$$

Hệ số góc của tiếp tuyến này theo (2) tương ứng là:

$$k_1 = 3t_1^2 + 6t_1; \quad k_2 = 3t_2^2 + 6t_2.$$

Từ đó  $k_1 \cdot k_2 = -1 \Leftrightarrow (3t_1^2 + 6t_1) \cdot (3t_2^2 + 6t_2) = -1$

$$\Leftrightarrow 9(t_1 t_2)^2 + 18t_1 t_2 (t_1 + 2) + 36t_1 t_2 = -1 \quad (6).$$

Áp dụng định lí Viet ta có  $t_1 t_2 = \frac{3(\alpha - 1)}{2}$ ;  $t_1 t_2 = -3\alpha$  nên từ (6) sau khi rút gọn ta có:  $-27\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{27}$

Vậy  $M(\frac{1}{27}; 0)$  là điểm duy nhất trên C cần tìm.

## §2. BÀI TOÁN VỀ CỰC TRỊ VỚI HÀM ĐA THỨC

Ngoài việc sử dụng thành thạo các quy tắc 1, quy tắc 2 tìm cực đại và cực tiểu của hàm số (đã trình bày trong sách giáo khoa), ta luôn dùng đến các kết quả sau:

– Đường cong  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  ( $a \neq 0$ ) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ khi phương trình  $y' = 3ax^2 + 2bx + c = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

– Đường cong  $y = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$  ( $a \neq 0$ ) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình  $y' = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

– Giả sử  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đạt cực trị tại hai điểm có hoành độ  $x_1, x_2$ . Khi đó để tính giá trị cực trị ta còn có thể làm như sau:

Gọi  $y = Ax + B$  là phần dư trong phép chia của  $f = ax^3 + bx^2 + cx + d$  cho đạo hàm  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$  của nó. Khi đó:

$$y(x_1) = Ax_1 + B; y(x_2) = Ax_2 + B.$$

Khi sử dụng nhận xét này, phải chứng minh lại như sau:

Ta có:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d = (3ax^2 + 2bx + c)(Cx + D) + Ax + B$ , ở đây  $Cx + D$  là thương trong phép chia nói trên. Vì  $y'(x_1) = y'(x_2) = 0$  đpcm.

Các dạng toán cơ bản:

**Loại 1:** Các bài toán về sự tồn tại cực trị :

Lớp bài toán này thường có dạng sau: Tìm tham số để các hàm số có cực trị và cực trị này thỏa mãn những điều kiện nào đó cho trước.

Lược đồ chung để giải các bài toán này sẽ là sử dụng điều kiện tồn tại cực trị với các đa thức bậc ba, bậc bốn, kết hợp với việc sử dụng các kết quả về đa thức bậc hai, định lí Viet, lí thuyết về phương trình và bất phương trình.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Cho hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + 3(m^2 - 1)x - 3m^2 - 1$

Tìm  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu và các điểm cực trị cách đều gốc tọa độ.

**Giải**

Trước hết hàm số có cực trị khi phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 6x + 3m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - m^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

$$(1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \Leftrightarrow \Delta' = m^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (2)$$

Khi thỏa mãn (2) hàm số có cực trị tại  $A(1-m; -2-2m^2)$  và  $B(1+m; -2+2m^2)$ .

Theo bài ra ta có:

$$OA = OB \Leftrightarrow (1-m)^2 + (-2-2m^2)^2 = (1+m)^2 + (-2+2m^2)^2.$$

$$\Leftrightarrow 4m^3 = m \Leftrightarrow m^2 = \frac{1}{4} \text{ (do } m \neq 0) \Leftrightarrow m = \pm \frac{1}{2}.$$

Vậy  $m = \pm \frac{1}{2}$  là hai giá trị cần tìm của  $m$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)**

Cho đường cong  $y = mx^4 + (m^2 - 9)x^2 + 10$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để đường cong ( $C_m$ ) có ba cực trị.

**Giải**

Đường cong ( $C_m$ ) có ba cực trị khi và chỉ khi phương trình  $y' = 0$  có ba nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 4mx^2 + 2(m - 9)x = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 & (2) \\ 2mx^2 = 9 - m^2. & (3) \end{cases}$$

Như vậy (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm phân biệt khác 0 tức là khi và chỉ khi  $\frac{9 - m^2}{2m} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -3 \\ 0 < m < 3 \end{cases} \quad (4)$

Vậy (4) là tập hợp tất cả các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Thí dụ 3:**

Cho hàm số  $y = x^3 + 2(m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$ . Tìm  $m$  để hàm số đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho:  $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ .

**Giải**

Đường cong có cực trị khi phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt.

$$\text{Ta có } y' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4(m - 1)x + (m^2 - 4m + 1) = 0. \quad (1)$$

(1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 + 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < -2 - \sqrt{3} \\ m > -2 + \sqrt{3} \end{cases} \quad (2)$$

Khi thỏa mãn (2) đường cong đạt cực trị tại hai điểm phân biệt  $x = x_1, x = x_2$  là hai nghiệm của (1). Theo định lý Viet, ta có:

$$x_1 + x_2 = \frac{4(1 - m)}{3}; x_1 x_2 = \frac{m^2 - 4m + 1}{3}.$$

$$\text{Từ đó ta có: } \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{x_1 x_2} = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 x_2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - m = 0 \\ \frac{m^2 - 4m + 1}{3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 1 \\ m = -1 \\ m = 5. \end{cases}$$

Đối chiếu với điều kiện (2) suy ra có hai giá trị cần tìm của  $m$  là  $m = 1$  và  $m = 5$

**Nhận xét:** Thí dụ trên là một minh họa cho tính cần thiết tìm điều kiện để cho hàm số trước hết phải có cực trị.

**Thí dụ 4:** Cho  $y = \frac{1}{4}x^2 - mx^2 + \frac{3}{2}$ .

Tìm  $m$  để đường cong chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

**Giải**

Ta có  $y' = x^3 - 2mx = x(x^2 - 2m)$ .

Khi  $m \leq 0$  thì  $x^2 - 2m \geq 0$ . Khi đó ta có bảng biến thiên sau:

$x$		0	
$y'$	-	0	+
$y$			

Hàm số chỉ có cực tiểu mà không có cực đại.

Khi  $m > 0$ , ta có bảng biến thiên sau:

$x$		$\sqrt{2m}$		0		$-\sqrt{2m}$	
$y'$	-	0	+	0	-	0	+
$y$							

Từ đó suy ra loại trường hợp này vì hàm số có cực đại và cực tiểu.

Vậy  $m \leq 0$  là giá trị cần tìm.

**Thí dụ 5:**

Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m-2)x^2 + (5m+4)x + 3m+1$

Tìm  $m$  để hàm số đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 < 2 < x_2$ .

**Giải**

Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2(m-2)x + 5m+4 = 0$  (1).

Vậy (1) có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi

$$\Delta' = m^2 - 9m > 0 \Leftrightarrow m < 0 \text{ hoặc } m > 9 \quad (2).$$

Khi thỏa mãn (2) đường cong đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của (1).

Để thỏa mãn điều kiện  $x_1 < 2 < x_2$ , ta cần có:

$$(x_2 - 2)(2 - x_1) > 0 \Leftrightarrow 2(x_1 + x_2) - 2x_1x_2 - 4 > 0 \quad (3)$$

Từ định lý Viet với (1), và (3) suy ra:  $4(2-m) - (5m+4) - 4 > 0 \Leftrightarrow m < 0$  (4)

Từ (2) và (4) suy ra  $m < 0$  là các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Loại 2:** Các bài toán về đường thẳng nối hai cực trị:

Giả sử cho đường cong bậc ba  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  đạt cực trị tại 2 điểm  $M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$ . Khi đó để viết phương trình đường thẳng đi qua  $M_1, M_2$  có hai cách như sau:

– Sử dụng công thức quen biết của hình học giải tích viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm  $M_1, M_2$ .

– Nếu gọi  $y = Ax + B$  là phần dư trong phép chia của  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$  cho  $y' = 3ax^2 + 2bx + c$ , thì  $y = Ax + B$  chính là đường thẳng cần tìm.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A– 2002)**

Cho đường cong  $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$  (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua hai điểm cực trị của (C).

### Giải

Ta có  $y' = -3x^2 + 6mx + 3(1 - m^2)$ . Vì thế  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m^2 - 1 = 0$  (1).

Do  $\Delta' = 1 > 0$  với mọi  $m$ , nên (1) luôn có hai nghiệm phân biệt, tức là đường cong luôn có cực đại và cực tiểu với mọi  $m$ .

Dễ thấy  $A = (m - 1; -m^2 + 3m - 2)$  và  $B(m + 1; -m^2 + 3m + 2)$  là hai điểm cực trị của (C). Đường thẳng nối A, B có dạng:

$$\frac{y - (-m^2 + 3m - 2)}{-m^2 + 3m + 2 - (-m^2 + 3m - 2)} = \frac{x - (m - 1)}{m + 1 - (m - 1)} \Leftrightarrow y = 2x - m^2 + m.$$

### **Thí dụ 2:**

Cho đường cong bậc ba  $y = 5x^3 + 7x^2 - 9x + 1$  (C)

Viết phương trình đường thẳng đi qua cực đại, cực tiểu của (C)

### Giải

Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow 15x^2 + 14x - 9 = 0$  (1)

Do (1) chắc chắn có hai nghiệm phân biệt (do  $\frac{c}{a} = -\frac{9}{15} < 0$ ), nên (C) có cực đại, cực tiểu.

Áp dụng phép chia đa thức  $y = 5x^3 + 7x^2 - 9x + 1$  cho  $y' = 15x^2 + 14x - 9$  ta có:

$$5x^3 + 7x^2 - 9x + 1 = (15x^2 + 14x - 9) \cdot 8 \cos^3 \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x.$$

Vậy  $y = -\frac{172}{45}x - \frac{18}{45}$  là đường thẳng cần tìm!

**Nhận xét:** Trong thí dụ trên, (1) có hai nghiệm:  $x = \frac{-7 \pm \sqrt{284}}{15}$ .

Việc tìm  $y_1, y_2$  là quá phức tạp, do đó phương pháp sử dụng công thức của hình học giải tích để viết phương trình đường thẳng qua A, B ở đây sẽ quá phức tạp (về mặt tính toán)

### **Thí dụ 3:**

Cho hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để khoảng cách giữa các điểm cực trị của hàm số là nhỏ nhất.

### Giải

Ta có  $y' = x^2 - 2mx - 1$  Vì thế  $y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2mx - 1 = 0$  (1)

Từ (1) suy ra nó có hai nghiệm phân biệt với mọi  $m$ , tức là với mọi  $m$  thì ( $C_m$ ) luôn có cực trị. Thực hiện phép chia  $y$  cho  $y'$  ta có:

$$\frac{1}{3}x^3 - mx^2 - x + m + 1 = (x^2 - 2mx - 1) \left( \frac{1}{3}x - \frac{1}{3}m \right) - \frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1.$$

Vậy  $y = -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x + \frac{2}{3}m + 1$  là đường thẳng nối hai cực trị A, B của ( $C_m$ ),

ở đây:

$$A = \left( x_1; -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_1 + \frac{2}{3}m + 1 \right) \quad B = \left( x_2; -\frac{2}{3}(m^2 + 1)x_2 + \frac{2}{3}m + 1 \right),$$

trong đó  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của (1).

Ta có:

$$\begin{aligned} AB^2 &= (x_2 - x_1)^2 + \frac{4}{9}(m^2 + 1)(x_2 - 1)^2 = (x_2 - x_1)^2 \left[ \frac{4}{9}(m^2 + 1) + 1 \right] \\ &= \left[ (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 \right] \left[ \frac{4}{9}(m^2 + 1) + 1 \right] = (4m^2 + 4) \left( \frac{4}{9}m^2 + \frac{13}{9} \right) \quad (2) \end{aligned}$$

(do  $x_1 + x_2 = 2m$ ;  $x_1x_2 = -1$  theo định lý Viet)

Từ (2) suy ra  $\min AB = \frac{2}{3}\sqrt{13} \Leftrightarrow m = 0$ .

### §3. BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA HÀM ĐA THỨC

Bài toán tương giao của các đường cong với đường thẳng và giữa các đường cong với nhau là một lớp quan trọng trong các bài toán về hàm số. Nội dung của bài toán này có dạng chung như sau: Cho các đường cong (hoặc đường thẳng)  $y = f(x)$  và  $y = g(x)$  thường chứa tham số. Tìm điều kiện để chúng cắt nhau và các giao điểm của chúng thỏa mãn một điều kiện cho trước nào đấy. Ta biết rằng hoành độ các giao điểm là nghiệm của phương trình  $f(x) = g(x)$  (1).

Vì thế bài toán về sự tương giao của các đường và việc khảo sát phương trình (1) có liên quan mật thiết với nhau. Bài toán này được giải dựa vào bài toán kia.

Dưới đây chúng tôi sẽ trình bày các dạng toán cơ bản của lớp các bài toán này.

**Loại 1:** Đoán trước một giao điểm của các đường:

Cho hai đường cong đa thức  $y = f(x)$ ,  $y = g(x)$  (mà một trong chúng có thể là đường thẳng). Hoành độ giao điểm của hai đường thẳng là nghiệm của phương trình:

$$f(x) = g(x) \quad (1).$$

Ta chỉ quan tâm khi (1) là phương trình có bậc lớn hơn hoặc bằng 3.

Nếu như bằng cách nào đó có thể biết trước một nghiệm  $x_0$  của nó, thì (1) có thể hạ bậc bằng cách đem  $f(x) - g(x)$  chia cho  $x - x_0$ .

$$\text{Khi ấy } (1) \Leftrightarrow (x - x_0)h(x) = 0 \quad (2),$$

ở đây bậc của phương trình  $h(x) = 0$  giảm đi 1 so với (1).

Ta sẽ trình bày cách xác định  $x_0$  thông qua một số thí dụ sau đây.

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008).**

Cho đường cong  $y = x^3 - 3x^2 + 4$  (C) và điểm  $I(1; 2)$ . Chứng minh rằng mọi đường thẳng qua I với hệ số góc  $k > -3$  đều cắt (C) tại ba điểm phân biệt A, B, I sao cho I là trung điểm của AB.



### Giải

Đường thẳng  $d$  qua  $I$  với hệ số góc  $k$  có dạng:  $y = k(x - 1) + 2$ . Số giao điểm của  $d$  với  $(C)$  là nghiệm của phương trình:

$$x^3 - 3x^2 + 4 = k(x - 1) + 2 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 - 2x - 2 - k) = 0 \quad (1)$$

$\Delta' = k + 3 > 0$  khi  $k > -3$  và  $x^2 - 2x - 2 - k$  nhận giá trị  $-k + 3 \neq 0$  khi  $x = 1$ , nên (1) có ba nghiệm phân biệt.

Ba giao điểm của  $d$  với  $(C)$  là  $A, I, B$  trong đó  $A, B$  tương ứng có hoành độ  $x_1, x_2$  là nghiệm của phương trình  $x^2 - 2x - 2 - k = 0$ .

Theo định lý Viet, ta có  $x_1 + x_2 = 2 = 2x_I \Rightarrow I$  là trung điểm của  $AB \Rightarrow$  đpcm.

### **Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A - 2002)**

Cho đường cong  $y = -x^3 + 3x^2$  ( $C$ ) và đường thẳng  $y = -k^3 + 3k^2$ . Tìm  $k$  để chúng cắt nhau tại ba điểm phân biệt.

### Giải

Xét phương trình:  $-x^3 + 3x^2 = -k^3 + 3k^2 \quad (1)$

$$\Leftrightarrow (x^3 + k^3) + 3(x^2 - k^2) = 0 \Leftrightarrow (x - k)[x^2 + x(k - 3) + k^2 - 3k] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ f(x) = x^2 + x(k - 3) + k^2 - 3k = 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ f(x) = x^2 + x(k - 3) + k^2 - 3k = 0 \end{cases} \quad (3).$$

Từ đó suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt khi và chỉ khi (3) có hai nghiệm phân biệt khác  $k$ , tức là khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta > 0 \\ f(k) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k^2 - 2k - 3 < 0 \\ k^2 - 2k \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 < k < 3 \\ k \neq 0; k \neq 2. \end{cases} \quad (4)$$

(4) là tập hợp giá trị cần tìm của  $k$ .

### **Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D - 2009)**

Cho đường cong  $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = -1$  cắt ( $C_m$ ) tại bốn điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 2.

### Giải

Đường thẳng  $y = -1$  và  $y = x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m$  cắt nhau tại bốn điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình:  $x^4 - (3m + 2)x^2 + 3m = -1$  (1) có bốn nghiệm phân biệt. Điều đó xảy ra khi và chỉ khi phương trình

$$t^2 - (3m + 2)t + 3m + 1 = 0 \quad (2)$$

có hai nghiệm dương và bé hơn 4.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 3m + 1 \end{cases}$$

$$\text{Từ đó suy ra: } \begin{cases} 3m + 1 \neq 1 \\ 0 < 3m + 1 < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} < m < 1 \\ m \neq 0. \end{cases}$$

Đó là các giá trị cần tìm của  $m$ .

### **Thí dụ 5:**

Cho đường cong  $y = x^3 + 2(m - 1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1)$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3.

### Giải

Số giao điểm của  $(C_m)$  với trục hoành bằng số nghiệm của phương trình

$$x^3 + 2(m-1)x^2 + (m^2 - 4m + 1)x - 2(m^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

Có thể thấy một nghiệm của (1) là  $x_0 = 2$ . Từ đó ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x-2)[x^2 + 2mx - (m^2 + 1)] = 0. \quad (2)$$

Từ (2) suy ra (1) có ba nghiệm phân biệt có hoành độ nhỏ hơn 3 khi và chỉ khi phương trình  $f(x) = x^2 + 2mx - m^2 - 1 = 0$  (3) có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  khác 2 sao cho  $x_1 < x_2 < 3$ .

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} \Delta' = m^2 + m^2 + 1 > 0 \\ (3-x_1)(3-x_2) > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \\ f(2) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3(x_1 + x_2) + x_1 x_2 > 0 \\ x_1 + x_2 < 6 \\ -m^2 + 4m + 3 \neq 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} (4) \\ (5) \\ (6) \end{matrix}$$

Thay  $x_1 + x_2 = -2m$ ;  $x_1 x_2 = -m^2 - 1$  vào hệ (4)(5)(6), ta đi đến:

$$\begin{cases} 3 - \sqrt{17} < m < 3 + \sqrt{17} \\ m \neq 2 \pm \sqrt{7}. \end{cases}$$

Đó là các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Loại 2:** Sử dụng đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  để biện luận phương trình  $f(x) = m$ .

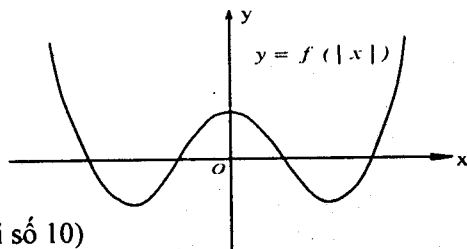
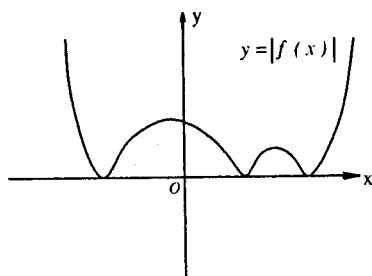
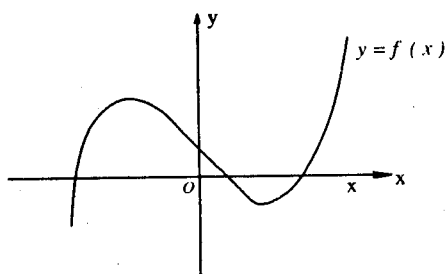
Đây là một trong những phương pháp hay dùng để khảo sát các bài toán về tính giao nhau của các đường, nhất là các bài toán liên quan chặt chẽ đến đồ thị của hàm số  $y = f(x)$  (chú ý rằng các bài toán về hàm số ở câu 1 thường là bắt vẽ đồ thị hàm số  $y = f(x)$ ).

Các kiến thức hay dùng trong mục này là hai phép biến đổi đồ thị sau:

– Biết đồ thị hàm số  $y = f(x)$  suy ra đồ thị hàm số  $y = |f(x)|$ .

– Biết đồ thị hàm số  $y = f(x)$  suy ra đồ thị hàm số  $y = f(|x|)$ .

Xem các hình vẽ sau:



(Xem lại SGK đại số 10)

2/ Ta có:  $2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| = m(1) \Leftrightarrow 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4 = m - 4(2)$

Từ đồ thị (xem hình 2)  $y = 2|x|^3 - 9x^2 + 12|x| - 4$  suy ra (2) (tức là (1)) có 6 nghiệm phân biệt  $\Leftrightarrow 0 < m - 4 < 1 \Leftrightarrow 4 < m < 5$ .

**Loại 3:** Bài toán tìm giao điểm khi tham số  $m$  ở dạng bậc nhất:

Giả sử bài toán tìm giao điểm của đường cong quy về tìm nghiệm phương trình:

$$f(x) = g(x) \quad (1)$$

trong đó (1) không nhằm được nghiệm và tham số  $m$  trong (1) có dạng bậc nhất (tức là trong (1) không chứa  $m^2, m^3, \dots$ ) khi đó dễ dàng quy (1) về dạng:

$$F(x) = m \quad (2),$$

ở đây  $F(x)$  là hàm số phân thức. Bằng cách lập bảng biến thiên của  $F(x)$ , ta dễ dàng hơn trong việc biện luận số nghiệm của (2), và từ đó suy ra các kết luận đối với 1.

**Thí dụ 1:**

Cho đường cong  $y = x^3 - 3x^2 - 3mx + 3m$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) và đường thẳng  $d: y = -3x - 1$  cắt nhau tại ba điểm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$  sao cho  $x_1 < 1 < x_2 < 2 < x_3$ .

**Giải**

Xét phương trình:  $x^3 - 3x^2 - 3mx + 3m = -3x - 1 \quad (1)$

Ta có (1)  $\Leftrightarrow x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 3m(x - 1) \quad (2)$

Vì  $x = 1$  không phải là nghiệm của (2) với mọi  $m$  (khi thay  $x = 1$  vào vế trái ta thấy nó bằng 2). Do đó: (2)  $\Leftrightarrow f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{3(x - 1)} = m \quad (3).$

Để thấy  $f'(x) = \frac{2(x - 2)(x^2 - x + 1)}{3(x - 1)^2}$ , nên có bảng biến thiên sau:

$x$	1	2	
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$+\infty \rightarrow -\infty$	$+\infty \rightarrow 1 \rightarrow +\infty$	

Từ đó suy ra (3) có ba nghiệm phân biệt  $x_1, x_2, x_3$  thoả mãn  $x_1 < 1 < x_2 < 2$  khi và chỉ khi  $m > 1$ . Đó cũng chính là các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Thí dụ 2:**

Tìm  $m$  để đường cong  $y = x^3$  và  $y = mx^2 - m$  cắt nhau tại 3 điểm phân biệt.

Giải hoàn toàn như thí dụ trên và có  $m < \frac{3\sqrt{3}}{2}$  hoặc  $m > \frac{3\sqrt{3}}{2}$  là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Cho đường cong  $y = x^4 + 2x^2 + 4x - 1$ . Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong trên, biết rằng tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng  $y = -\frac{1}{4}x + 3$ .

Đáp số:  $y = 4x - 1$  và  $y = 4x - 2$ .

### Bài 2:

Cho đường cong  $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$  (C). Tìm điểm M thuộc (C) sao cho tiếp tuyến của (C) tại M thì qua gốc tọa độ.

Đáp số:  $M(-1; 12)$ .

### Bài 3:

Viết phương trình tiếp tuyến với đường cong  $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 4$ , biết rằng tiếp tuyến tạo với đường thẳng  $y = 3x + 7$  góc  $45^\circ$ .

Đáp số: Có 4 tiếp tuyến  $y = -2x - \frac{8}{3}$ ;  $y = -2x - 4$ ;

$$y = \frac{1}{2}x - \frac{38 + 9\sqrt{6}}{6} \text{ và } y = \frac{1}{2}x - \frac{16 + 4\sqrt{6}}{6}.$$

### Bài 4:

Cho đường cong  $y = \frac{1}{2}x^4 - 3x^2 + \frac{3}{2}$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đi qua điểm  $A(0; \frac{3}{2})$ .

Đáp số:  $y = \frac{3}{2}$ ;  $y = -2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$ ;  $y = 2\sqrt{2}x + \frac{3}{2}$ .

### Bài 5:

Cho đường cong  $y = x^3 - 12x + 12$  (C). Tìm trên đường thẳng  $y = -4$  các điểm M sao cho qua M vẽ được ba tiếp tuyến với (C).

Đáp số:  $M = (\alpha; 0)$  với  $\alpha < -4$  hoặc  $\alpha > \frac{4}{3}$  (và  $\alpha \neq 2$ ).

### Bài 6:

Cho đường cong  $y = \frac{4}{3}x^3 - 2(1 - \sin \alpha)x^2 - (1 + \cos 2\alpha)x + 1$  (C). Tìm  $\alpha$  để (C) có cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 + 2x_2 = 1$

Đáp số:  $\sin \alpha = \frac{1}{2}$ .

**Bài 7:**

Cho đường cong  $y = \frac{1}{3}mx^3 - (m-1)x^2 + 3(m-2)x + \frac{1}{3}$ . Tìm  $m$  để đường cong đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 + 2x_2 = 1$ .

*Đáp số:*  $m = 2$  hoặc  $m = \frac{2}{3}$ .

**Bài 8:**

Cho  $y = \frac{1}{3}x^3 + (m+3)x^2 + 4(m+3)x + 2m - 5$ . Tìm  $m$  để đường cong đạt cực trị tại  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 < x_2 < 3$ .

*Đáp số:*  $m > 1$  hoặc  $-\frac{39}{10} < m < -3$ .

**Bài 9:**

Cho đường cong  $y = x^3 - 2mx^2 + (2m^2 - 1)x + m(1 - m^2)$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 1.

*Đáp số:*  $m > 2$ .

**Bài 10:**

Cho đường cong  $y = x^3 + 3mx^2 - 3x + 3m + 2$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) cắt trục hoành tại ba điểm phân biệt có hoành độ  $x_1, x_2, x_3$  sao cho  $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15$ .

*Đáp số:*  $m = \pm 1$ .

## Bài giảng số 17

# HÀM SỐ PHÂN THỨC

Cấu trúc của bài giảng này tương tự như cấu trúc của bài giảng số 16 (hàm số đa thức).

### §1. BÀI TOÁN TIẾP TUYẾN VỚI HÀM SỐ PHÂN THỨC

Kiến thức cơ bản xin xem trong tiết 1 – bài giảng số 16. Sau đây xét các dạng toán cơ bản

**Loại 1:** Tiếp tuyến tại một điểm cho trước trên đường cong.

Phương pháp giải như đã trình bày trong loại 1, §1 bài giảng 16.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

Cho đường cong  $y = \frac{2x}{x+1}$  (C).

Tìm điểm  $M \in (C)$  sao cho tiếp tuyến tại M của (C) cắt Ox, Oy tại A, B sao cho diện tích tam giác OAB bằng  $\frac{1}{4}$ , ở đây O là gốc tọa độ.

**Giải**

Gọi  $M\left(x_0; \frac{2x_0}{x_0+1}\right) \in (C)$  là điểm cần tìm. Ta có  $y'(x_0) = \frac{2}{(x_0+1)^2}$ .

Do đó phương trình tiếp tuyến với (C) tại M là:

$$y - \frac{2x_0}{x_0+1} = \frac{2}{(x_0+1)^2}(x - x_0) \Leftrightarrow y = \frac{2}{(x_0+1)^2}x + \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \quad (1).$$

Từ (1) suy ra  $A = (-x_0^2; 0)$  và  $B\left(0; \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2}\right)$

$$\text{Ta có: } S_{OAB} = \frac{1}{2}OA \cdot OB = \frac{1}{2}|-x_0^2| \left| \frac{2x_0^2}{(x_0+1)^2} \right| = \frac{x_0^4}{(x_0+1)^2} \quad (2).$$

$$\text{Từ (2) suy ra: } S_{OAB} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{x_0^4}{(x_0+1)^2} = \frac{1}{4} \quad (3).$$

Giải (3) ta được  $x_0 = 1$  hoặc  $x_0 = -\frac{1}{2}$ .

Như vậy  $M_1(1; 1)$  và  $M_2(-\frac{1}{2}; -2)$  là hai điểm cần tìm trên (C).

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Cho đường cong  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x + 2}$  (C). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến vuông góc với tiệm cận xiên của (C).

**Giải**

Dễ thấy  $y = x - 1$  là tiệm cận xiên của (C) (bạn đọc tự nghiệm lại).

Khi đó tiếp tuyến (d) cần tìm do vuông góc với tiệm cận xiên nên có hệ số góc bằng  $-1$ . Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, ta có:

$$y'(x_0) = -1 \Leftrightarrow \frac{x_0^2 + 4x_0 + 3}{(x_0 + 2)^2} = -1 \quad (1).$$

Dễ dàng giải (1) và ta có:  $x_0 = -2 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Áp dụng công thức  $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$  ta suy ra có hai tiếp tuyến cần tìm là:  $y = -x + 2\sqrt{2} - 5$  và  $y = -x - 2\sqrt{2} - 5$ .

**Thí dụ 3:**

Cho đường cong  $y = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$  (C).

Tìm điểm  $M \in (C)$  để tiếp tuyến cắt Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho OAB là tam giác vuông cân.

**Giải**

Gọi  $M \in (C)$  là điểm cần tìm.

Dễ thấy tiếp tuyến với (C) tại M có dạng:

$$y - \frac{x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 - 1} = \frac{x_0^2 - 2x_0 - 2}{(x_0 - 1)^2} (x - x_0) \quad (1).$$

Bằng cách lần lượt cho  $y = 0$  (cho  $x = 0$ ) trong (1), ta dễ dàng suy ra:

$$A = \left( \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{-x_0^2 + 2x_0 + 2}; 0 \right); B = \left( 0; \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} \right)$$

Tam giác OAB vuông cân khi và chỉ khi:

$$OA = OB > 0 \Leftrightarrow \left| \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{-x_0^2 + 2x_0 + 2} \right| = \left| \frac{2x_0^2 + 2x_0 - 1}{(x_0 - 1)^2} \right| > 0 \quad (2)$$

Giải (2) và thu được  $x_0 = \frac{2 \pm \sqrt{6}}{2}$ .

Vậy trên (C) có hai điểm cần tìm là  $M_1, M_2$  với hoành độ tương ứng là

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{6}}{2}, x_2 = \frac{2 - \sqrt{6}}{2}.$$

**Thí dụ 4:** Cho đường cong  $y = \frac{2x+1}{x+2}$  (C).

Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết tiếp tuyến tạo với đường thẳng  $d: y = 2x + 1$  một góc  $45^\circ$ .

**Giải**

Gọi  $a_{tt}$  là hệ số góc của tiếp tuyến. Vì tiếp tuyến tạo với  $d$  một góc  $45^\circ$  và do  $d$  có hệ số góc bằng 2, nên ta có:

$$\tan 45^\circ = \left| \frac{a_{tt} - 2}{1 + 2a_{tt}} \right| \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a_{tt} - 2}{1 + 2a_{tt}} = 1 \\ \frac{a_{tt} - 2}{1 + 2a_{tt}} = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{tt} = -3 \\ a_{tt} = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Gọi  $x_0$  là hoành độ của tiếp điểm, ta có  $a_{tt} = y'(x_0) = \frac{3}{(x_0 + 2)^2} > 0$ .

Ta có  $a_{tt} = -3$  bị loại, còn  $a_{tt} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{(x_0 + 2)^2} = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 1 \\ x_0 = -5 \end{cases}$

Từ đó áp dụng công thức  $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$  suy ra có hai tiếp tuyến cần tìm là:  $y = \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}$  và  $y = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$ .

**Chú ý:** Ta đã sử dụng công thức quen biết sau:  $d_1, d_2$  là hai đường thẳng có hệ số góc lần lượt là  $k_1, k_2$ . Khi đó nếu gọi  $\alpha$  là góc giữa  $d_1$  và  $d_2$  thì

$$\tan \alpha = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right|$$

( dĩ nhiên không xét khi  $d_1 \perp d_2$  ).

**Thí dụ 5:** Cho đường cong  $y = \frac{3x+1}{x-3}$  (C) và M là một điểm bất kì trên (C).

Gọi I là giao điểm của hai tiệm cận. Tiếp tuyến tại M cắt hai tiệm cận tại A, B.

1/ Chứng minh M là trung điểm của AB.

2/ Chứng minh tiếp tuyến tại M không đi qua I.

**Giải**

Giả sử  $M \in (C)$  và có hoành độ  $x_0$ . Áp dụng công thức viết phương trình tiếp tuyến ta có phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm M là:

$$y = \frac{-1}{(x_0 - 3)^2} (x - x_0) + \frac{3x_0 + 1}{x_0 - 3} \quad (1)$$

1/ Rõ ràng  $x = 3$  và  $y = 3$  lần lượt là tiệm cận đứng và tiệm cận ngang của (C).

Gọi A, B tương ứng là giao điểm của tiếp tuyến (1) với tiệm cận đứng và tiệm cận ngang. Khi đó dễ thấy  $A = \left( 3; 3 + \frac{2}{x_0 - 3} \right)$ ;  $B = (2x_0 - 3; 3)$



Từ đó:  $x_A + x_B = 2x_0 = 2x_M$ . Mặt khác A, M, B thẳng hàng, nên M là trung điểm của AB.

2/ Để thấy  $l(3; 3)$ . Thay  $x=3$  vào vế phải của (1) ta có

$$VP = \frac{-(3-x_0)}{(x_0-3)^2} + \frac{3x_0+1}{x_0-3} = \frac{3x_0+2}{x_0-3} \neq 3 \text{ với } \forall x_0 \neq 3.$$

Điều đó chứng tỏ rằng  $l$  không nằm trên tiếp tuyến (1)  $\Rightarrow$  đpcm.

**Loại 2:** Tiếp tuyến đi qua một điểm cho trước trên đường cong:

Phương pháp giải như phương pháp sử dụng đối với loại 2, §1, bài giảng 16.

**Thí dụ 1:**

Cho đường cong (C):  $y = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 2}$  và điểm A(6; 4). Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết rằng tiếp tuyến đi qua A.

**Giải**

Tiếp tuyến với C đi qua A có dạng:  $y = k(x - 6) + 4$  (vì  $x = 6$  không thể là tiếp tuyến của (C)). Ta có:  $y' = \frac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}$ .

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{x_0^2 - 2x_0 + 1}{x_0 - 2} = k(x_0 - 6) + 4 & (1) \\ \frac{x_0^2 - 4x_0 + 3}{(x_0 - 2)^2} = k. & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) rồi rút gọn (để ý rằng cần có điều kiện  $x_0 \neq 2$ ), ta đi đến:

$$2x_0^2 - 6x_0 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ hoặc } x_0 = 3.$$

+ Khi  $x_0 = 0$ , thì  $k = \frac{3}{4}$ . Tiếp tuyến là  $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

+ Khi  $x_0 = 3 \Rightarrow k = 0$ . Tiếp tuyến là  $y = 4$ .

**Thí dụ 2:**

Cho  $y = \frac{x+3}{x-1}$  (C). Tìm các điểm M trên đường thẳng  $y = 2x+1$ , sao cho từ M vẽ được một tiếp tuyến đến (C).

**Giải**

Gọi  $M(\alpha; 2\alpha+1)$  là điểm cần tìm. Đường thẳng đi qua M và là tiếp tuyến của (C) có dạng:  $y = k(x - \alpha) + 2\alpha + 1$ .

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{x_0 + 3}{x_0 - 1} = k(x_0 - \alpha) + 2\alpha + 1 & (1) \\ \frac{-4}{(x_0 - 1)^2} = k. & (2) \end{cases}$$

Với điều kiện  $x_0 \neq 1$ , thay (2) vào (1) rồi rút gọn, ta có:

$$\alpha x_0^2 - 2x_0(\alpha + 2) + 3\alpha + 2 = 0 \quad (3)$$

Bài toán trở thành tìm  $\alpha$  để (3) có đúng một nghiệm khác 1.

– Nếu  $\alpha = 0$ , thì (3) có dạng  $-4x_0 + 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{2}$ .

– Nếu  $\alpha \neq 0$ , thì (3) có duy nhất nghiệm và nghiệm này khác 1 khi:

$$\begin{cases} \Delta' = 0 \\ \frac{\alpha + 2}{\alpha} \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2 + \alpha + 2 = 0 \\ \alpha + 2 \neq \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \alpha = 2 \end{cases}$$

Nếu  $\alpha \neq 0$  thì (3) có hai nghiệm phân biệt trong đó có một nghiệm bằng 1 khi

$$\begin{cases} \Delta' > 0 \\ x_0 = 1 \text{ là một nghiệm của} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^2 + \alpha + 2 > 0 \\ 2\alpha - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Tóm lại  $M_1(0;1)$ ,  $M_2(-1;-1)$ ,  $M_3(1;3)$ ,  $M_4(2;5)$  là bốn điểm cần tìm.

**Thí dụ 3:**

Cho đường cong  $y = \frac{2x^2 + x + 1}{x + 1}$  (C). Tìm trên trục Oy các điểm có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến vuông góc với nhau.

**Giải**

Giả sử  $M(0;\alpha)$  là điểm cần tìm. Tiếp tuyến với (C) kẻ từ M có dạng:  $y = kx + \alpha$  (1)

Gọi  $x_0$  là hoành độ tiếp điểm, có hệ sau:

$$\begin{cases} \frac{2x_0^2 + x_0 + 1}{x_0 + 1} = kx_0 + \alpha & (1) \\ \frac{2x_0^2 + 4x_0}{(x_0 + 1)^2} = k & (2) \end{cases}$$

Thay (2) vào (1) (với điều kiện  $x_0 \neq -1$ ) rồi rút gọn, ta có

$$(\alpha + 1)x_0^2 + 2(\alpha - 1)x_0 + \alpha - 1 = 0 \quad (3).$$

Bài toán trở thành: Tìm  $\alpha$  để (3) có hai nghiệm phân biệt  $t_1, t_2 \neq -1$  thỏa mãn điều kiện

$$\frac{2t_1^2 + 4t_1}{(t_1 + 1)^2} \cdot \frac{2t_2^2 + 4t_2}{(t_2 + 1)^2} = -1 \quad (4).$$

$$\text{Ta có (4)} \Leftrightarrow \frac{4(t_1 t_2)^2 + 8t_1 t_2(t_1 + t_2) + 16t_1 t_2}{[t_1 t_2 + (t_1 + t_2) + 1]^2} = -1 \quad (5).$$

Thay  $t_1 + t_2 = \frac{2(1-\alpha)}{\alpha+1}$ ;  $t_1 t_2 = \frac{\alpha-1}{\alpha+1}$  vào (5) rồi rút gọn ta có:

$$\alpha^2 + 6\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -3 \pm \sqrt{15} \quad (6)$$

(Chú ý rằng khi thỏa mãn (6) thì  $\alpha + 1 \neq 0$ , và  $\Delta' = -2(\alpha - 1) > 0$ )

Vậy trên đoạn Oy có hai điểm cần tìm  $M_1(0; -3 + \sqrt{15})$  và  $M_2(0; -3 - \sqrt{15})$ .

## §2. CỰC TRỊ CỦA HÀM PHÂN THỨC

Với lớp hàm phân thức  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$  ta luôn sử dụng hai kết quả sau:

1/ Với lớp hàm  $y = \frac{ax^2 + bx + c}{a'x + b'}$  ( $a \neq 0, a' \neq 0$ ) có cực đại, cực tiểu khi và chỉ

khi phương trình  $y' = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác  $-\frac{b'}{a'}$ .

2/ Giả sử  $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$  có cực trị tại  $x = x_0$  khi đó ta có:  $y(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)}$ .

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + 2(m+1)x + m^2 + 4m}{x+2}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu cùng với gốc tọa độ  $O$  tạo thành tam giác vuông tại  $O$ .

**Giải**

Đường cong ( $C_m$ ) có cực trị khi và chỉ khi phương trình

$$y' = \frac{x^2 + 4x - m^2 + 4}{(x+2)^2} = 0 \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt khác } -2. \text{ Điều này xảy}$$

$$\text{ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} \Delta' > 0 \\ 4 - 8 - m^2 + 4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m^2 > 0 \\ m^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \neq 0 \quad (2).$$

Khi thỏa mãn (2), ( $C_m$ ) có cực trị tại hai điểm  $A(-2-m; -2)$ ;  $B(-2+m; 4m-2)$ .

Vì thế  $OAB$  là tam giác vuông khi:

$$OA^2 + OB^2 = AB^2 \Leftrightarrow (2+m)^2 + 4 + (m-2)^2 + (4m-2)^2 = (2m)^2 + (4m)^2 \\ \Leftrightarrow m^2 + 8m - 8 = 0 \Leftrightarrow m = -4 \pm 2\sqrt{6} \quad (3).$$

Rõ ràng (3) thỏa mãn (2), nên là các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2005)**

Gọi ( $C_m$ ) là đồ thị của hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x + m+1}{x+1}$ . Chứng minh rằng với  $m$  bất kì, đồ thị ( $C_m$ ) luôn luôn có điểm cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa hai điểm đó bằng  $\sqrt{20}$ .

**Giải**

Ta có  $y' = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$  và có bảng biến thiên sau:

x	$-\infty$	$-2$	$-1$	$0$	$+\infty$					
y'		+	0	-	-	0	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	$m-3$	$\searrow$	$-\infty$	$+\infty$	$\nearrow$	$m+1$	$\searrow$	$+\infty$

Vậy với mọi  $m$ ,  $(C_m)$  luôn có cực đại  $A(-2; m-3)$  và cực tiểu tại  $B(0; m+1)$ .

Ta có  $AB = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \Rightarrow đpcm$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**

Gọi  $(C_m)$  là đồ thị hàm số  $y = mx + \frac{1}{x}$ . Tìm  $m$  để hàm số có cực trị và khoảng

cách từ điểm cực tiểu của  $(C_m)$  đến tiệm cận xiên của  $(C_m)$  bằng  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

**Giải**

Ta có  $y' = 0 \Leftrightarrow \frac{mx^2 - 1}{x^2} = 0$ .

Vậy  $(C_m)$  có cực trị khi và chỉ khi phương trình  $mx^2 - 1 = 0$  có hai nghiệm phân biệt khác 0, tức là khi và chỉ khi  $m > 0$ .

Lúc đó ta có bảng biến thiên sau:

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{\sqrt{m}}$	$0$	$\frac{1}{\sqrt{m}}$	$+\infty$
$y'$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
	$-\infty$	$\nearrow$	$\searrow$	$+\infty$	$\nearrow$
			$-\infty$		$+\infty$

Như thế  $m > 0$ , hàm số có cực tiểu tại điểm  $A\left(\frac{1}{\sqrt{m}}; 2\sqrt{m}\right)$ .

Để thấy  $\Delta: y = mx \Leftrightarrow mx - y = 0$  là tiệm cận xiên của  $(C_m)$ . Từ đó:

$$d(A, \Delta) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\left|m \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} - 2\sqrt{m}\right|}{\sqrt{m^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

Rõ ràng  $m = 1$  thỏa mãn điều kiện  $m > 0$  nên là giá trị cần tìm của  $m$ .

**Thí dụ 4:**

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + mx}{1-x}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để hàm số có cực đại, cực tiểu và khoảng cách giữa chúng bằng 10.

**Giải**

Ta có  $y' = \frac{-x^2 + 3x + m}{(1-x)^2}$ . Lập luận như các thí dụ trên ta thấy  $(C_m)$  có cực trị

khi và chỉ khi  $m > -1$

(1).

Khi thỏa mãn (1) thì  $(C_m)$  đạt cực trị tại  $x_1, x_2$ , ở đây  $x_1$  và  $x_2$  là hai nghiệm của phương trình:  $-x^2 + 2x + m = 0$

(2)

Áp dụng công thức tính giá trị cực đại và cực tiểu với hàm phân thức, ta có:

$$y_1 = y(x_1) = 2x_1 + m; \quad y_2 = y(x_2) = 2x_2 + m.$$

Ta có :

$$AB = 10 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = 100$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 20 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 20 \quad (3).$$

Áp dụng định lí Viet ta có  $x_1 + x_2 = 2$ ;  $x_1x_2 = -m$

Thay vào (3) ta được  $4m + 4 = 20 \Leftrightarrow m = 4$  . (4).

Rõ ràng (4) thỏa mãn (1), nên  $m = 4$  là giá trị duy nhất cần tìm của  $m$ .

**Thí dụ 5:**

Cho hàm số  $y = \frac{x^2 + (m+1)x - m + 1}{x - m}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) có cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía của trục Ox.

**Giải**

Ta có:  $y' = \frac{x^2 - 2mx - (m^2 + 1)}{(x - m)^2}$ .

Làm như các thí dụ trên, suy ra ( $C_m$ ) có cực đại, cực tiểu với mọi  $m$ .

Khi đó ( $C_m$ ) đạt cực trị tại  $x_1, x_2$ , trong đó  $x_1, x_2$  là các nghiệm của

$$x^2 - 2mx - (m^2 + 1) = 0 \quad (1)$$

Cực đại, cực tiểu nằm về cùng một phía của trục Ox, nếu như:

$$y(x_1) \cdot y(x_2) > 0 \Leftrightarrow [2x_1 + (m+1)][2x_2 + (m+1)] > 0$$

$$\Leftrightarrow 4x_1x_2 + 2(m+1)(x_1 + x_2) + (m+1)^2 > 0 \quad (2).$$

Áp dụng định lí Viet, ta có  $x_1 + x_2 = 2m$ ;  $x_1x_2 = -m^2 - 1$ .

Thay vào (2) và có  $m^2 + 6m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > -3 + 2\sqrt{3} \\ m < -3 - 2\sqrt{3}. \end{cases}$

**Nhận xét:**

1/ Nếu đòi hỏi cực đại, cực tiểu nằm về hai phía của trục tung thì điều kiện là  $x_1 < 0 < x_2$ .

2/ Trong các thí dụ 3, 4, việc tính giá trị cực đại cực tiểu  $y(x_1), y(x_2)$  là khó khăn (không như các thí dụ 1, 2) vì thế ta áp dụng công thức

$$y(x_0) = \frac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \frac{P'(x_0)}{Q'(x_0)} \text{ đã trình bày ở phần mở đầu.}$$

**Thí dụ 6:**

Tìm  $m$  để đường cong  $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$  ( $C_m$ ) có cực đại, cực tiểu tại  $x_1, x_2$  sao cho  $|y(x_2) - y(x_1)| > 16$ .

**Giải**

Ta có  $y' = \frac{2x^2 - 4mx + 2m}{(x - m)^2}$ .

Dễ thấy ( $C_m$ ) có cực trị tại  $x_1, x_2$  khi  $m < 0$  hoặc  $m > 1$  (1).

Khi đó ( $C_m$ ) đạt cực trị tại  $x_1, x_2$ , ở đây  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình

$$x^2 - 2mx + m = 0. \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } |y(x_1) - y(x_2)| > 16 &\Leftrightarrow |4x_1 - 3 - 4x_2 + 3| > 16 \Leftrightarrow |x_1 - x_2| > 4 \\ &\Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 16 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 > 16 \end{aligned} \quad (3)$$

Áp dụng định lí Viet với (2), ta có  $x_1 + x_2 = 2m$ ;  $x_1x_2 = m$ .

$$\text{Thay vào (3) và có } m^2 - m - 4 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m < 1 - \sqrt{17} \\ m > 1 + \sqrt{17}. \end{cases} \quad (4)$$

Rõ ràng (4) thỏa mãn (1), nên là các giá trị cần tìm của  $m$ .

### §3. BÀI TOÁN VỀ SỰ TƯƠNG GIAO CỦA ĐỒ THỊ HÀM PHÂN THỨC

Phương pháp giải như phương pháp đã sử dụng trong tiết §3 – bài giảng 16.

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1 (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004)**

Cho đường cong  $y = \frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để đường thẳng  $y = m$  cắt ( $C$ )

tại hai điểm A, B sao cho  $AB = 1$ .

**Giải**

Trước hết tìm điều kiện để  $y = m$  và ( $C$ ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt.

Điều này xảy ra khi phương trình

$$\frac{-x^2 + 3x - 3}{2(x - 1)} = m \quad (1) \text{ có hai nghiệm phân biệt } \neq 1. \text{ Ta thấy}$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x^2 + (2m - 3)x + 3 - 2m = 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

Vậy để  $y = m$  và ( $C_m$ ) cắt nhau tại hai điểm phân biệt ta cần có

$$\begin{cases} \Delta = 4m^2 - 4m - 3 > 0 \\ f(1) = 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 4m^2 - 4m - 3 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{3}{2} \\ m < -\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2)$$

Khi thỏa mãn (2),  $y = m$  và ( $C_m$ ) cắt nhau tại A, B có hoành độ tương ứng là  $x_1, x_2$ , ở đây  $x_1, x_2$  là hai nghiệm của phương trình:

$$x^2 + (2m - 3)x + 3 - 2m = 0. \quad (3)$$

Vì A, B nằm trên đường thẳng  $y = m$ , nên

$$AB = 1 \Leftrightarrow |x_2 - x_1| = 1 \Leftrightarrow (x_2 - x_1)^2 = 1 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = 1$$

$$\Leftrightarrow m^2 - m - 1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \quad (4)$$

Để thấy (4) thỏa mãn (2), nên là các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Chú ý:** Ta có bài toán hoàn toàn tương tự (**Đề thi Đại học khối B-2009**)

Tìm m để đường thẳng  $y = -x + m$  và đường cong  $y = \frac{x^2 - 1}{x}$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B sao cho  $AB = 4$ .

Giải hoàn toàn tương tự. Đáp số  $m = \pm 2\sqrt{6}$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A-2003)**

Cho đường cong  $y = \frac{mx^2 + x + m}{x - 1}$  ( $C_m$ ). Tìm m để ( $C_m$ ) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương.

**Giải**

( $C_m$ ) cắt trục hoành tại hai điểm phân biệt có hoành độ dương khi và chỉ khi phương trình:

$$\frac{mx^2 + x + m}{x - 1} = 0$$

có hai nghiệm phân biệt. Điều này xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{cases} \Delta = 1 - 4m^2 > 0 \\ P = 1 > 0 \\ S = \frac{-1}{m} > 0 \\ 2m + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} < m < 0.$$

**Chú ý:** Bài toán tương tự (**Đề thi tuyển sinh đại học khối D-2003**) có dạng sau.

Tìm m để đường thẳng  $y = mx + 2 - 2m$  cắt đồ thị  $y = \frac{x^2 - 2x + 4}{x - 2}$  tại hai điểm phân biệt.

Với lời giải hoàn toàn tương tự, ta có đáp số:  $m > 1$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D-2009)**

Tìm m để đường thẳng  $y = -2x + m$  cắt đường cong  $y = \frac{x^2 + x - 1}{x}$  ( $C$ ) tại hai điểm phân biệt A, B sao cho trung điểm của AB nằm trên trục tung.

**Giải**

Đường cong ( $C_m$ ) và đường thẳng đã cho cắt nhau tại hai điểm phân biệt A, B điều kiện cần và đủ là phương trình:  $-2x + m = \frac{x^2 + x - 1}{x}$  (1)

phải có hai nghiệm phân biệt. Do khi  $x = 0$ , thì  $x^2 + x - 1 \neq 0$  nên

$$(1) \Leftrightarrow x(-2x + m) = x^2 + x - 1 \Leftrightarrow 3x^2 + (1 - m)x - 1 = 0 \quad (2)$$

Vì  $\frac{c}{a} = \frac{-1}{3} < 0$ , nên với mọi m thì (2) luôn có hai nghiệm phân biệt.

Để trung điểm I của A, B nằm trên trục tung cần có  $x_I = 0$ . Ta có:

$$x_I = 0 \Leftrightarrow \frac{x_A + x_B}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{m - 1}{6} \Leftrightarrow m = 1.$$

**Thí dụ 4:**

Cho đường cong  $y = \frac{2x^2 - 3x}{x - 2}$  (C) và đường thẳng  $d_m: y = 2mx - m$ . Tìm m để (C) và  $(d_m)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (C).

**Giải**

Ta nhận thấy  $x = 2$  là tiệm cận đứng của (C) và (C) gồm hai nhánh, mỗi nhánh nằm về một phía của đường thẳng  $x = 2$ .

Vì thế (C) và  $(d_m)$  cắt nhau tại hai điểm phân biệt thuộc hai nhánh khác nhau của (C) khi và chỉ khi phương trình

$$\frac{2x^2 - 3x}{x - 2} = 2mx - m \quad (1)$$

có hai nghiệm phân biệt  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 < 2 < x_2$ .

Vì  $x = 2$  không phải là nghiệm của  $2x^2 - 3x$ , nên

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow 2x^2 - 3x = (x - 2)(2mx - m) \\ &\Leftrightarrow 2(m - 1)x^2 + (3 - 5m)x + 2m = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Bài toán trở thành: Tìm m để (2) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho  $x_1 < 2 < x_2$ . Điều này xảy ra khi và chỉ khi:

$$\begin{cases} m - 1 \neq 0 \\ \Delta = 17m^2 - 22m + 9 > 0 \\ (x_2 - 2)(x_1 - 2) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ 17m^2 - 22m + 9 > 0 \\ x_1 x_2 - 2(x_1 + x_2) + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \neq 1 \\ \frac{m}{m-1} - \frac{5m-3}{m-1} + 4 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow m > 1.$$

Vậy  $m > 1$  là các giá trị cần tìm của tham số m.

**Thí dụ 5:**

Tìm m để cho đường thẳng  $d_m: 2x + m$  cắt đồ thị (C)  $y = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$  tại hai điểm phân biệt A, B sao cho AB có độ dài nhỏ nhất.

**Giải**

Ta có:  $2x + m = -x + 3 + \frac{3}{x-1}$  (1)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ \end{cases} \quad (2)$$

$$3x^2 + (m-6)x - m = 0. \quad (3)$$

Do  $\Delta = m^2 + 36 > 0$  và VT (3)  $\neq 0$  khi  $x = 1 \quad \forall m$ , nên với mọi m,  $d_m$  và (C) cắt nhau tại hai điểm phân biệt:

$$A(x_1; 2x_1 + m) \text{ và } B(x_2; 2x_2 + m).$$

$$\text{Ta có } AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (2x_2 - 2x_1)^2 = 5[(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2] = \frac{5}{9}(36 + m^2). \quad (4)$$

Từ (4) suy ra AB nhỏ nhất khi  $m = 0$ .



## §4. BÀI TOÁN TIỆM CẬN VỚI HÀM PHÂN THỨC

Trong mục này cần lưu ý hai điều sau đây:

1/ Nếu hàm phân thức không có tham số thì việc xác định các đường tiệm cận của các hàm số này là đơn giản, vì ta đã biết rõ quy tắc cách xác định các đường tiệm cận của nó (xem sách giáo khoa Giải tích 12).

2/ Nếu hàm phân thức có tham số, thí dụ:

$$y = \frac{2x-2}{x-m} \text{ hay } y = \frac{mx^2+2x-1}{x-2},$$

thì trước hết phải xem chúng có thỏa mãn điều kiện từ số và mẫu số có phải là không có nhân tử chung hay không. Rồi sau đó mới xem đến ứng với các giá trị đó thì phân thức có dạng gì, từ đó xác định đường tiệm cận của chúng theo các quy tắc đã học.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**

Cho đường cong  $y = \frac{mx^2 + (3m^2 - 2)x - 2}{x + 3m}$ .

Tìm  $m$  để góc giữa hai đường tiệm cận bằng  $45^\circ$ .

**Giải**

Viết lại (C) dưới dạng:  $y = mx - 2 + \frac{6m-2}{x+3m}$  (1)

Từ (1) suy ra cần xét các khả năng sau:

– Nếu  $m = \frac{1}{3}$  khi đó từ (1) có  $y = \frac{1}{3}x - 2$  với  $x \neq -1$ . Trường hợp này (C) không có tiệm cận.

$2/ m \neq \frac{1}{3}$  khi đó từ (1) suy ra:

+ (C) có tiệm cận đứng  $x = -3m$

+ (C) có tiệm cận xiên  $y = mx - 2$  (khi  $m = 0$ , thì có tiệm cận ngang  $y = -2$ )

Đoạn thẳng  $x = -3m$  vuông góc với trục hoành, nên  $y = mx - 2$  tạo với tiệm cận đứng một góc  $45^\circ$  khi và chỉ khi nó tạo với chiều dương của trục hoành một

góc bằng  $45^\circ$  hoặc  $135^\circ$ , tức là khi  $\begin{cases} m = \tan 45^\circ \\ m = \tan 135^\circ \end{cases} \Leftrightarrow m = \pm 1$ .

**Thí dụ 2:**

Cho đường cong  $y = \frac{2x^2 - 3x + m}{x - m}$  ( $C_m$ ). Tìm các tiệm cận của ( $C_m$ ) khi  $m$  thay đổi.

**Giải**

Viết lại ( $C_m$ ) dưới dạng:  $y = 2x + 2m - 3 + \frac{2m^2 - 2m}{x - m}$  (1).

Ta có  $2m^2 + 2m - 3 = 0 \Leftrightarrow m = 0$  hoặc  $m = 1$ . Vì thế từ (1) suy ra:

1/ Nếu  $m = 0$ , thì  $y = 2x - 3$  với  $x \neq 0$  ( $C_0$ ) không có tiệm cận.

2/ Nếu  $m = 1$ , thì  $y = 2x - 1$ , với  $x \neq 1$  ( $C_1$ ) không có tiệm cận.

3/ Nếu  $m \neq 0, m \neq 1$ , thì ( $C_m$ ) có tiệm cận đứng  $x = m$  và tiệm cận xiên  $y = 2x + 2m - 3$ .

**Thí dụ 3:**

Cho  $y = \frac{2x^2 + mx - 2}{x - 1}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để tiệm cận xiên của ( $C_m$ ) tạo với hệ trục tọa độ một tam giác có diện tích bằng 4.

**Giải**

Ta có: ( $C_m$ ):  $y = 2x + m + 2 + \frac{m}{x - 1}$  (1).

Vậy từ (1) suy ra ( $C_m$ ) có tiệm cận xiên  $y = 2x + m + 2$  khi  $m \neq 0$ . Tiệm cận xiên này cắt trục hoành tại  $A\left(\frac{-m-2}{2}; 0\right)$  và trục tung tại  $(0; m+2)$ . Vì thế:

$$S_{OAB} = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}OA \cdot OB = 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \frac{|-m-2|}{2} \cdot |m+2| = 4 \Leftrightarrow |m+2| = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ m = -6. \end{cases}$$

**Thí dụ 4:**

Cho đường cong  $y = \frac{x^2 + 2x - 2}{x - 1}$  (C). Tìm điểm  $M \in (C)$  sao cho khoảng cách từ M đến giao điểm hai đường tiệm cận là nhỏ nhất.

**Giải**

Dễ thấy  $x = 1$  và  $y = x + 3$  tương ứng là tiệm cận đứng và tiệm cận xiên, do đó  $I(1; 4)$  là giao điểm của hai đường tiệm cận.

Điểm  $M\left(x; x + 3 + \frac{1}{x - 1}\right) \in (C)$  nên

$$MI = \sqrt{(x - 1)^2 + \left(x - 1 + \frac{1}{x - 1}\right)^2} = \sqrt{2t^2 + \frac{1}{t^2} + 2}, \text{ với } t = x - 1$$

Từ đó ta có  $MI \geq \sqrt{2 + 2\sqrt{2}}$ .

Vậy MI nhận giá trị nhỏ nhất  $= \sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \Leftrightarrow 2t^2 = \frac{1}{t^2}$ .

$$\Leftrightarrow x - 1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}} \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2}}}.$$

Vì thế trên (C) có hai điểm cần tìm với hoành độ  $x = 1 \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$ .

## BÀI TẬP TỰ GIẢI

### Bài 1:

Cho  $y = \frac{x^2 + x + 2}{x - 1}$  (C). Tìm  $M \in (C)$  sao cho tiếp tuyến tại  $M$  vuông góc với đường thẳng qua  $M$  và tâm đối xứng của (C).

Đáp số:  $M_1, M_2 \in (C)$  với hoành độ tương ứng  $x_1 = 1 + \sqrt[4]{8}$  và  $x_2 = 1 - \sqrt[4]{8}$ .

### Bài 2:

Cho đường cong  $y = \frac{-4x + 3}{2x - 1}$  (C) và điểm  $A(0; 1)$ . Viết phương trình tiếp tuyến với (C), biết rằng tiếp tuyến đi qua A.

Đáp số:  $y = -2x + 1$  và  $y = -18x + 1$ .

**Bài 3:** Cho  $y = \frac{2x^2 - x + 1}{x - 1}$  (C).

1/ Chứng minh rằng  $y = 7$  là một tiếp tuyến của (C).

2/ Chứng minh rằng trên đường thẳng  $y = 7$  có bốn điểm sao cho từ mỗi điểm trên đó, có thể kẻ đến (C) hai tiếp tuyến lập với nhau góc  $45^\circ$ .

### Bài 4:

Cho  $\frac{x^2 + x + m}{x + 1}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để hàm số có hai cực trị nằm về hai phía đối với trục Oy.

Đáp số:  $m > 1$ .

### Bài 5:

Cho  $y = \frac{x^2 + 2mx + 2}{x + 1}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) có cực trị và khoảng cách từ hai điểm cực trị đến đường thẳng  $x + y + 2 = 0$  là bằng nhau.

Đáp số:  $m = \frac{1}{2}$ .

### Bài 6:

Tìm  $m$  để đường thẳng ( $d_m$ ):  $y = mx + 2 - m$  cắt đồ thị (C):  $y = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 2}$  tại hai điểm phân biệt thuộc cùng một nhánh của (C).

Đáp số:  $m < \frac{3}{2}$  và  $m \neq 1$ .

### Bài 7:

Cho  $y = \frac{mx^2 + 2mx - 1}{x - 2}$  ( $C_m$ ). Tìm  $m$  để ( $C_m$ ) có tiệm cận xiên và khoảng cách từ  $A(-4; \sqrt{|m|})$  đến nó là lớn nhất.

Đáp số:  $m = \pm 1$ .

## Bài giảng số 18

# PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Cũng giống như các bài toán về hàm số, các bài toán về phương trình lượng giác là một câu hỏi bắt buộc có mặt trong mọi đề thi về môn Toán vào các trường Đại học, Cao đẳng các năm 2002–2009.

Bài giảng này đề cập đến các phương pháp giải phương trình lượng giác tùy theo dạng của chúng.

Lược đồ chung để giải các phương trình lượng giác được tiến hành như sau:

1/ Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Ngoài các điều kiện thông thường như đối với mọi phương trình khác (thí dụ như điều kiện về mẫu số, các biểu thức trong căn của các căn bậc chẵn có mặt trong phương trình...), riêng đối với phương trình lượng giác cần chú ý đặc biệt đến các điều kiện sau:

+ Để  $\tan x$  có nghĩa, điều kiện là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

+ Để  $\cot x$  có nghĩa, điều kiện là  $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

2/ Giải phương trình bằng các lược đồ quen thuộc.

3/ So sánh nghiệm tìm được với điều kiện đặt ra để loại bỏ đi các nghiệm ngoài lai.

## §1. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT ĐỐI VỚI $\sin x$ VÀ $\cos x$

**1. Dạng phương trình:**  $a \sin x + b \cos x = 2$  ( $a, b \neq 0$ )

**2. Điều kiện có nghiệm:** Phương trình có nghiệm khi và chỉ khi  $a^2 + b^2 \geq c^2$ .

**3. Cách giải:** Có hai cách giải phương trình này:

*Phương pháp 1:* Đưa phương trình về dạng:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } \cos \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \sin \varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \sin(x + \varphi) = \sin \alpha$ .

*Phương pháp 2:* Xét hai khả năng sau:

+ Nếu  $b + c = 0 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} = 0$  thỏa mãn phương trình

$$\Rightarrow x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ thuộc vào tập hợp nghiệm.}$$

+ Nếu  $b + c \neq 0 \Rightarrow \cos \frac{x}{2} \neq 0$ , khi đó đặt  $\tan \frac{x}{2} = t$ .

Áp dụng công thức  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ ,  $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ , ta quy phương trình đã cho về phương trình bậc 2 đối với  $t$ , sau đó giải  $\tan \frac{x}{2} = t$

*Chú ý:*

Khi sử dụng phương pháp này người ta thường hay quên xét khả năng  $\cos \frac{x}{2} = 0$ , mà đặt ngay  $\tan \frac{x}{2} = t$ , khi đó sẽ dẫn đến khả năng có thể mất nghiệm của phương trình.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)**

Giải phương trình lượng giác:  $(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2})^2 + \sqrt{3} \cos x = 2$  (1).

**Giải**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow 1 + \sin x + \sqrt{3} \cos x = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos x = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow \sin \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \sin \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)**

Giải phương trình lượng giác:

$$\frac{(1 - 2\sin x) \cos x}{(1 + 2\sin x)(1 - \sin x)} = \sqrt{3} \quad (1).$$

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $\sin x \neq 1$  và  $\sin x \neq \frac{1}{2}$  (2).

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \cos x - \sqrt{3} \sin x = \sin 2x + \sqrt{3} \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{3} = \pm \left( 2x - \frac{\pi}{6} \right) + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Đề ý rằng nghiệm  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$  bị loại (vì không thỏa mãn (2)), và rõ ràng

$$x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \text{ thỏa mãn (2) nên nghiệm của (1) là } x = -\frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Nhận xét:**

Mặc dù ở đây (1) không có dạng  $a\sin x + b\cos x = c$ , nhưng thực chất cách giải (3) là sử dụng phương pháp của cách giải phương trình  $a\sin x + b\cos x = c$ , nên ta sắp xếp nó vào dạng này.

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Giải phương trình lượng giác:

$$\sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2(\cos 4x + \sin^3 x) \quad (1).$$

**Giải**

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \sin x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x - 2\sin^3 x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x(1 - 2\sin^2 x) + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin x \cos 2x + \cos x \sin 2x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \sin 3x + \sqrt{3}\cos 3x = 2\cos 4x \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 3x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 3x = \cos 4x$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos 4x \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{6} = \pm 4x + k2\pi$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{42} + k\frac{2\pi}{7} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Giải phương trình:  $\sqrt{3}\cos 5x - 2\sin 3x \cos 2x - \sin x = 0 \quad (1).$

**Giải**

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \sqrt{3}\cos 5x - (\sin 5x + \sin x) - \sin x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 5x - \frac{1}{2}\sin 5x = \sin x \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} - 5x\right) = \sin x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{18} + k\frac{\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + k\frac{\pi}{2} \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

**Thí dụ 5:**

Giải phương trình  $4(\sin^4 x + \cos^4 x) + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \quad (1)$

**Giải**

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow 4\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x\right) + \sqrt{3}\sin 4x = 2$

$$\Leftrightarrow 4 - 2\frac{1 + \cos 4x}{2} + \sqrt{3}\sin 4x = 2 \Leftrightarrow \sqrt{3}\sin 4x + \cos 4x = -1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x + \frac{1}{2}\cos 4x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{12} + k\frac{\pi}{2}, \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 6:** Giải phương trình:  $2\sqrt{2}(\sin x + \cos x)\cos x = 3 + \cos 2x$  (1).

**Giải**

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + \sqrt{2}(1 + \cos 2x) = 3 + \cos 2x$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\sin 2x + (\sqrt{2} - 1)\cos 2x = 3 - \sqrt{2}$$

Ta có:  $(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2} - 1)^2 = 5 - 2\sqrt{2} < 11 - 6\sqrt{2} = (3 - \sqrt{2})^2$ .

Vậy (1) vô nghiệm (vì vi phạm điều kiện  $a^2 + b^2 \geq c^2$ )

**Thí dụ 7:** Giải phương trình:  $x + \sqrt{13 - x^2} + x\sqrt{13 - x^2} = 11$ .

**Giải**

+ Nếu  $\cos \frac{x}{2} = 0$  thì  $\sin x = 0$  và  $\cos x = 2\cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1$ , khi đó không thỏa mãn phương trình.

Vậy  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ .

+ Vì  $\cos \frac{x}{2} \neq 0$ , đặt  $t = \tan \frac{x}{2}$ , từ đó

$$(1) \Leftrightarrow (1 + \sqrt{3})\frac{2t}{1 + t^2} + (1 - \sqrt{3})\frac{1 - t^2}{1 + t^2} = 2$$

$$\Leftrightarrow (3 + \sqrt{3})t^2 - 2(1 + \sqrt{3})t + 1 + \sqrt{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ t = -\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \frac{x}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \tan \frac{x}{2} = -\frac{1 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{5\pi}{6} + k2\pi \end{cases}, (k \in \mathbb{Z})$$

**Nhận xét:** Nếu dùng phương pháp 1/, sau khi biến đổi

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \sin x + \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (2)$$

Việc giải (2) bằng phương pháp 1 về nguyên tắc thì làm được, nhưng để ra đáp số như trên thì rất khó khăn. Vậy với thí dụ này, phương pháp 2 là thích hợp.

**Thí dụ 8:**

Tìm  $m$  để phương trình:  $2\sin x + m\cos x = 1 - m$  có nghiệm thuộc  $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ .

**Giải**

Lập luận như thí dụ 7, thì  $\cos \frac{x}{2} \neq 0 \quad \forall m$ , vì thế đặt  $t = \tan \frac{x}{2}$  thì phương trình đã cho có dạng (sau khi biến đổi):

$$f(t) = t^2 - 4t + 1 = 2m \quad (1)$$

$$\text{Do } x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow -1 \leq t \leq 1 \quad (2)$$

Bài toán đã cho trở thành: Tìm  $m$  để hệ (1) (2) có nghiệm.

Ta có  $f'(t) = 2t - 4$  và có bảng biến thiên sau:

$t$	-1	1	2
$f'(t)$		-	0
$f(t)$	6	-2	

Từ đó suy ra (1) và (2) có nghiệm  $\Leftrightarrow -2 \leq 2m \leq 6 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 3$ .  
Đó là các giá trị cần tìm của  $m$ .

**Nhận xét:**

Với thí dụ này phương pháp 2 tỏ rõ hiệu lực hơn hẳn phương pháp 1.

Qua các thí dụ trên các bạn chắc đã tự rút ra kết luận khi nào nên sử dụng phương pháp 1, hoặc phương pháp 2.

## §2. PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP BẬC 2, BẬC 3 ĐỐI VỚI SINX VÀ COSX

### 1. Dạng phương trình

a/ Phương trình đẳng cấp bậc 2 đối với  $\sin x$  và  $\cos x$  có dạng  
 $a\sin^2 x + b\cos^2 x + c\sin x \cos x + d = 0$ .

b/ Phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với  $\sin x$  và  $\cos x$  có dạng  
 $a\sin^3 x + b\sin^2 x \cos x + c\sin x \cos^2 x + d\cos^3 x = 0$ .

Cùng với b/ ta xét phương trình đẳng cấp bậc 3 đối với  $\sin x$  và  $\cos x$  (dạng suy rộng) sau:  $a\sin^3 x + b\sin^2 x \cos x + c\sin x \cos^2 x + d\cos^3 x + (m\sin x + n\cos x) = 0$

### 2. Cách giải

- Kiểm tra  $\cos x = 0$  có phải là nghiệm hay không?
- Sau đó xét tiếp trường hợp  $\cos x \neq 0$ . Đặt  $\tan x = t$ .



Bằng cách chia cả hai vế của phương trình cho  $\cos^2 x$  với phương trình đẳng cấp bậc hai và cho  $\cos^3 x$  với phương trình đẳng cấp bậc 3, ta quy về phương trình bậc hai (hoặc bậc ba) đối với  $t$ . Tìm được  $t$ , ta giải tiếp phương trình cơ bản:  $\tan x = t$  ta sẽ đi đến nghiệm  $x$  cần tìm.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh khối B – 2009)**

Giải phương trình lượng giác:

$$\sin^3 x - \sqrt{3} \cos^3 x = \sin x \cos^2 x - \sqrt{3} \sin^2 x \cos x \quad (1).$$

**Giải**

Nếu  $\cos x = 0$  thì từ (1) ta có  $\sin^3 x = 0$  và đó là điều vô lý, nên  $\cos x \neq 0$ .

Do  $\cos x \neq 0$ , nên chia cả hai vế của (1) cho  $\cos^3 x$ , ta có

$$\tan^3 x - \sqrt{3} - \tan x + \sqrt{3} \tan^2 x = 0 \Leftrightarrow (\tan x + \sqrt{3})(\tan^2 x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = -\sqrt{3} \\ \tan x = 1 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{3} + k\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 2:**

$$\text{Giải phương trình } \sin^2 x (\tan x + 1) = 3 \sin x (\cos x - \sin x) + 3 \quad (1).$$

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (2).

Khi đó:

$$(1) \Leftrightarrow \sin^2 x (\sin x + \cos x) = 3 \sin x \cos x (\cos x - \sin x) + 3 \sin x \quad (3).$$

Do điều kiện (2) nên chia cả hai vế của (3) cho  $\cos^3 x$  và có

$$\tan^3 x + \tan^2 x - 3 \tan x + 3 \tan^2 x - 3(1 + \tan^2 x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x + 1)(\tan^2 x - 3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \\ x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \quad (4).$$

Rõ ràng (4) thỏa mãn (2), nên là nghiệm của (1).

**Thí dụ 3:**

$$\text{Giải phương trình: } 8 \cos^3 \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos 3x \quad (1).$$

**Giải**

$$\text{Ta có } \cos \left( x + \frac{\pi}{3} \right) = \cos x \cos \frac{\pi}{3} - \sin x \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x.$$

$$\text{Vậy (1)} \Leftrightarrow 8 \left( \frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \sin x \right)^3 = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin^3 x + \cos^3 x + \sqrt{3} \cos^2 x \sin x - 3 \cos x \sin^2 x - \cos x = 0 \quad (2)$$

Rõ ràng  $\cos x \neq 0$  (vì nếu  $\cos x = 0 \Rightarrow \sin x = 0$ : vô lí)

Vì thế chia cả hai vế của (2) cho  $\cos^3 x$  và có:

$$\sqrt{3} \tan^3 x + 1 + \sqrt{3} \tan x - 3 \tan^2 x - 1 - \tan^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \tan x (\sqrt{3} \tan^2 x - 4 \tan x + \sqrt{3}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \tan x = \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = \frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{3} + k\pi. \end{cases}$$

**Thí dụ 4:**

Giải phương trình:  $\sin x + \cos x - 4 \sin^3 x = 0 \quad (1)$ .

**Giải**

+ Nếu  $\cos x = 0$ , từ (1) ta có hệ:

$$\begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x - 4 \cos^3 x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0; \sin x = \pm 1 \end{cases}$$

Từ (2) (3) suy ra vô lí. Vậy  $\cos x \neq 0$

+ Do  $\cos x \neq 0$ , nên chia cả hai vế của (1) cho  $\cos^3 x$  và có

$$\tan x (1 + \tan^2 x) + 1 + \tan^2 x - 4 \tan^3 x = 0 \Leftrightarrow 3 \tan^3 x - \tan^2 x - \tan x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (\tan x - 1)(3 \tan^2 x + 2 \tan x + 1) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 5:**

Cho phương trình:  $\sin^2 x + (2m - 2) \sin x \cos x - (m + 1) \cos^2 x = m \quad (1)$

Tìm  $m$  để phương trình (1) có nghiệm

**Giải**

$$+ \text{ Nếu } \cos x = 0, \text{ thì từ (1) ta có: } \begin{cases} \cos x = 0 & (2) \\ \sin^2 x = m & (3) \end{cases}$$

Hệ (2) (3) có nghiệm  $\Leftrightarrow m = 1$ . Vậy  $m = 1$  là một giá trị cần tìm.

+ Nếu  $\cos x \neq 0$ . Khi đó chia cả hai vế của (1) cho  $\cos^2 x$  và

$$(1) \Leftrightarrow \tan^2 x + (2m - 2) \tan x - (m + 1) = m + m \tan^2 x$$

$$\Leftrightarrow (m - 1) \tan^2 x - 2(m - 1) \tan x + 2m + 1 = 0 \quad (2)$$

Dễ thấy  $\Delta' = -m^2 - m + 2$ , vậy  $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow -2 \leq m < 1$  (do  $m \neq 1$ ).

Kết hợp lại:  $-2 \leq m \leq 1$  là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

**Thí dụ 6:** Cho phương trình:  $m \cos^2 x - 4 \sin x \cos x + m - 2 = 0 \quad (1)$ . Tìm  $m$  để

(1) có nghiệm thuộc  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

### Giải

Khi  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ , thì  $\cos x > 0$  (nói riêng  $\cos x \neq 0$ ). Vì thế sau khi chia cả hai vế của (1) cho  $\cos^2 x$  và rút gọn, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow m(\tan^2 x + 2) = 2\tan^2 x + 4\tan x + 2 \Leftrightarrow \frac{2\tan^2 x + 4\tan x + 2}{\tan^2 x + 2} = m$$

Khi  $0 < x < \frac{\pi}{4}$ , thì  $0 < \tan x < 1$ . Vậy sau khi đặt  $t = \tan x$  bài toán trở thành:

Tìm  $m$  để hệ  $\begin{cases} f(t) = \frac{2t^2 + 4t + 2}{t^2 + 2} = m & (2) \\ 0 < t < 1 & (3) \end{cases}$  có nghiệm.

Ta có:  $f'(t) = \frac{-4(t^2 - t - 2)}{(t^2 + 2)^2}$  và có bảng biến thiên sau:

t	-1	0	1	2
f'(t)			+	
f(t)			$\frac{8}{3}$	

1  $\nearrow$

Vậy  $1 < m < \frac{8}{3}$  là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

## §3. PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG VỚI SIN X VÀ COS X

### 1. Dạng của phương trình

$$a(\sin x + \cos x)^k + b(\sin x \cos x)^m + c = 0 \quad (1)$$

$$\text{hoặc} \quad a(\sin x - \cos x)^k + b(\sin x \cos x)^m + c = 0 \quad (2).$$

### 2. Cách giải

– Với phương trình (1) dựa vào hệ thức:

$$\sin x \cos x = \frac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2},$$

sau đó dùng phép thay biến  $t = \sin x + \cos x$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ).

– Với phương trình (2) dựa vào hệ thức

$$\sin x \cos x = \frac{1 - (\sin x - \cos x)^2}{2},$$

sau đó dùng phép thay biến  $t = \sin x - \cos x$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ).

Như vậy ta đã quy được (1) (hoặc (2)) về dạng phương trình đại số của  $t$ . Sau đó giải phương trình  $\sin x + \cos x = t$  để suy ra đáp số cần tìm.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Giải phương trình:  $(1 + \sin^2 x)\cos x + (1 + \cos^2 x)\sin x = 1 + \sin 2x$  (1).

**Giải**

Ta có: (1)  $\Leftrightarrow \sin^2 x \cos x + \sin x \cos^2 x + \sin x + \cos x = (\sin x + \cos x)^2$

$$\Leftrightarrow (\sin x + \cos x)(\sin x \cos x + 1 - \sin x - \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0 & (2) \\ \sin x \cos x + 1 - (\sin x + \cos x) = 0 & (3) \end{cases}$$

Để thấy (2)  $\Leftrightarrow \sin x = -\cos x \Leftrightarrow \tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Đặt  $\sin x + \cos x = t$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq 2$ ), khi đó (2) có dạng

$$\frac{t^2 - 1}{2} + 1 - t = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow \sin x + \cos x = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vậy nghiệm của (1) là  $x = -\frac{\pi}{4} + k\pi; x = k2\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Thí dụ 2:**

Giải phương trình:  $1 + \sin^3 x + \cos^3 x = \frac{3}{2} \sin 2x$  (1).

**Giải**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x) = 3 \sin x \cos x$

$$\Leftrightarrow 1 + (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x) - 3 \sin x \cos x = 0 \quad (2)$$

Đặt  $t = \sin x \cos x$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ). Khi đó (2) có dạng

$$1 + t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) - 3\frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow t^3 + 3t^2 - 3t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 1)(t^2 + 2t - 5) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ t = -1 - \sqrt{6} < -\sqrt{2} \quad (\text{loại}) \\ t = -2 + \sqrt{6} > \sqrt{2} \quad (\text{loại}) \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos \frac{3\pi}{4} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 3:**

Giải phương trình  $1 + \tan x = 2\sqrt{2} \sin x$  (1).

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (2).

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow 1 + \frac{\sin x}{\cos x} = 2\sqrt{2} \sin x \Leftrightarrow \sin x + \cos x - 2\sqrt{2} \sin x \cos x$  (3)

Đặt  $t = \sin x + \cos x$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ). Khi đó (3) có dạng:

$$t - 2\sqrt{2} \frac{t^2 - 1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2} + t^2 - t - \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{2} \\ t = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

+ Nếu  $t = \sqrt{2}$ , ta có  $\sin x + \cos x = \sqrt{2} \Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

+ Nếu  $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ , ta có  $\sin x + \cos x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2} = \cos \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{11\pi}{12} + k2\pi \\ x = -\frac{5\pi}{12} + k2\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

Vậy phương trình có ba họ nghiệm như trên

**Thí dụ 4:**

Giải phương trình:  $|\sin x - \cos x| + 4\sin 2x = 1$  (1).

**Giải**

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ), khi đó (1) có dạng

$$|t| + 4(1 - t^2) = 1 \quad (2).$$

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq \sqrt{2} \\ 4t^2 - t - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -1 \end{cases} \Leftrightarrow |t| = 1 \Leftrightarrow |\sin x - \cos x| = 1 \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)^2 = 1$$

$$\begin{cases} -\sqrt{2} \leq t \leq 0 \\ 4t^2 + t - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 5:**

Cho phương trình  $\sin^3 x - \cos^3 x = m$  (1). Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm.

**Giải**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (\sin x - \cos x)(1 + \sin x \cos x) = m$  (2).

Đặt  $t = \sin x - \cos x$  ( $-\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$ ) khi đó (2) có dạng:

$$t \left( 1 + \frac{1-t^2}{2} \right) = m \Leftrightarrow -t^3 + 3t = 2m.$$

Bài toán trở thành: Tìm  $m$  để hệ:

$$\begin{cases} f(t) = -t^3 + 3t = 2m & (3) \\ -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2} & (4) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có  $f'(t) = -3t^2 + 3$  và có bảng biến thiên sau:

t	$-\sqrt{2}$	$-1$	$1$	$\sqrt{2}$		
f'(t)		-	0	+	0	-
		$-\sqrt{2}$	$-2$	$2$	$\sqrt{2}$	

Vậy (3) và (4) có nghiệm, tức là (1) có nghiệm khi và chỉ khi:  
 $-2 \leq 2m \leq 2 \Leftrightarrow -1 \leq m \leq 1.$

## §4. PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC SỬ DỤNG NHIỀU ĐẾN PHÉP BIẾN ĐỔI LƯỢNG GIÁC

Nhìn chung khi đứng trước một phương trình lượng giác đã cho, nếu như thấy phương trình ấy không thuộc vào các dạng cơ bản đã nêu trong các mục §1, §2, §3 ở trên, thì trước hết cần phải dùng các phép biến đổi lượng giác thông dụng (công thức cộng, công thức nhân, biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng, công thức hạ bậc...) để đưa phương trình ban đầu về các dạng cơ bản ở trên, hoặc đưa về phương trình tích mà mỗi thừa số có dạng phương trình cơ bản.

Đây là phương pháp phổ thông nhất và rất có hiệu quả để giải phương trình lượng giác.

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)**

Giải phương trình:  $2\sin x(1 + \cos 2x) + \sin 2x = 1 + 2\cos x$  (1).

**Giải**

Ta có (1)  $\Leftrightarrow 4\sin x \cos^2 x + 2\sin x \cos x - (1 + 2\cos x) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\sin x \cos x (1 + 2\cos x) - (1 + 2\cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\cos x + 1)(\sin 2x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -\frac{1}{2} \\ \sin 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm \frac{2\pi}{3} + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**Giải phương trình lượng giác:  $2\sin^2 2x + \sin 7x - 1 = \sin x$  (1).**Giải**Ta có (1)  $\Leftrightarrow (2\sin^2 2x - 1) + (\sin 7x - \sin x) = 0$ 

$$\Leftrightarrow -\cos 4x + 2\cos 4x \sin 3x = 0 \Leftrightarrow \cos 4x(2\sin 3x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos 4x = 0 \\ \sin 3x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{k\pi}{2} \\ x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**Giải phương trình:  $\frac{2(\sin^6 x + \cos^6 x) - \sin x \cos x}{\sqrt{2} - 2\sin x} = 0$  (1).**Giải**Để (1) có nghĩa cần có  $\sin x \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$  (2).

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 2\left(1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x\right) - \frac{1}{2}\sin 2x = 0$$

$$\Leftrightarrow 3\sin^2 2x + \sin 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = 1 \\ \sin 2x = -\frac{4}{3} \end{cases} \quad (\sin 2x = -\frac{4}{3} \text{ loại vì } |\sin 2x| \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad (3)$$

Kết hợp (2) và (3) suy ra  $x = \frac{5\pi}{4} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$  là nghiệm cần tìm.**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**Giải phương trình:  $\cos^2 3x \cos 2x - \cos^2 x = 0$  (1)**Giải**

Áp dụng công thức “hạ bậc”, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1 + \cos 6x}{2} \cos 2x - \frac{1 + \cos 2x}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos 6x \cos 2x = 1 \Leftrightarrow (4\cos^3 2x - 3\cos 2x) \cos 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 4\cos^4 2x - 3\cos^2 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos^2 2x = 1$$

$$\Leftrightarrow 1 + \cos 4x = 2 \Leftrightarrow \cos 4x = 1 \Leftrightarrow x = k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2003)**Giải phương trình:  $\sin^2\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \tan^2 x - \cos^2 \frac{x}{2} = 0$  (1).

### Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (2)

Áp dụng công thức “hạ bậc”, ta có:

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow \frac{1 - \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{2} \cdot \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} - \frac{1 + \cos x}{2} = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1 - \sin x)(1 - \cos x)(1 + \cos x) - \cos^2 x(1 + \cos x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow (1 + \cos x)(1 - \sin x)(\sin x + \cos x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = 1 \\ \sin x = 1 \\ \tan x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \quad (3), k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

Từ (2) và (3) suy ra:  $x = \pi + k2\pi; x = -\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

### **Thí dụ 6**

Giải phương trình:  $(1 - \tan x)(1 + \sin 2x) = 1 + \tan x$  (1)

### Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  (2)

$$\begin{aligned}
 \text{Khi đó (1)} &\Leftrightarrow (1 - \tan x) \left(1 + \frac{2 \tan x}{1 + \tan^2 x}\right) = 1 + \tan x \Leftrightarrow 2 \tan^2 x (1 + \tan x) = 0 \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 0 \\ \tan x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$

### **Thí dụ 7:**

Giải phương trình:  $2\sin 3x(1 - 4\sin^2 x) = 1$  (1).

### Giải

Để thấy  $\cos x = 0$  không thỏa mãn (1), từ đó

$$\begin{aligned}
 (1) &\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos x [1 - 4(1 - \cos^2 x)] = \cos x \Leftrightarrow 2\sin 3x (4\cos^3 x - 3\cos x) = \cos x \\
 &\Leftrightarrow 2\sin 3x \cos 3x = \cos x \Leftrightarrow \sin 6x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{14} + k\frac{2\pi}{7} \\ x = \frac{\pi}{10} = k\frac{2\pi}{5} \end{cases}, k \in \mathbb{Z}.
 \end{aligned}$$



## §5: NGHIỆM CỦA PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC THUỘC MỘT MIỀN CHO TRƯỚC

Bài toán đòi hỏi tìm nghiệm của phương trình lượng giác trong một miền cụ thể cho trước. Với các bài toán này, phương pháp giải được tiến hành theo các bước sau:

- 1/ Giải phương trình lượng giác như bình thường.
- 2/ Với nghiệm tìm được, để xác định số  $k$  trong công thức nghiệm ta phải giải một bất phương trình (tìm nghiệm nguyên).
- 3/ Thay giá trị  $k$  tìm được vào công thức nghiệm tìm được ở bước 1.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)**

Tìm nghiệm thuộc khoảng  $(0; 2\pi)$  của phương trình:

$$5\left(\sin x + \frac{\cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x}\right) = 3 + \cos 2x \quad (1).$$

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghiệm là  $\sin 2x \neq -\frac{1}{2} \quad (2).$

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow 5 \frac{\sin x + 2\sin 2x \sin x + \cos 3x + \sin 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos 2x$$

$$\Leftrightarrow 5 \frac{\sin x + \cos x - \cos 3x + \sin 3x + \cos 3x}{1 + 2\sin 2x} = 3 + \cos 2x \Leftrightarrow 5\cos x = 3 + 2\cos^2 x - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ (loại } \cos x = 2) \Leftrightarrow x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$+ \text{Ta có: } 0 < \frac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} < k < \frac{5}{6} \Leftrightarrow k = 0 \text{ (do } k \text{ nguyên).}$$

$$+ \text{Lại có } 0 < -\frac{\pi}{3} + k2\pi < 2\pi \Leftrightarrow \frac{1}{6} < k < \frac{7}{6} \Leftrightarrow k = 1 \text{ (do } k \text{ nguyên).}$$

Vậy  $x = \frac{\pi}{3}$  và  $x = \frac{5\pi}{3}$  là hai nghiệm thuộc  $(0; 2\pi)$  của (1).

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)**

Tìm nghiệm thuộc  $[0; 14]$  của phương trình  $\cos 3x - 4\cos 2x + 3\cos x - 4 = 0 \quad (1)$

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow 4\cos^3 x - 3\cos x - 4(2\cos^2 x - 1) + 3\cos x - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x (\cos x - 2) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

$$\text{Ta có } 0 \leq \frac{\pi}{2} + k\pi \leq 14 \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{2} + k \leq \frac{14}{\pi} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{14}{\pi} - \frac{1}{2} < 4.$$

Do  $k \in \mathbb{Z}$  nên  $k \in \{1, 2, 3, 0\}$ . Thay lại vào (2) và thấy trên  $[0; 14]$ , (1) có 4

$$\text{nghiệm sau: } x_1 = \frac{\pi}{2}; x_2 = \frac{3\pi}{2}; x_3 = \frac{5\pi}{2}; x_4 = \frac{7\pi}{2}.$$

**Thí dụ 3:** Cho phương trình  $\cos 2x - \tan^2 x = \frac{\cos^2 x - \cos^2 x - 1}{\cos^2 x}$  (1).

Tìm tổng các nghiệm của (1) trên  $[1; 70]$ .

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghiệm là  $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \cos 2x - \tan^2 x = 1 - \cos x - (1 + \tan^2 x)$

$$\Leftrightarrow \cos 2x = -\cos x \Leftrightarrow 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \quad (2)$$

Ta xem trên đoạn  $[1; 70]$  có bao nhiêu nghiệm dạng (2)

$$\text{Ta có: } 1 \leq \frac{\pi}{3} + k\frac{2\pi}{3} \leq 70 \Leftrightarrow \frac{3}{\pi} < 2k+1 < \frac{210}{\pi} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(\frac{3}{\pi} - 1\right) < k < \frac{1}{2}\left(\frac{210}{\pi} - 1\right)$$

Do  $k$  nguyên nên  $k = 0; 1; 2; 3; \dots; 32$ .

Vậy trên  $[1; 70]$  có 33 nghiệm dạng (2). Chúng lập thành một cấp số cộng với

$$u_1 = \frac{\pi}{3} \text{ và công sai } d = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{Vậy tổng } S \text{ các nghiệm này là: } S = \frac{[2u_1 + (n-1)d]n}{2} = 363\pi$$

$$(\text{ở đây } u_1 = \frac{\pi}{3}; d = \frac{2\pi}{3} \text{ và } n = 33).$$

**BÀI TẬP TỰ GIẢI**

**Bài 1:** Giải phương trình lượng giác:  $4\sin^3 x - 1 = 3\sin x - \sqrt{3} \cos 3x$ .

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{3}; x = \frac{\pi}{2} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 2:**

Giải phương trình lượng giác:  $2\sin 4x + 3\cos 2x + 16\sin^3 x \cos x - 5 = 0$ .

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ với } \cos \alpha = \frac{4}{5} \text{ và } \sin \alpha = \frac{3}{5}.$$

**Bài 3:**

Giải phương trình lượng giác:  $\sin 3x + (\sqrt{3} - 2)\cos 3x = 1$ .

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{6} + k\frac{2\pi}{3} \text{ và } x = \frac{2\pi}{9} + k\frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 4:** Giải phương trình lượng giác:  $4\sin^3 x + 3\cos^3 x - 3\sin x - \sin^2 x \cos x = 0$ .

$$\text{Đáp số: } x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

**Bài 5:**

Giải phương trình lượng giác:  $\sqrt{2} \sin^3 x \left( x + \frac{\pi}{4} \right) = 2 \sin x$ .

Đáp số:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 6:**

Giải phương trình lượng giác  $\sin x - \cos x + 7 \sin 2x = 1$ .

Đáp số:  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi; x = \frac{\pi}{4} - \alpha + k2\pi; x = \frac{5\pi}{4} + \alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ ,

ở đây  $\sin \alpha = \frac{3\sqrt{2}}{7}$ .

**Bài 7:**

Giải phương trình lượng giác  $\sin 2x + \sqrt{2} \sin \left( x - \frac{\pi}{4} \right) = 1$ .

Đáp số:  $x = \frac{\pi}{4} + k\pi; x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 8:**

Tìm m để phương trình:  $\sin 2x + 4(\cos x - \sin x) = m$  có nghiệm.

Đáp số:  $-4\sqrt{2} - 1 \leq m \leq 4\sqrt{2} - 1$ .

**Bài 9:**

Giải phương trình lượng giác:  $\cos 2x + 5 = 2(2 - \cos x)(\sin x - \cos x)$ .

Đáp số:  $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi; x = \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 10:**

Giải phương trình lượng giác:  $\sin^3 x + \cos^3 x = 2(\sin^5 x + \cos^5 x)$ .

Đáp số:  $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}; x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ .

**Bài 11:**

Giải phương trình lượng giác:  $2 \cos 2x - 8 \cos x + 7 = \frac{1}{\cos x}$ .

Đáp số:  $x = k2\pi; x = \pm \frac{\pi}{3} + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

**Bài 12:** Tìm nghiệm thuộc khoảng  $(-2; 4)$  của phương trình:

$$\sin x \cos 4x + 2 \sin^2 2x = 1 - 4 \sin^2 \left( \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right).$$

Đáp số:  $x = \frac{\pi}{2}$ .

# PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ

Bài giảng này đề cập đến một trong những nội dung chủ yếu được đề cập đến trong đề cương ôn luyện môn Toán vào các trường Đại học, Cao đẳng do Bộ Giáo dục và Đào tạo ban hành: Phương trình và bất phương trình Đại số. Các đề toán về loại này thường xuyên xuất hiện trong các đề thi tuyển sinh những năm 2002–2009.

Trong bài giảng này, chúng tôi trình bày các phương pháp cơ bản để giải phương trình và bất phương trình đại số.

## §1. HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CHỨA CĂN THỨC

### A. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐỐI XỨNG

Hệ phương trình đối xứng là hệ phương trình có tính chất: Nếu ta tráo đổi vai trò giữa các ẩn  $x, y, z, \dots$  của hệ thì hệ không thay đổi.

Để giải các hệ này người ta hay sử dụng định lý Viet đảo hoặc thực hiện các phép biến đổi tương đương để đưa về các hệ đơn giản hơn.

**Loại 1:** Sử dụng định lý Viet đảo giải các hệ đối xứng.

Để sử dụng được phương pháp này, người ta phải tính  $x+y$  và  $xy$ , sau đó sẽ sử dụng định lý Viet đảo. Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2007)

$$\text{Cho hệ phương trình: } \begin{cases} x + \frac{1}{x} + y + \frac{1}{y} = 5 & (1) \\ x^2 + \frac{1}{x^3} + y^3 + \frac{1}{y^3} = 15m - 10 & (2) \end{cases}$$

Tìm  $m$  để hệ có nghiệm.

**Giải**

$$\text{Đặt } u = x + \frac{1}{x}; v = y + \frac{1}{y}, \text{ khi đó } |u| \geq 2; |v| \geq 2.$$

$$\text{Lại có: } x^3 + \frac{1}{x^3} = \left(x + \frac{1}{x}\right)^3 - 3\left(x + \frac{1}{x}\right) = u^3 - 3v.$$

$$\text{Tương tự: } y^3 + \frac{1}{y^3} = v^3 - 3u.$$

$$\text{Vì thế hệ (1) (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ u^3 + v^3 - 3(u + v) = 15m - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 8 - m \\ |u| \geq 2, |v| \geq 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ (1) và (2) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình:

$$f(t) = t^2 - 5t + 8 - m = 0$$

có hai nghiệm thỏa mãn  $|t| \geq 2$ . Ta có  $f'(t) = 2t - 5$  và có bảng sau:

t	$-\infty$	-2	2	$\frac{5}{2}$	$+\infty$
$f'(t)$	-			0	+
	$+\infty$		2	$\frac{7}{4}$	$+\infty$

Vậy các giá trị cần tìm của m là  $m \geq 22$  hoặc  $\frac{7}{4} \leq m \leq 2$ .

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng Tài chính Kế toán - 2005)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x + y + xy = 3 & (1) \\ x^2y + xy^2 = 2 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} xy + (x + y) = 3 & (3) \\ xy(x + y) = 2 & (4) \end{cases}$

Theo định lí Viet đảo thì  $x + y$  và  $xy$  là hai nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 3t + 2 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = 2. \end{cases}$$

Từ đó suy ra (3) (4)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x + y = 1 & (5) \\ xy = 2 & (6) \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = 2 & (7) \\ xy = 1 & (8) \end{cases} \end{cases}$

Lại theo định lí Viet đảo từ (5) (6) suy ra  $x, y$  là các nghiệm của phương trình:  $t^2 - t + 2 = 0$  (9).

Do (9) vô nghiệm nên hệ (5) (6) vô nghiệm.

Từ (8) (9) suy ra  $x, y$  là các nghiệm của phương trình  $t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ .

Vậy hệ (7) (8) (tức là hệ (1) (2)) có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (1; 1)$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học Hải Phòng - 2006)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x + y = 8 & (1) \\ xy + x + y = 5 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} (x + y)^2 - 2xy + (x + y) = 8 & (3) \\ xy = 5 - (x + y) & (4) \end{cases}$

Thay (4) vào (3) và có:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)^2(x+4)^2 = m(x-2) \end{cases}$$

Vì thế suy ra: (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-6 & (5) \\ xy=11 & (6) \\ x+y=3 & (7) \\ xy=2 & (8) \end{cases}$

Lập luận như thí dụ 2 suy ra hệ (5) (6) vô nghiệm, còn hệ (7) (8) có nghiệm  $(x; y) = (1; 2)$  và  $(x; y) = (2; 1)$ . Đó cũng là nghiệm của hệ (1) (2).

**Thí dụ 4**

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} (x^2 + y^2)xy = 78 & (1) \\ x^4 + y^4 = 97 & (2) \end{cases}$

**Giải**

Ta có: (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{78}{x^2 + y^2} & (3) \\ (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = 97 & (4) \end{cases}$

Thay (3) vào (4) và có

$$(x^2 + y^2)^2 - 2 \frac{6084}{(x^2 + y^2)^2} = 97 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 - 97(x^2 + y^2)^2 - 12168 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 = 169 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 13.$$

Do đó: (1)(2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ xy = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 13 \\ xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ xy=6 \\ x+y=-5 \\ xy=6 \end{cases}$

Lập luận như trên suy ra hệ (1) (2) có 4 nghiệm sau:  $(3; 2); (2; 3); (-3; -2); (-2; -3)$

**Loại 2:** Dùng phép biến đổi tương đương quy hệ đối xứng về nhiều hệ đơn giản:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2003)**

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} 3y = \frac{y^2 + 2}{x^2} & (1) \\ 3x = \frac{x^2 + 2}{y^2} & (2) \end{cases}$

**Giải**

Từ (1) (2) suy ra  $x > 0, y > 0$ , do đó

$$\begin{aligned}
 (1)(2) &\Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy^2 = x^2 + 2 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ 3xy(x-y) = x^2 - y^2 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ (x-y)(3xy + x + y) = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3yx^2 = y^2 + 2 \\ x - y = 0 \\ x > 0, y > 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y > 0 \\ (x-1)(3x^2 + 2x + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1.
 \end{aligned}$$

Vậy hệ đã cho có nghiệm duy nhất (1;1)

**Chú ý:** Ở đây ta đã sử dụng lược đồ sau:

$$\begin{cases} P_1(x, y) = P_2(x, y) \\ Q_1(x, y) = Q_2(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P_1(x, y) = P_2(x, y) \\ P_1(x, y) - Q_1(x, y) = P_2(x, y) - Q_2(x, y) \end{cases}$$

**Thí dụ 2:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^3 + 3x = 8y & (1) \\ y^3 + 3y = 8x & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có hệ: (1)(2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x = 8y \\ (x^3 - y^3) + 3(x - y) = 8(y - x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 3x = 8y & (3) \\ (x - y)(x^2 + xy + y^2 + 11) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\text{Do } x^2 + xy + y^2 + 11 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 11 > 0 \quad \forall x, y \text{ nên}$$

$$(3)(4) \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 0 \\ x^3 + 3x = 8y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x(x^2 - 11) = 0 \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ (1)(2) có các nghiệm:  $(0;0); (\sqrt{11}; \sqrt{11}); (-\sqrt{11}; -\sqrt{11})$ .

**Thí dụ 3:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 3y = 4\frac{y}{x} & (1) \\ y - 3x = 4\frac{x}{y} & (2) \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Ta có hệ (1)(2)} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ y^2 - 3xy = 4x \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ (x - y)(x + y + 4) = 0 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3xy = 4y \\ x = y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \neq 0 \\ 2x^2 + 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -4 - x \\ x^2 + 4x + 4 = 0 \\ x \neq 0, y \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = -2$$

Vậy hệ có nghiệm duy nhất  $(x; y) = (-2; -2)$

## B. HỆ PHƯƠNG TRÌNH ĐẲNG CẤP

Hệ phương trình đẳng cấp (hay chính xác hơn là hệ phương trình mà các phương trình về trái là đẳng cấp) là các hệ phương trình trong đó vế phải của các phương trình là các biểu thức không chứa biến, còn vế trái của phương trình là các đa thức chứa biến mà mọi số hạng của nó đều cùng một bậc.

Bằng phương pháp cộng đại số từ hệ phương trình đã cho ta luôn thu được một phương trình hệ quả có dạng  $f(x, y) = 0$ , trong đó  $f(x, y)$  là biểu thức gồm các số hạng cùng một bậc (giả sử có bậc  $k$ ). Thực hiện phép chia cho  $y^k$  (hoặc  $x^k$ ), sau đó khảo sát xem  $y = 0$  (hoặc  $x = 0$ ) có thỏa mãn hệ hay không, ta đặt ẩn phụ

$t = \frac{x}{y}$  (hoặc  $\frac{y}{x}$ ) và sẽ thu được một phương trình đối với  $t$ . Giải phương trình này

và với mỗi nghiệm  $t$  tìm được, ta tìm được một phép thế  $x = ty$  (hoặc  $y = tx$ ). Từ đó sẽ dễ dàng giải được hệ ban đầu.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Cao đẳng khối A-2005)**

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2x^2y + xy^2 = 15 & (1) \\ 8x^3 + y^3 = 35 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Xét hệ đẳng cấp bậc ba (1) (2). Từ (1) (2) bằng phép cộng đại số ta có:

$$24x^3 + 3y^3 - 14xy^2 - 7xy^2 = 0. \quad (3)$$

Rõ ràng  $y \neq 0$  (vì nếu  $y = 0$  từ (1) ta có  $0 = 15$  và đó là điều vô lý). Chia cả hai vế của (3) cho  $y^3$  và đặt  $t = \frac{x}{y}$ , ta có:

$$24t^3 - 14t^2 - 7t + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(t - \frac{1}{3}\right)(24t^2 - 6t - 9) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{3} \\ t = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{3}{4} \end{cases}$$



+ Nếu  $t = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{1}{3} \Rightarrow y = 3x$ .

Vậy (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 3x \\ 8x^3 + 27x^3 = 35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 3. \end{cases}$

Lập luận tương tự ta có:

+ Nếu  $t = -\frac{1}{2}$  thì hệ (1) (2) vô nghiệm.

+ Nếu  $t = \frac{3}{4}$  thì hệ (1) (2) có nghiệm  $x = \frac{3}{2}, y = 2$ .

Tóm lại hệ (1) (2) có hai nghiệm (1;3) và  $(\frac{3}{2}; 2)$ .

**Thí dụ 2:**

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} 3x^2 - 5xy - 4y^2 = -3 & (1) \\ 9y^2 + 11xy - 8x^2 = 6. & (2) \end{cases}$

**Giải**

Xét hệ đẳng cấp bậc 2 (1) (2). Ta có sau khi thực hiện phép cộng đại số

$$-2x^2 + xy + y^2 = 0 \quad (3)$$

Lập luận như thí dụ 1, để thấy  $y \neq 0$ , nên sau khi chia cả hai vế cho  $y^2$

và đặt  $t = \frac{x}{y}$  ta có phương trình:  $-2t^2 + t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$

+ Nếu  $t = 1 \quad \frac{x}{y} = 1 \quad x = y$ . Thay lại vào hệ (1) (2) và có  $\begin{cases} x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x = y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad (4)$

+ Tương tự nếu  $t = -\frac{1}{2} \quad y = -2x$ . Thay lại vào hệ (1) (2) và có:  $\begin{cases} x = 1; y = -2 \\ x = -1; y = 2 \end{cases} \quad (5)$

Tóm lại (4) (5) là bốn nghiệm của hệ (1) (2).

### C. CÁC PHƯƠNG PHÁP CƠ BẢN GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH KHÔNG CÓ CẤU TRÚC ĐẶC BIỆT

Dưới đây chúng ta sẽ xét các phương pháp cơ bản giải các hệ phương trình không có cấu trúc đặc biệt như tính đối xứng, tính đẳng cấp... đã trình bày trong mục A và mục B.

**Loại 1:** Sử dụng định lý Viet để giải các hệ phương trình:

Xét các thí dụ sau đây:

**Thí dụ 1:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x(2x+3y)(x-1)=14 & (1) \\ x^2+x+3y=9 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có hệ: 
$$(1) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-1)(2x+3y)=14 & (3) \\ x(x-1)+(2x+3y)=9 & (4) \end{cases}$$

Từ (3) (4) và theo định lí Viet đảo suy ra  $x(x-1)$  và  $2x+3y$  là các nghiệm của phương trình  $t^2-9t+14=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=7. \end{cases}$

Từ đó ta có: 
$$(1), (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x(x-1)=2 \\ 2x+3y=7 \end{cases} \\ \begin{cases} x(x-1)=7 \\ 2x+3y=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x=-1; y=3 \\ x=2; y=1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1+\sqrt{29}}{2}; y=\frac{1-\sqrt{29}}{3} \\ x=\frac{1-\sqrt{29}}{2}; y=\frac{1+\sqrt{29}}{3} \end{cases} \end{cases}$$

Vậy hệ (1) (2) có 4 nghiệm kể trên.

**Thí dụ 2**

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} (3x+y)^2-3(9x^2-y^2)-10(3x-y)^2=0 & (1) \\ 3x+y+\frac{1}{3x-y}=6 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để (1) (2) có nghĩa là  $3x-y \neq 0$ . Khi đó:

$$(1) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3x+y}{3x-y}\right)^2-3\frac{3x+y}{3x-y}-10=0 \\ 3x+y+\frac{1}{3x-y}=6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3x+y}{3x-y}=5 \vee \frac{3x+y}{3x-y}=-2 \\ 3x+y+\frac{1}{3x-y}=6 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} (3x+y)\frac{1}{3x-y}=5 & (3) \\ (3x+y)+\frac{1}{3x-y}=6 & (4) \end{cases} \\ \begin{cases} (3x+y)\frac{1}{3x-y}=-2 & (5) \\ (3x+y)+\frac{1}{3x-y}=6 & (6) \end{cases} \end{cases}$$

Từ hệ (3) (4) và theo định lí Viet đảo suy ra  $3x + y$  và  $\frac{1}{3x-y}$  là các nghiệm

của phương trình  $t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=2 \\ t=3 \end{cases}$ .

$$\text{Vậy (3) (4)} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + y = 2 \\ \frac{1}{3x-y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1; y=2 \\ x=\frac{1}{5}; y=\frac{2}{5} \end{cases} \quad (7)$$

Tương tự suy ra hệ (5) (6) có các nghiệm (bạn đọc tự nghiệm lấy)

$$\begin{cases} x = \frac{3+\sqrt{11}}{12}; y = \frac{3(3+\sqrt{11})}{4} \\ x = \frac{3-\sqrt{11}}{2}; y = \frac{3(3-\sqrt{11})}{4} \end{cases} \quad (8)$$

Vậy hệ (1) (2) có bốn nghiệm biểu diễn bởi (7) và (8) nói trên.

**Thí dụ 3:**

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} x + y + z = 6 & (1) \\ xy + yz - zx = 7 & (2) \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 & (3) \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Ta có (3)} \Leftrightarrow (x + y + z)^2 - 2(xy + yz + zx) = 14 \quad (4)$$

$$\text{Từ (1), (4) suy ra: } xy + yz + zx = 11 \quad (5)$$

$$\text{Từ (2), (5) suy ra: } xy + yz = 9 \quad (6)$$

$$\text{Vậy từ (1), (6) suy ra } \begin{cases} y + (x + z) = 6 \\ y(x + z) = 9 \end{cases}$$

Vì thế theo định lí Viet đảo suy ra  $y$  và  $x + z$  là nghiệm của phương trình

$$t^2 - 6t + 9 = 0 \Leftrightarrow t = 3$$

$$\text{Do đó } y = 3 \text{ và } x + z = 3 \quad (7)$$

$$\text{Từ (2), (5) ta có } xz = 2 \quad (8)$$

Bây giờ từ (7) (8) và theo định lí Viet đảo suy ra  $x, y$  là hai nghiệm của

$$t^2 - 3t + 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=2 \end{cases}$$

Tóm lại hệ (1) (2) (3) có hai nghiệm  $(x; y; z) = (1; 3; 2)$  và  $(x; y; z) = (2; 3; 1)$ .

**Loại 2: Phương pháp thế và đặt ẩn số phụ**

Như đã biết đây là một trong những phương pháp thông dụng nhất để giải hệ phương trình nói chung và hệ phương trình không chứa căn thức nói riêng.

Để giảm ẩn số của hệ phương trình có lẽ không có phương pháp nào đơn giản và tốt hơn phương pháp thế, còn việc đặt ẩn phụ thích hợp sẽ làm cho hệ phương trình trở nên gọn gàng hơn.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2009)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x(x+y+1)-3=0 & (1) \\ (x+y)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để hệ (1) (2) có nghĩa là  $x \neq 0$ . Sau khi chia cả hai vế của (1) cho  $x$ , ta có

$$(1) \Leftrightarrow x+y+1-\frac{3}{x}=0 \Leftrightarrow x+y=\frac{3}{x}-1 \quad (3).$$

Thế (3) vào (2) và có:

$$\left(\frac{3}{x}-1\right)^2-\frac{5}{x^2}+1=0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^2}-\frac{6}{x}+2=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x}=1 \\ \frac{1}{x}=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2 \end{cases}.$$

+ Khi  $x=1$ , thay lại vào (3) và có  $y=1$ .

+ Khi  $x=2$ , thay lại vào (3) và có  $y=\frac{3}{2}$ .

Vậy  $(1;1)$  và  $(2; \frac{3}{2})$  là hai nghiệm của (1) (2).

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2009)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} xy+x+1=7y & (1) \\ x^2y^2+xy+1=13y^2 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Rõ ràng  $y=0$  không thỏa mãn (1) (2), nên ta có:

$$(1)(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{x}{y}+\frac{1}{y}=7 \\ x^2+\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}=13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x+\frac{1}{y}\right)+\frac{x}{y}=7 & (3) \\ \left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\frac{x}{y}=13 & (4) \end{cases}$$

Từ (3) suy ra  $\frac{x}{y}=7-\left(x+\frac{1}{y}\right)$  (5)

Thế (5) vào (4) và có:

$$\left(x+\frac{1}{y}\right)^2+\left(x+\frac{1}{y}\right)-20=0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\frac{1}{y}=-5 \\ x+\frac{1}{y}=4. \end{cases} \quad (6)$$

Thế (6) vào (5) ta được:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = -5 \\ \frac{x}{y} = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 12y \\ 12y^2 + 5y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1; y = \frac{1}{3} \\ x = 3; y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + \frac{1}{y} = 5 \\ \frac{x}{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y \\ 3y^2 - 4y + 1 = 0 \end{cases}$$

Vậy hệ (1) (2) có hai nghiệm  $(1; \frac{1}{3})$  và  $(3; 1)$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y + x^3y + x^2y + xy = -\frac{5}{4} & (1) \\ x^4 + y^2 + xy(1 + 2x) = -\frac{5}{4} & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có

$$(1)(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y + xy(x^2 + y) + xy = -\frac{5}{4} & (3) \\ (x^2 + y)^2 + xy = -\frac{5}{4} & (4) \end{cases}$$

Đặt ẩn phụ  $u = x^2 + y$ ;  $v = xy$ , khi đó (3) (4) có dạng 
$$\begin{cases} u + v + uv = -\frac{5}{4} & (5) \\ u^2 + v = -\frac{5}{4} & (6) \end{cases}$$

Từ (5) (6) suy ra:  $u + v + uv = u^2 + v \Leftrightarrow u^2 = u + v$

$$\Leftrightarrow u(u - 1 - v) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} u = 0 \\ u = v + 1 \end{cases}$$

+) Nếu  $u = 0$  thì (6) có  $v = -\frac{5}{4}$ . Từ đó dựa vào phép thế, ta có hệ sau:

$$\begin{cases} x^2 + y = 0 \\ xy = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x^2 \\ x^3 = -\frac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[3]{-\frac{5}{4}} \\ y = -\sqrt[3]{\frac{25}{16}} \end{cases} \quad (7)$$

+) Nếu  $u = v + 1$ , thế vào (4) ta có:

$$(v + 1)^2 + v = -\frac{5}{4} \Leftrightarrow (2v + 3)^2 = 0 \Leftrightarrow v = -\frac{3}{2} \Rightarrow u = -\frac{1}{2}$$

Từ phép đặt ẩn phụ, ta có:

$$\begin{cases} x^2 + y = -\frac{1}{2} \\ xy = -\frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -\frac{1}{2} - x^2 \\ (x-1)(2x^2 + 2x + 3) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -\frac{3}{2} \end{cases} \quad (8)$$

Vậy hệ (1) (2) có hai nghiệm (7) và (8).

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối B – 2008)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^4 + 2x^3y + x^2y^2 = -2x + 9 & (1) \\ x^2 + 2xy = 6x + 6. & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2(x+y)^2 = 2x+9 \\ x^2 + 2xy = 6x+6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x^2 + xy)^2 = 2x+9 & (3) \\ xy = \frac{6x+6-x^2}{2} & (4) \end{cases}$

Thay (4) vào (3) rồi rút gọn ta có phương trình

$$x^4 + 12x^3 + 48x^2 + 64x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^3 + 12x^2 + 48x + 64 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ (x+4)^3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -4 \end{cases}$$

Rõ ràng  $x=0$  loại vì không thỏa mãn (4), còn khi  $x = -4$  thay vào (2) ta có  $y = \frac{17}{4}$ . Vậy  $(-4; \frac{17}{4})$  là nghiệm duy nhất của hệ (1) (2).

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2003)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - \frac{1}{x} = y - \frac{1}{y} & (1) \\ 2y = x^3 + 1. & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để (1) (2) có nghĩa là  $x \neq 0; y \neq 0$ .

Từ (1) có:  $x - y - \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0 \Leftrightarrow (x-y) \left( 1 + \frac{1}{xy} \right) = 0 \quad (3).$

Từ (3) xét hai phép thế sau:

1/ Nếu  $x = y$ , thay vào (2) và có

$$x^3 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

2/ Nếu  $1 + \frac{1}{xy} = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{x}$ . Thay vào (2) ta có:

$$x^4 + x + 2 = 0 \Rightarrow \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{2} = 0 \quad (4).$$

Do (4) vô nghiệm, nên trường hợp này vô nghiệm.

Vậy hệ (1) (2) có nghiệm  $(1; 1); \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)$ .

**Thí dụ 6:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2y^2 + xy - x^2 = 0 & (1) \\ x^2 - xy - y^2 + 3x + 7y + 3 = 0. & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có  $(1) \Leftrightarrow y^2 - x^2 + y^2 + xy = 0 \Leftrightarrow (y+x)(2y-x) = 0 \quad (3)$

Từ (3) suy ra hai phép thế sau:

1/ Nếu  $x+y=0 \Rightarrow y=-x$ . Thế vào (2) ta có:

$$y^2 + 4y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \Rightarrow x = 1 \\ y = -3 \Rightarrow x = 3. \end{cases}$$

2/ Nếu  $2y-x=0 \Rightarrow x=2y$ . Thế vào (2) ta có:

$$y^2 + 13y + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{-13+\sqrt{157}}{2} \Rightarrow x = -13+\sqrt{157} \\ y = \frac{-13-\sqrt{157}}{2} \Rightarrow x = -13-\sqrt{157}. \end{cases}$$

Vậy hệ (1) (2) có 4 nghiệm kể trên.

## §2. PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

### A. PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Trong mục này, chúng tôi trình bày các phương pháp cơ bản để giải phương trình chứa căn thức.

**Loại 1:** Phương trình chứa căn thức quy về hệ phương trình không chứa căn thức.

Quy một phương trình chứa căn thức về việc giải một hệ phương trình không chứa căn thức là việc thường xuyên khi giải các phương trình chứa căn thức. Sau khi quy về một hệ phương trình hữu tỉ ta sẽ sử dụng các phương pháp đã trình bày trong §1 để giải chúng. Xét các thí dụ sau đây:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)**

Giải phương trình:  $2\sqrt[3]{3x-2} + 3\sqrt{6-5x} - 8 = 0 \quad (1).$

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $6-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{6}{5} \quad (2).$

Khi đó đặt  $u = \sqrt[3]{3x-2}$ ,  $v = \sqrt{6-5x}$  và ta đi đến hệ sau:  $\begin{cases} 2u + 3v = 8 & (3) \\ 5u^3 + 3v^2 = 8 & (4) \end{cases}$

Từ (3) suy ra  $v = \frac{8-2u}{3}$ . Thay vào (4) rồi rút gọn ta có:

$$15u^3 + 4u^2 - 32u + 40 = 0 \Leftrightarrow (u+2)(15u^2 - 26u + 20) = 0 \Leftrightarrow u + 2 = 0$$

(do  $15u^2 - 26u + 20 > 0 \forall u$ )  $\Leftrightarrow u = -2 \quad v = 4$ .

Vậy ta có  $\begin{cases} \sqrt[3]{3x-2} = -2 \\ \sqrt{6-5x} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 = -8 \\ 6-5x = 16 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$ .

Vậy  $x = -2$  là nghiệm duy nhất của (1).

**Thí dụ 2:** Giải phương trình:  $x + \sqrt{13-x^2} + x\sqrt{13-x^2} = 11$  (1).

**Giải**

Đặt  $y = \sqrt{13-x^2} \geq 0$ . Khi đó từ (1) ta có hệ:

$$\begin{cases} x + y + xy = 11 \\ x^2 + y^2 = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + xy = 11 & (2) \\ (x+y)^2 - 2xy = 13 & (3) \end{cases}$$

Từ (2) suy ra  $xy = 11 - (x+y)$ . Thay vào (3) và sau khi rút gọn ta có:

$$(x+y)^2 + 2(x+y) - 35 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 5 \\ x+y = -7 \end{cases}$$

Vậy ta đi đến:  $(2)(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x+y = 5 \\ xy = 6 \\ y \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y = -7 \\ xy = 18 \\ y \geq 0 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2; y=3 \\ x=3; y=2 \end{cases}$

Vậy  $x=2$  và  $x=3$  là nghiệm của (1).

**Thí dụ 3:** Giải phương trình:  $\sqrt[4]{18-x} + \sqrt[4]{x-79} = 5$  (1).

**Giải**

Đặt  $u = \sqrt[4]{18-x} \geq 0$ ;  $v = \sqrt[4]{x-79} \geq 0$ , từ (1) ta có hệ:

$$\begin{cases} u + v = 5 \\ u^4 + v^4 = 97 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 5 \\ \left[ (u+v)^2 - 2uv \right]^2 - 2u^2v^2 = 97 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases}$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ (uv)^2 - 50(u.v) + 264 = 0 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=44 \\ u \geq 0, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2; v=3 \\ u=3; v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-63 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của (1) là  $x = 2$  và  $x = -63$ .

**Thí dụ 4:**

Giải phương trình:  $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{3x-1}$  (1)

**Giải**

Đặt  $y = \sqrt[3]{2x-1}$  khi đó từ (1) ta có hệ:

$$\begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ y^3 + 1 = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ x^3 - y^3 = 2y - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^3 + 1 = 2y \\ (x-y)(x^2 + xy + y^2 + 2) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Do  $x^2 + xy + y^2 + 2 = \left(x + \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3y^2}{4} + 2 > 0$  ( $\forall x, y$ ), nên

$$(2)(3) \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x^3 - 2x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 1 \\ x = y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm  $x = 1; x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$ .

**Loại 2:** Sử dụng phương trình hệ quả hoặc phương trình tương đương để giải phương trình chứa căn thức:

Điều quan trọng nhất khi sử dụng phương pháp này là cần phân biệt cho rõ đâu là phép biến đổi tương đương, đâu là phép biến đổi kéo theo (hay còn gọi là phép biến đổi hệ quả).

– Nếu dùng phép biến đổi tương đương thì sau khi tìm được nghiệm ta không cần thử lại vào phương trình ban đầu.

– Nếu dùng phép biến đổi kéo theo, ta chỉ thu được phương trình là hệ quả của phương trình ban đầu và vì thế lúc này việc thử lại nghiệm là cần thiết.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Giải phương trình:  $\sqrt{2x-1} + x^2 - 3x + 1 = 0$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \sqrt{2x-1} = -x^2 - 3x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -x^2 - 3x - 1 \geq 0 \\ 2x - 1 = (-x^2 - 3x + 1)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 8x + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{3-\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{3+\sqrt{5}}{2} \\ (x-1)^2(x^2-4x+2)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=2-\sqrt{2} \end{cases}$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2005)**

Giải phương trình:  $2\sqrt{x+2} + 2\sqrt{x+1} - \sqrt{x+1} = 4$  (1).

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có (1)} &\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{(\sqrt{x+1}+1)^2} - \sqrt{x+1} = 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|\sqrt{x+1}+1| - \sqrt{x+1} = 4 \\ x \geq -1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ 2(\sqrt{x+1}+1) - \sqrt{x+1} = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = 2 \Leftrightarrow x = 3. \end{aligned}$$

**Thí dụ 3:**

Giải phương trình:  $\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{3x+7} = \sqrt[3]{5x+2}$  (1).

**Giải**

$$\begin{aligned} \text{Ta có (1)} &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{3x+7})^3 = 5x+2 \\ &\Leftrightarrow (2x+5) + (3x+7) + 3(\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{3x+7})\sqrt[3]{2x+5}\sqrt[3]{3x+7} = 5x+2 \\ &\Leftrightarrow (\sqrt[3]{2x-5} + \sqrt[3]{3x+7})\sqrt[3]{2x+5}\sqrt[3]{3x+7} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-5=0 \\ 3x+7=0 \\ 2x-5=-3x-7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2} \\ x=-\frac{7}{3} \\ x=-\frac{5}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

**Nhận xét:**

– Thí dụ trên ta đã sử dụng phép biến đổi tương đương.

– Chú ý rằng  $f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^3(x) = g^3(x)$ , nhưng  $f(x) = g(x)$ ,  $f^2(x) = g^2(x)$ .

**Thí dụ 4:**

Giải phương trình:  $\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{2x-1} = \sqrt[3]{5x+1}$  (1).

**Giải**

Lập phương cả hai vế của (1) rồi rút gọn, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (\sqrt[3]{3x+1} + \sqrt[3]{2x-1})\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{2x-1} = 1 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có phương trình hệ quả sau:

$$\sqrt[3]{5x+1}\sqrt[3]{3x+1}\sqrt[3]{2x-1} = 1 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow (5x+1)(3x+1)(2x-1) = 1 \Leftrightarrow 30x^3 - 19x^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\frac{19}{30} \end{cases}$$

+) Thay  $x = 0$  vào (1), ta có VT (1) = -2, VP (1) = 1  $x = 0$  bị loại.

+) Thay  $x = \frac{19}{30}$  vào (1) ta thấy thỏa mãn vì VT(1) = VP (1) =  $\frac{5}{\sqrt[3]{30}}$ .

Vậy (1) có nghiệm duy nhất  $x = \frac{19}{30}$ .

**Nhận xét:**

Vì đây là phép biến đổi hệ quả, nên việc thử lại nghiệm là cần thiết. Nếu không thử lại ta sẽ chấp nhận nghiệm  $x = 0$  mặc dầu đó là nghiệm ngoại lai.

**Thí dụ 5:**

Giải phương trình:  $\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 16$  (1).

**Giải**

Đặt  $u = \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} \geq 0$  khi đó ta có:

$$u^2 = 3x + 4 + 2\sqrt{2x^2+5x+3} = 3x + 2\sqrt{2x^2+5x+3} - 16 + 20 \quad (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có  $u^2 = u + 20 \Leftrightarrow u^2 - u - 20 = 0$

$$\Leftrightarrow u = 5 \text{ (do } u \geq 0)$$

Vậy từ (1) dẫn đến phương trình hệ quả sau:

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5 \Leftrightarrow x=3 \text{ (bạn đọc tự kiểm tra lại)}$$

Thay lại  $x = 3$  vào (1) thấy thỏa mãn nên là nghiệm duy nhất của (1).

## B. HỆ PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Phương pháp cơ bản để giải các hệ phương trình chứa căn thức là quy nó về hệ phương trình không chứa căn thức và giải chúng bằng các phương pháp đã trình bày trong §1.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2008)**

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} xy + x + y = x^2 - 2y^2 & (1) \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để (1) (2) có nghĩa là  $x \geq 1, y \geq 0$  (3)

$$\text{Khi đó (1) (2) } \Leftrightarrow \begin{cases} y(x+y) + (x+y) + (x-y)(x+y) = 0 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)(2y+1-x) = 0 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y+1 \\ x\sqrt{2y} - y\sqrt{x-1} = 2x - 2y \end{cases} \quad (4)$$

(vì  $x \geq 1, y \geq 0 \Rightarrow x+y > 0$ )

Thay (4) vào (5) và có:

$$(2y+1)\sqrt{2y} - y\sqrt{2y} = 2(y+1) \Leftrightarrow (y+1)\sqrt{2y} = 2(y+1)$$

$$\sqrt{2y} = 2 \text{ (do } y+1 > 0) \Leftrightarrow y = 2 \Rightarrow x = 5.$$

Vậy hệ (1) (2) có nghiệm (5;2)

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt[3]{x-y} = \sqrt{x-y} & (1) \\ x+y = \sqrt{x+y+2} & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Đặt  $u = \sqrt[3]{x-y} \geq 0$ , khi đó (1) có dạng:  $u^2 = u^3 \Leftrightarrow \begin{cases} u=0 \\ u=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x-y=1 \end{cases}$

Đặt  $v = x+y$ , khi đó (2) có dạng:

$$v = \sqrt{v+2} \Leftrightarrow \begin{cases} v \geq 0 \\ v^2 - v - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow v=2 \Leftrightarrow x+y=2.$$

Từ đó suy ra hệ (1) (2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-y=0 \\ x+y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y=1 \\ x=\frac{3}{2}; y=\frac{1}{2} \end{cases}$

Vậy hệ (1) (2) có hai nghiệm  $(1;1)$  và  $(\frac{3}{2}; \frac{1}{2})$ .

**Thí dụ 4:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x\sqrt{y} + y\sqrt{x} = 30 & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để hệ (1) (2) có nghĩa là  $x \geq 0, y \geq 0$ .

Đặt  $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$  ( $u, v \geq 0$ ), khi đó

$$(1) (2) \Leftrightarrow \begin{cases} u^2v + uv^2 = 30 \\ u^3 + v^3 = 35 \\ u, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 - 3uv(v+u) = 35 \\ u, v \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} uv(u+v) = 30 \\ (u+v)^3 = 125 \\ u, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=5 \\ uv=6 \\ u, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3; v=2 \\ u=2; v=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=9; y=4 \\ x=4; y=9 \end{cases}$$

**Thí dụ 5:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{2x+y+1} - \sqrt{x+y} = 1 & (1) \\ 3x+2y=4 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Đặt  $u = \sqrt{2x+y+1} \geq 0; v = \sqrt{x+y} \geq 0$  khi đó từ (1) (2) ta có hệ

$$\begin{cases} u-v=1 \\ u^2+v^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ (u-v)^2 - 2uv=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1 \\ uv=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y+1=4 \\ x+y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=2; y=1$$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2006)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x+y-\sqrt{xy}=3 & (1) \\ \sqrt{x+1}+\sqrt{y+1}=4 & (2). \end{cases}$$

**Giải**

Từ (2)  $\Leftrightarrow x+y+2+2\sqrt{xy+(x+y)+1}=16$  (3).

Đặt  $t=\sqrt{xy} \geq 0$   $x+y=3+t$ . Thay vào (3), ta có

$$2\sqrt{t^2+t+4}=11-t \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \leq t \leq 11 \\ 3t^2+26t-105=0 \end{cases} \Leftrightarrow t=3.$$

Từ đó suy ra: (1)(2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} x+y=6 \\ xy=3 \end{cases} \Leftrightarrow x=y=3.$

Vậy (3; 3) là nghiệm duy nhất của hệ (1) (2).

### §3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA CĂN THỨC

Để giải bất phương trình chứa căn thức người ta thường quy về việc giải bất phương trình không chứa căn thức (đặc biệt là quy về bất phương trình bậc hai).

Để làm điều đó, người ta thường dùng các phương pháp cơ bản như: Đặt ẩn phụ, nhân liên hợp hoặc biến đổi tương đương để làm mất các căn thức có mặt trong bất phương trình chứa căn thức ban đầu.

Cần lưu ý hai dạng cơ bản sau của phương trình chứa căn thức:

$$1/ \sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) < g^2(x) \end{cases}$$

$$2/ \sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) < 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$$

Xét các thí dụ sau:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2005)**

Giải bất phương trình:  $\sqrt{5x-1}-\sqrt{x-1} > \sqrt{2x-4}$ . (1)

**Giải**

Dễ thấy:

$$(1) \Leftrightarrow \sqrt{5x-1} > \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-4} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x-1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \\ 2x-4 \geq 0 \\ 5x-1 > 2x-5+2\sqrt{2x^2-6x+4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ \sqrt{2x^2-6x+4} < x+2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 10.$$

**Chú ý:** Bài tập tương tự (*Đề thi Cao đẳng khối A, B – 2009*)

Giải bất phương trình:  $\sqrt{x+1} + 2\sqrt{x-2} \leq \sqrt{5x+1}$ .

Giải hoàn toàn tương tự: Đáp số:  $2 \leq x \leq 3$ .

**Thí dụ 2:** (*Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2004*)

Giải bất phương trình:  $\frac{\sqrt{2(x^2-16)}}{\sqrt{x-3}} + \sqrt{x-3} > \frac{7-x}{\sqrt{x-3}}$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2-16)} + x - 3 > 7 - x \\ x > 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{2(x^2-16)} > 10 - 2x \\ x > 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 16 \geq 0 \\ x > 3 \\ 10 - 2x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 3 < x \leq 5 \\ x^2 - 20x + 66 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 5 \\ 10 - \sqrt{34} < x \leq 5 \end{cases} \Leftrightarrow x > 10 - \sqrt{34}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ 10 - 2x \geq 0 \\ 2x^2 - 32 > 100 - 40x + x^2 \end{cases}$$

**Thí dụ 3:** Giải bất phương trình:  $\frac{|x+2|-|x|}{\sqrt{4-x^3}} \geq 0$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - x^3 > 0 \\ |x+2| \geq |x| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \sqrt[3]{4} \\ x^2 + 4x + 4 \geq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq x < \sqrt[3]{4}.$$

**Thí dụ 4:** (*Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002*)

Giải bất phương trình:  $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x - 2} \geq 0$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 3x - 2 = 0 \\ 2x^2 - 3x - 2 > 0 \\ x^2 - 3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -\frac{1}{2} \\ x < -\frac{1}{2} \text{ hoặc } x > 2 \\ x \leq 0 \text{ hoặc } x \geq 3 \end{cases}$$

Vậy  $x \leq -\frac{1}{2}$  hoặc  $x \geq 3$ .

#### §4. PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH CHỨA THAM SỐ

Mục này dành để trình bày các phương pháp giải phương trình và bất phương trình không có căn thức và có chứa căn thức trong đó có mặt tham số. Đó là các bài toán đòi hỏi biện luận theo tham số những tính chất nào đó đặt lên nghiệm của bài toán. Hai phương pháp hay dùng nhất là:

- Phương pháp chiều biến thiên hàm số.
- Phương pháp tam thức bậc hai.

##### A. PHƯƠNG PHÁP SỬ DỤNG CHIỀU BIẾN THIÊN HÀM SỐ

Đây là phương pháp hay dùng nhất và có hiệu quả để giải các bài toán trong các đề thi vào các trường Đại học, Cao đẳng trong những năm 2002–2009.

**Thí dụ 1:**

Cho phương trình:  $\sqrt[3]{2x} + \sqrt{2x} + 2\sqrt[3]{6-x} + 2\sqrt{6-x} = m$  (1).

Tìm  $m$  để (1) có hai nghiệm phân biệt.

**Giải**

Điều kiện xác định của (1) là  $0 \leq x \leq 6$ .

Đặt  $f(x) = \sqrt{2x} + 2\sqrt{6-x}$  và  $g(x) = \sqrt[3]{2x} + 2\sqrt[3]{6-x}$ , với  $0 \leq x \leq 6$ .

$$\text{Khi đó (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} h(x) = g(x) + f(x) = m \\ 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Ta có  $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - \frac{1}{\sqrt{6-x}} = \frac{\sqrt{6-x} - \sqrt{2x}}{\sqrt{2x(6-x)}}$ , nên có bảng biến thiên (bảng 1):

x	0	2	6
f'(x)		+	0 -
f(x)			

(Bảng 1)

x	0	2	6
g'(x)		+	0 -
g(x)			

(Bảng 2)

Tương tự cũng có bảng biến thiên (bảng 2) đối với  $g(x)$ .

Từ đó suy ra bảng biến thiên đối với  $h(x)$ ,  $0 \leq x \leq 6$  là:

$x$	0	2	6
$h'(x)$		+	0
$h(x)$			-

Ta tính được  $h(0) = 2\sqrt{6} + 2\sqrt[4]{6}$ ;  $h(2) = 6 + 3\sqrt[4]{4}$ ;  $h(6) = 2\sqrt{3} + \sqrt[4]{12}$  (có thể thấy  $h(0) > h(6)$ )

Từ đó suy ra (1) có hai nghiệm phân biệt khi:

$$h(0) \leq m \leq h(2) \Leftrightarrow 2(\sqrt{6} + \sqrt[4]{6}) \leq m < 6 + 3\sqrt[4]{4}.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Cho phương trình:  $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$  (1).

Tìm  $m$  để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

**Giải**

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 \geq 0 \\ x^2 + mx + 2 = 4x^2 + 4x + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ 3x^2 + 4x - 1 = mx \end{cases} \quad (2)$$

Do  $x = 0$  không phải là nghiệm của (3) với mọi  $m$ , nên ta có:

$$(2) (3) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\frac{1}{2} \\ f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 1}{x} = m. \end{cases}$$

Ta có  $f'(x) = \frac{3x^2 + 1}{x^2}$  nên có bảng biến thiên sau:

$x$	$-\frac{1}{2}$	0
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{9}{2}$	$+\infty$

Từ bảng biến thiên suy ra  $m \geq \frac{9}{2}$  là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Cho phương trình:  $3\sqrt{x-1} + m\sqrt{x+1} = 2\sqrt{x^2-1}$ . (1)

Tìm  $m$  để phương trình có nghiệm.

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x \geq 1$ . Khi đó



$$(1) \Leftrightarrow 3\sqrt{\frac{x-1}{x+1}} + m = 2\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}. \quad (2)$$

Đặt  $t = \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}$  (khi đó  $0 \leq t < 1$ ).

Bài toán đã cho trở thành: Tìm  $m$  để hệ:

$$\begin{cases} f(t) = -3t^2 + 2t = m & (3) \\ 0 \leq t < 1 & (4) \end{cases} \text{ có nghiệm.}$$

Ta có  $F(t) = -6t + 2$ , và có bảng biến thiên sau:

t	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(t)$		+	0
$f(t)$			-
		$\frac{1}{3}$	-1

Từ đó suy ra  $-1 < m \leq \frac{1}{3}$  là các giá trị cần tìm của tham số  $m$ .

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2007)**

Cho phương trình  $x^2 + 2x - 8 = \sqrt{m(x-2)}$  (1).

Chứng minh rằng với mọi  $m > 0$ , phương trình luôn có hai nghiệm thực.

Giải

Ta có (1)  $\Leftrightarrow (x-2)(x+4) = \sqrt{m(x-2)}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)^2(x+4)^2 = m(x-2) \end{cases} \quad (\text{do } m > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ (x-2)(x^2 + 6x^2 - 32 - m) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x > 2 \\ f(x) = x^2 + 6x^2 - 32 = m \end{cases} \quad (2) \quad (3)$$

Ta có  $F(x) = 3x^2 + 12x > 0, \forall x > 2$ , nên ta có bảng biến thiên sau:

x	2	$-\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

Do  $f(2) = 0$  nên từ bảng biến thiên suy ra với mọi  $m > 0$ , hệ (2) (3) luôn có một nghiệm, tức là (1) có hai nghiệm thực với mọi  $m > 0$  đpcm.

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2004)**

Cho phương trình:

$$m(\sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2} + 2) = 2\sqrt{1-x^4} + \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}. \quad (1)$$

Tìm  $m$  để (1) có nghiệm.

**Giải**

Đặt  $t = \sqrt{1+x^2} - \sqrt{1-x^2}$  (khi đó  $t \geq 0$ ).

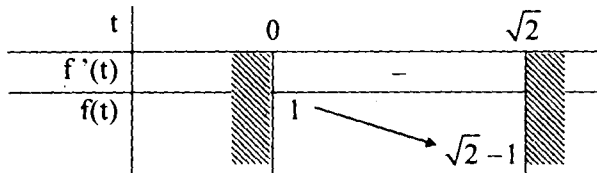
$$\Rightarrow t^2 = 2 - 2\sqrt{1-x^4} \leq 2, \text{ vậy } 0 \leq t \leq \sqrt{2}.$$

Ta cũng có:  $2\sqrt{1-x^4} = 2 - t^2$ . Khi đó (1) có dạng

$$m(t+2) = -t^2 + t + 2 \Leftrightarrow f(t) = \frac{-t^2 + t + 2}{t+2} = m.$$

Bài toán trở thành: Tìm  $m$  để hệ  $\begin{cases} f(t) = m \\ 0 \leq t \leq \sqrt{2} \end{cases}$  có nghiệm.

Ta có  $f'(t) = \frac{-t^2 - 4t}{(t+2)^2}$  và có bảng biến thiên sau:



Vậy  $\sqrt{2}-1 \leq m \leq 1$ .

**B. SƠ LƯỢC VỀ PHƯƠNG PHÁP TAM THỨC BẬC HAI**

**Thí dụ 1: (Đề thi đại học, cao đẳng khối D – 2004)**

Cho hệ phương trình:  $\begin{cases} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 1 & (1) \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 1 - 3m & (2) \end{cases}$

Tìm  $m$  để hệ có nghiệm.

**Giải**

Đặt  $u = \sqrt{x}, v = \sqrt{y}$  ( $u \geq 0, v \geq 0$ ). Khi đó hệ (1) (2) có dạng

$$\begin{cases} u + v = 1 \\ u^3 + v^3 = 1 - 3m \\ u, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 \\ (u + v)^3 - 3uv(u + v) = 1 - 3m \\ u, v \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u + v = 1 & (3) \\ uv = m & (4) \\ u, v \geq 0. & (5) \end{cases}$$

Từ đó suy ra hệ (3) (4) (5) có nghiệm (tức là hệ (1) (2) có nghiệm) khi và chỉ khi phương trình:

$$t^2 - t + m = 0 \quad (6) \text{ có hai nghiệm không âm.}$$

Điều đó xảy ra khi và chỉ khi (do  $S=1 > 0$ )

$$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 4m \geq 0 \\ m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 \leq m \leq \frac{1}{4}.$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

Cho phương trình:  $\sqrt{x^2 + mx + 2} = 2x + 1$  (1).

Tìm m để (1) có hai nghiệm thực phân biệt.

**Giải**

Để thấy: (1)  $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + x(4-m) - 1 = 0 & (2) \\ x \geq -\frac{1}{2}. & (3) \end{cases}$

Bài toán trở thành tìm m để hệ (2) (3) có hai nghiệm  $x_1, x_2$  sao cho

$$x_1 > x_2 \geq -\frac{1}{2} \quad (4).$$

(4) xảy ra khi và chỉ khi:  $\begin{cases} \Delta > 0 \\ \left(x_2 + \frac{1}{2}\right)\left(x_1 + \frac{1}{2}\right) \geq 0 \\ x_1 + x_2 > -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 x_2 + \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{4} \geq 0 \\ x_1 + x_2 > -1 \end{cases}$

(do  $\frac{c}{a} = -\frac{1}{3} < 0 \Rightarrow \Delta > 0$ )

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{3} + \frac{m-4}{6} + \frac{1}{4} \geq 0 \\ \frac{m-4}{3} > -1 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq \frac{9}{2}.$$

**Chú ý:** Các bạn hãy so sánh với lời giải cũng của thí dụ này bằng phương pháp chiều biến thiên hàm số trong thí dụ 2, mục A.

**BÀI TẬP TỰ GIẢI**

**Bài 1:**

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^3 + y^3 = 1 \end{cases}$

**Đáp số:** (1;0) và (0;1)

**Bài 2:**

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} 3xy - x^2 - y^2 = 5 \\ 7x^2y^2 - x^4 - y^4 = 155. \end{cases}$

**Đáp số:** (3;2), (-2; -3), (-3; -2), (2;3)

**Bài 3:**

Giải hệ phương trình:  $\begin{cases} (x-y)(x^2-y^2) = 3 \\ (x+y)(x^2+y^2) = 15 \end{cases}$

**Đáp số:** (1;2), (2;1).

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 3y = 4 \frac{y}{x} \\ y - 3x = 4 \frac{x}{y} \end{cases}$$

Đáp số:  $(-2; -2)$

**Bài 5:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + x = 1 \\ x^2 + y + z^2 = 1 \\ x + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

Đáp số:  $(-1; -1; -1), \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right), (1; 0; 0), (0; 1; 0), (0; 0; 1)$ .

**Bài 6:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 2xy + y^2 - 4x - 3y + 2 = 0 \\ xy + 3y^2 - 2x - 14y + 16 = 0 \end{cases}$$

Đáp số:  $(-1; 3), \left(-\frac{1}{2}; 2\right), (2; a)$ , với  $a$  tùy ý thuộc  $\mathbb{R}$ .

**Bài 7:**

Giải phương trình:  $x\sqrt[3]{16-x^3} \left(x + \sqrt[3]{16-x^3}\right) = 16$ .

Đáp số:  $x = 2$ .

**Bài 8:**

Giải phương trình:  $\sqrt{17-x^2} = (3-\sqrt{x})^2$ .

Đáp số:  $x = 4; x = 1$ .

**Bài 9:** Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x+1} + \sqrt{2-y} = \sqrt{3} \\ \sqrt{2-x} + \sqrt{y+1} = \sqrt{3} \end{cases}$$

Đáp số:  $(-1; -1), (2; 2)$ .

**Bài 10:** Giải bất phương trình:  $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$ .

Đáp số: 
$$\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2} \\ x \neq 0 \end{cases}$$

# PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH SIÊU VIỆT

Bài giảng này đề cập đến các phương pháp cơ bản giải phương trình và bất phương trình siêu việt (tên gọi chung của phương trình bất phương trình mũ và lôgarit). Các dạng bài toán này luôn luôn có mặt trong các đề thi tuyển sinh vào Đại học, Cao đẳng trong những năm 2002–2009, nhất là với các đề thi ở phần tự chọn cho trong chương trình nâng cao.

## §1. PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ PHƯƠNG TRÌNH LÔGARIT

Để giải phương trình mũ và phương trình lôgarit ta làm như sau:

- Đặt điều kiện để phương trình có nghĩa. Chú ý rằng ngoài các điều kiện thông thường, cần nhớ đến điều kiện sau:

Để  $\log_{f(x)}g(x)$  có nghĩa ta cần có:

$$\begin{cases} f(x) > 0, f(x) \neq 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

- Bằng các phép biến đổi cơ bản về hàm số mũ hoặc lôgarit, hoặc dùng phép đặt ẩn phụ, phép lôgarit hóa ta quy phương trình đã cho về các phương trình mũ, phương trình lôgarit cơ bản sau:

$$a^{f(x)} = b, a > 0$$

$$\log_{f(x)}g(x) = \log_{f(x)}h(x)$$

Các dạng toán cơ bản:

**Loại 1:** Phương pháp đặt ẩn phụ để giải phương trình siêu việt:

Bằng cách đặt ẩn phụ ta quy phương trình mũ, phương trình lôgarit ban đầu về phương trình đại số thông thường (phương trình chứa hoặc không chứa căn thức). Giải các phương trình trung gian này, sau đó sẽ quy về giải các phương trình mũ, lôgarit cơ bản để tìm ra nghiệm của phương trình ban đầu.

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2008)

Giải phương trình:  $\log_{2x-1}(2x^2 + x - 1) + \log_{x+1}(2x-1)^2 = 4$  (1).

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghiệm là

$$\begin{cases} 2x-1 > 0, 2x-1 \neq 1 \\ x+1 > 0, x+1 \neq 1 \\ 2x^2 + x - 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (2).$$

Áp dụng công thức đổi cơ số, ta có:

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}(2x^2 + x - 1)}{\log_{x+1}(2x - 1)} + 2\log_{x+1}(2x - 1) = 4 \\&\Leftrightarrow \frac{\log_{x+1}(2x - 1) + \log_{x+1}(x + 1)}{\log_{x+1}(2x - 1)} + 2\log_{x+1}(2x - 1) = 4 \\&\Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\log_{x+1}(2x - 1)} + 2\log_{x+1}(2x - 1) = 4 \quad (3).\end{aligned}$$

Đặt  $t = \log_{x+1}(2x - 1)$ , khi đó (3) có dạng

$$2t + \frac{1}{t} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_{x+1}(2x - 1) = 1 \\ \log_{x+1}(2x - 1) = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 2x - 1 \\ \sqrt{x + 1} = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x \geq \frac{1}{2}, x \neq 1 \\ 4x^2 - 5x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = \frac{5}{4} \end{cases}$$

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh khối A – 2006)**

Giải phương trình:  $3 \cdot 8^x + 4 \cdot 12^x - 18^x - 2 \cdot 27^x = 0$  (1).

**Giải**

Vì  $27^x > 0$  nên ta có

$$\begin{aligned}(1) &\Leftrightarrow 3\left(\frac{8}{27}\right)^x + 4\left(\frac{12}{27}\right)^x - \left(\frac{18}{27}\right)^x - 2 = 0 \\&\Leftrightarrow 3\left(\frac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\frac{2}{3}\right)^{2x} - \left(\frac{2}{3}\right)^x - 2 = 0 \quad (2).\end{aligned}$$

Đặt  $t = \left(\frac{2}{3}\right)^x > 0$ , khi đó (2) có dạng

$$3t^3 + 4t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow (t + 1)^2(3t - 2) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} \quad (\text{do } t > 0).$$

Vậy ta có:  $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x = 1$ .

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh khối B – 2007)**

Giải phương trình:  $(\sqrt{x} - 1)^x + (\sqrt{2} + 1)^x - 2\sqrt{2} = 0$  (1).

**Giải**

Do  $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$  nên nếu đặt  $t = (\sqrt{2} - 1)^x > 0$ , thì

$$(1) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 2\sqrt{2}t + 1 = 0$$

$$\begin{cases} t = \sqrt{1} - 1 \\ t = \sqrt{2} + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\sqrt{2} - 1)^x = \sqrt{2} - 1 \\ (\sqrt{2} - 1)^x = (\sqrt{2} - 1)^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -1. \end{cases}$$

**Thí dụ 4: (Đề thi tuyển sinh khối D – 2007)**

Giải phương trình:  $\log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) + 2 \log_2 \frac{1}{4 \cdot 2^x - 3} = 0$  (1).

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $4 \cdot 2^x - 3 > 0 \Leftrightarrow 2^x > \frac{3}{4}$  (2).

Khi đó (1)  $\Leftrightarrow \log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) - 2 \log_2(4 \cdot 2^x - 3) = 0$

$$\Leftrightarrow \log_2(4^x + 15 \cdot 2^x + 27) = \log_2(4 \cdot 2^x - 3)^2$$

$$\Leftrightarrow 4^x + 15 \cdot 2^x + 27 = (4 \cdot 2^x - 3)^2 = 0 \quad (3)$$

Đặt  $2^x = t > 0$  khi đó ta có:

$$(3) \Leftrightarrow t^2 + 15t - 27 = (4t - 3)^2 \Leftrightarrow 5t^2 - 13t - 6 = 0 \Leftrightarrow t = 3 \text{ (do } t > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$$

**Thí dụ 5: (Đề thi tuyển sinh khối D – 2003)**

Giải phương trình:  $2^{x^2-x} - 2^{2+x-x^2} = 3$  (1).

**Giải**

Đặt  $t = 2^x > 0$ , khi đó từ (1) ta có:

$$t - \frac{4}{t} = 0 \Leftrightarrow t^2 - 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow t = 4 \text{ (do } t > 0)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ và } x = 2.$$

**Thí dụ 6: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2002)**

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y & (1) \\ \frac{4x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y & (2) \end{cases}$$

**Giải**

$$\text{Ta có (2)} \Leftrightarrow y = \frac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} = 2^x. \quad (3)$$

Thay (3) vào (1) ta có:

$$y^3 = 5y^2 - 4y \Leftrightarrow y(y^2 - 5y + 4) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 5y + 4 = 0 \text{ (do } y > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2. \end{cases}$$

Vậy (0;1) và (2;4) là hai nghiệm của hệ (1) (2).

**Thí dụ 7: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2002)**

Cho phương trình:  $\log_2^3 x + \sqrt{\log_2^3 x + 1} - 2m - 1 = 0$  (1).

1/ Giải (1) khi  $m = 2$ .

2/ Tìm  $m$  để (1) có ít nhất một nghiệm thuộc đoạn  $[1; 3^{\sqrt{3}}]$ .

**Giải**

1/ Khi  $m = 2$  thì (1) có dạng:  $\log_2^3 x + \sqrt{\log_2^3 x + 1} - 5 = 0$  (2)

Điều kiện để (2) có nghĩa là:  $x > 0$ .

Đặt  $t = \sqrt{\log_2^3 x + 1} \geq 1$  khi đó (2) có dạng

$$t^2 + t - 6 = 2 \Leftrightarrow t = 2 \text{ (do } t \geq 1)$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log_2^3 x + 1} = 2 \Leftrightarrow \log_2^3 x = 3 \Leftrightarrow \log_3 x = \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow x = 3^{\sqrt{3}} \text{ và } x = 3^{-\sqrt{3}}.$$

2/ Đặt  $t = \sqrt{\log_2^3 x + 1}$ , khi  $x \in [1; 3^{\sqrt{3}}]$  thì  $1 \leq t \leq 2$ .

Bài toán trở thành: Tìm  $m$  để hệ  $\begin{cases} f(t) = t^2 + t - 2 = 2m & (3) \\ 1 \leq t \leq 2 & (4) \end{cases}$  có nghiệm.

Ta có:  $f'(t) = 2t + 1$ , nên có bảng biến thiên sau:

t	$-\frac{1}{2}$	1	2
$f'(t)$			+
$f(t)$		0	4

Từ đó suy ra hệ (3) (4) có nghiệm khi và chỉ khi  $0 \leq 2m \leq 4 \Leftrightarrow 0 \leq m \leq 2$ .

**Thí dụ 8:**

Giải các phương trình sau:

$$1/ (26 + 15\sqrt{3})^x + 2(7 + 4\sqrt{3})^x - 2(2 - \sqrt{3})^x = 1 \quad (1)$$

$$2/ (5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 10 \quad (2)$$

**Giải**

$$1/ \text{Đặt } (2 + \sqrt{3})^x = t > 0, \text{ khi đó (1)} \Leftrightarrow t^3 + 2t^2 - \frac{2}{t} = 1 \Leftrightarrow t^4 + 2t^3 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (t + 2)(t^3 - 1) = 0 \Leftrightarrow t = 1 \text{ (do } t > 0) \Leftrightarrow (2 + \sqrt{3})^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$$

$$2/ \text{Do } (5 + 2\sqrt{6})(5 - 2\sqrt{6}) = 1 \text{ nên đặt } t = (\sqrt{5 + 2\sqrt{6}})^x > 0 \text{ thì}$$

$$(2) \Leftrightarrow t + \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \pm 2\sqrt{6}.$$



$$\Leftrightarrow \begin{cases} (5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5+2\sqrt{6} \\ (5+2\sqrt{6})^{\frac{x}{2}} = 5-2\sqrt{6} = (5+2\sqrt{6})^{-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-2. \end{cases}$$

**Thí dụ 9:**

Giải các phương trình sau:

$$1/ \log_2(4^{x+1} + 4) \cdot \log_2(4^x + 1) = 3 \quad (1)$$

$$2/ \log_x 3 + \log_3 x = \log_{\sqrt{x}} 3 + \log_3 \sqrt{x} + \frac{1}{2} \quad (2).$$

**Giải**

$$1/ \text{Ta có } (1) \Leftrightarrow [\log_2 4 + \log_2(4^x + 1)] \log_2(4^x + 1) = 3.$$

Đặt  $t = \log_2(4^x + 1)$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow (t+2)t = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(4^x + 1) = 1 \\ \log_2(4^x + 1) = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^x + 1 = 2 \\ 4^x + 1 = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x = 0.$$

2/ Điều kiện đề (2) có nghĩa là:  $x > 0, x \neq 1$ . Đặt  $t = \log_3 x \neq 0$ .

$$\text{Khi đó } (1) \Leftrightarrow \frac{1}{t} + t = \frac{2}{t} + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \Leftrightarrow t^2 - t - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 x = -1 \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = 9. \end{cases}$$

**Loại 2:** Phương pháp đưa về cùng một cơ sở giải phương trình và hệ phương trình siêu việt:

Bằng cách sử dụng các công thức cơ bản của hàm mũ, hàm lôgarit ta quy phương trình, hệ phương trình đã cho về phương trình, hệ phương trình siêu việt cơ bản đã trình bày ở phần mở đầu của bài giảng.

Dĩ nhiên đây là phương pháp thông dụng, cơ bản nhưng cũng không hề kém hiệu quả.

Xét các thí dụ sau đây:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2009)**

$$\text{Giải hệ phương trình: } \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = 1 + \log_2(xy) & (1) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 81 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có (1) (2)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x^2 + y^2) = \log_2(2xy) \\ 3^{x^2 - xy + y^2} = 3^4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2xy \\ x^2 - xy + y^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = 2 \\ x = y = -2 \end{cases} \quad (4)$$

Rõ ràng (4) thỏa mãn (3) nên là nghiệm của (1) (2).

**Thí dụ 2: (Đề thi tuyển sinh khối B – 2005)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \sqrt{x-1} + \sqrt{2-y} = 1 & (1) \\ 3\log_9(9x^2) - \log_3 y^3 = 3 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để hệ (1)(2) có nghĩa là:  $x \geq 1$ ;  $0 < y \leq 2$ .

Ta có (2)  $\Leftrightarrow 3(1 + \log_9 x^2) - 3\log_3 y = 3$

$\Leftrightarrow 1 + \log_3 x - \log_3 y = 1 \Leftrightarrow \log_3 x = \log_3 y \Leftrightarrow x = y.$

(Chú ý do  $x \geq 1$   $x > 0$   $\log_9 x^2 = \log_3 x$ )

Vậy hệ (1)(2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y = x & (3) \\ \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 & (4) \end{cases}$

Để thấy  $\sqrt{x-1} + \sqrt{2-x} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 2. \end{cases}$

Vậy hệ (1)(2) có hai nghiệm (1; 1) và (2; 2).

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học, Cao đẳng khối A – 2004)**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x) - \log_4 \frac{1}{y} = 1 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Ta có hệ: (1)(2)  $\Leftrightarrow \begin{cases} y-x > 0; y > 0 \\ \log_4 \frac{1}{y-x} - \log_4 \frac{1}{y} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x > 0; y > 0 \\ \log_4 \frac{y}{y-x} = 1 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y-x > 0, y > 0 \\ y = 4y - 4x \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x > 0, y > 0 \\ y = \frac{4}{3}x \\ x^2 + \frac{16}{9}x^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 4. \end{cases}$

**Thí dụ 4:** Giải phương trình:  $\frac{1}{2}\log_{\sqrt{2}}(x+3) + \frac{1}{4}\log_4(x-1)^8 = \log_2(4x). \quad (1)$

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là:  $\begin{cases} x+3 > 0 \\ (x-1)^8 > 0 \\ 4x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \quad (2).$

Với điều kiện (2) thì  $\log_{\sqrt{2}}(x+3) = \log_2(x+3)^2 = 2\log_2(x+3);$

$$\log_2(4x) = 2 + \log_2 x; \log_4(x-1)^8 = \log_2(x-1)^4 = 4\log_2|x-1|.$$

Khi đó: (1)  $\Leftrightarrow \log_2(x+3) + \log_2|x-1| - \log_2 x = 2$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{(x+3)|x-1|}{x} = 2 \Leftrightarrow (x+3)|x-1| = 4x$$

$$\begin{cases} x > 1 \\ (x+3)(x-1) = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x^2 - 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3; x = -3 + 2\sqrt{3}.$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1 \\ (x+3)(1-x) = 4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 + 6x - 3 = 0 \end{cases}$$

**Thí dụ 5:**

Giải hệ phương trình sau:

$$\begin{cases} \log_2 x + \log_4 y + \log_4 z = 2 & (1) \\ \log_3 y + \log_9 z + \log_9 x = 2 & (2) \\ \log_4 z + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 & (3). \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để (1)(2)(3) có nghĩa là  $x > 0, y > 0, x > 0$ , khi đó

$$(1)(2)(3) \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 x^2 + \log_4 y + \log_4 z = 2 \\ \log_9 y^2 + \log_9 z + \log_9 x = 2 \\ \log_{16} z^2 + \log_{16} x + \log_{16} y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_4 (x^2 yz) = 2 \\ \log_9 (xy^2 z) = 2 \\ \log_{16} (xyz^2) = 2. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 yz = 16 \\ xy^2 z = 81 \\ xyz^2 = 256 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = \frac{27}{8} \\ z = \frac{32}{3}. \end{cases}$$

**Thí dụ 6:**

Giải hệ phương trình sau: 
$$\begin{cases} \log_y \sqrt{xy} = \log_x y & (1) \\ 2^x + 2^y = 3 & (2) \end{cases}$$

**Giải**

Điều kiện để (1) (2) có nghĩa là  $x > 0, y > 0, x \neq 1$  và  $y \neq 1$ . Khi đó ta có

$$(1) \Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log_y x + 1) = \log_x y \quad (3).$$

Đặt  $\log_x y = t$ , ta có  $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t} + 1\right) = t \Leftrightarrow 2t^2 - t - 1 = 0$  (suy từ (3))

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_x y=1 \\ \log_x y=-\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ y=\frac{1}{\sqrt{x}} \end{cases}$$

Thay  $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$  vào (2) và có  $2^x + 2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 3$  (4)

– Nếu  $x > 1$  thì  $2^x > 2$  và  $2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 0 \Rightarrow VT(4) > 3$ : Vô nghiệm.

– Nếu  $0 < x < 1$  thì  $2^{\frac{1}{\sqrt{x}}} > 2$  và  $2^x > 0 \Rightarrow VT(4) > 3$ : Vô nghiệm.

Tóm lại:  $x = y = \log \frac{3}{2}$  là nghiệm duy nhất của hệ (1)(2).

**Loại 3:** Phương pháp lôgarit hóa giải phương trình siêu việt:

#### Thí dụ 1

Giải phương trình:  $x^{\frac{\log x + 5}{3}} = \lg 10^{5 + \lg x}$  (1)

##### Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x > 0$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \lg \left( x^{\frac{\log x + 5}{3}} \right) = \lg 10 \Leftrightarrow \frac{\lg x + 5}{3} \lg x = 5 + \lg x \quad (2)$$

Đặt  $t = \lg x$ , khi đó từ (2) ta có:  $t^2 + 2t - 15 = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=3 \\ t=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lg x=3 \\ \lg x=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1000 \\ x=\frac{1}{100000} \end{cases}$$

#### Thí dụ 2:

Giải phương trình  $5^{\lg x} = 50x^{\lg 5}$  (1).

##### Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x > 0$ . Áp dụng công thức  $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ , ta có:

$$(1) \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 50 - 5^{\lg x} \Leftrightarrow 5^{\lg x} = 5^2 \Leftrightarrow x = 100.$$

**Loại 4:** Một số phương pháp đặc biệt giải phương trình siêu việt:

Người ta hay sử dụng hai phương pháp đặc biệt sau đây:

+ Phương pháp chiều biến thiên hàm số.

+ Phương pháp đánh giá hai vế để giải một lớp phương trình siêu việt.

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D – 2006)**

$$\text{Cho hệ phương trình: } \begin{cases} e^x - e^y = \ln(1+x) - \ln(1+y) & (1) \\ y - x = a & (2) \end{cases}$$

Chứng minh rằng với mọi  $a$ , hệ có nghiệm duy nhất.

### Giải

$$\text{Ta có (1)(2)} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x + a \\ e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$(4)$$

Như vậy hệ (1)(2) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi phương trình

$$f(x) = e^{x+a} - e^x + \ln(1+x) - \ln(1+a+x) = 0$$

có nghiệm duy nhất trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

$$\text{Ta có } f'(x) = e^{x+a} - e^x + \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+a+x}.$$

Do  $a > 0$  nên  $f'(x) > 0 \quad \forall x > -1 \Rightarrow f(x)$  là hàm đồng biến khi  $x > -1$

$$\text{Ta có } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x (e^a - 1) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{1+x}{1+x+a} = +\infty,$$

$$\text{còn } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Như vậy do tính liên tục của  $y = f(x)$  suy ra phương trình  $f(x)=0$  có nghiệm duy nhất trên khoảng  $(-1; +\infty) \Rightarrow$  đpcm.

#### **Thí dụ 2:**

$$\text{Giải phương trình: } 2^{\sqrt{3-x}} = -x^2 + 8x - 14 \quad (1)$$

### Giải

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x \leq 3$ .

$$\text{Đặt } f(x) = 2^{\sqrt{3-x}} \Rightarrow f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{3-x}} 2^{\sqrt{3-x}} \ln 2 < 0.$$

Vậy  $g(x) = -x^2 + 8x - 14$  là hàm nghịch biến khi  $x \leq 3$ .

Mặt khác  $f(3) = g(3) = 1$ , nên (1) có nghiệm duy nhất  $x = 3$ .

#### **Nhận xét:**

Ta sử dụng kết quả quen biết sau đây.

Xét phương trình  $f(x) = g(x)$ ,  $x \in D$ .

Nếu trên miền  $D$ ,  $f(x)$  là hàm đồng biến, còn  $g(x)$  là hàm nghịch biến. Hơn nữa phương trình có nghiệm trên  $D$ . Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất trên  $D$ .

#### **Thí dụ 3:**

Giải phương trình:

$$5^x + 4^x + 3^x + 2^x = \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} - 2x^3 + 5x^2 - 7x + 17 \quad (1).$$

### Giải

Ta có

$$(1) \Leftrightarrow 5^x + 4^x + 3^x + 2^x - \left( \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x} \right) = -2x^3 + 5x^2 - 7x + 17 \quad (2).$$

$$\text{Đặt } \begin{cases} VT = f(x) \\ VP = g(x) \end{cases}$$

Để thấy  $f(x)$  là hiệu của hàm đồng biến  $y = 5^x + 4^x + 3^x + 2^x$  và hàm nghịch biến

$\frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \frac{1}{6^x}$  nên nó là hàm đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

Mặt khác,  $g'(x) = -6x^2 + 10x - 7 < 0 \forall x \in \mathbb{R}$ , nên  $g(x)$  là hàm nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ . Lại có  $f(1) = g(1) = 13$ . Từ đó (1) có nghiệm duy nhất  $x = 1$ .

**Thí dụ 4:**

Giải phương trình:  $\log_2(1 + \sqrt{x}) = \log_3 x$  (1).

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x > 0$ . Đặt  $t = \log_3 x$ . Khi đó

$$(1) \Leftrightarrow \log_2\left(1 + \sqrt{3^t}\right) = t \Leftrightarrow 1 + (\sqrt{3})^t = 2t \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t = 1 \quad (2).$$

Vì  $f(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^t + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^t$  là hàm nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ . Lại có  $f(2) = 1$ . Vậy (2) có

nghiệm duy nhất  $t = 2$ , tức là  $x = 9$  là nghiệm duy nhất của (1).

**Nhận xét:**

Ta đã dùng kết quả quen biết sau:

Xét phương trình  $f(x) = m$ ,  $x \in D$ . Nếu trên miền  $D$ ,  $f(x)$  là hàm số hoặc là luôn luôn đồng biến (hoặc luôn luôn nghịch biến) và phương trình có nghiệm trên  $D$ . Khi đó phương trình có nghiệm duy nhất trên  $D$ .

**Thí dụ 5 :**

Giải phương trình:  $4(x-2)[\log_2(x-3) + \log_3(x-2)] = 15(x+1)$  (1).

**Giải**

Điều kiện để (1) có nghĩa là  $x > 3$ .

$$\text{Ta có } (1) \Leftrightarrow \log_2(x-3) + \log_3(x-2) = 15 \frac{x+1}{4(x-2)}.$$

Dễ thấy  $f(x) = \log_2(x-3) + \log_3(x-2)$  là hàm đồng biến khi  $x > 3$ .

$$g(x) = \frac{15}{4} \frac{x+1}{x-2} \text{ là hàm nghịch biến khi } x > 3 \text{ (do } g'(x) = \frac{-45}{4(x-2)^2} < 0 \text{)}$$

Lại có  $f(11) = g(11) = 5$ . Vậy  $x = 11$  là nghiệm duy nhất của (1).

**Thí dụ 6:**

Giải phương trình:  $x^{\log_2 9} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - x^{\log_2 3}$  (1).

**Giải**

Với điều kiện  $x > 0$ , ta có: (1)

$$\Leftrightarrow 9^{\log_2 x} = x^2 \cdot 3^{\log_2 x} - 3^{\log_2 x} \Leftrightarrow 3^{\log_2 x} = x^2 - 1 \quad (2) \text{ (do } 3^{\log_2 x} > 0 \text{)}.$$

$$\text{Đặt } \log_2 x = t, \text{ khi đó } (2) \Leftrightarrow 3^t = 4^t - 1 \Leftrightarrow f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t = 1 \quad (3)$$

Vì  $f(t)$  là hàm nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  và  $f(1) = 1$ , nên (3) có nghiệm duy nhất  $t = 1$ , tức là  $x = 2$  là nghiệm duy nhất của (1).

## §2. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

Ta luôn sử dụng các kết quả cơ bản sau đây trong việc giải bất phương trình siêu việt:

+ Nếu  $a > 1$ , thì

$$1/ \begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ x \in D \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) > 0 \\ x \in D \end{cases}$$

ở đây  $D$  là tập xác định của bất phương trình.

+ Nếu  $0 < a < 1$  thì

$$1/ \begin{cases} a^{f(x)} > a^{g(x)} \\ x \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ x \in D \end{cases}$$

$$2/ \begin{cases} \log_a f(x) > \log_a g(x) \\ x \in D \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < f(x) < g(x) \\ x \in D \end{cases}$$

**Loại 1:** Sử dụng các phép biến đổi đưa bất phương trình về dạng bất phương trình cơ bản:

**Thí dụ 1:** (Đề thi tuyển sinh Đại học khối D-2008)

Giải bất phương trình:  $\log_{\frac{1}{2}} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \geq 0$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2 - 3x + 2}{x} > 0 & (2) \\ \frac{x^2 - 3x + 2}{x} \leq 1 & (3) \end{cases}$$

Dễ thấy nghiệm của (2) là  $0 < x < 1$  hoặc  $x > 2$ , còn nghiệm của (3) là  $x < 0$  hoặc  $2 - \sqrt{2} \leq x \leq 2 + 2\sqrt{2}$ .

Từ đó nghiệm cần tìm là  $2 - \sqrt{2} \leq x < 1$  hoặc  $2 < x \leq 2 + \sqrt{2}$

**Thí dụ 2:** (Đề thi tuyển sinh khối B - 2008)

Giải bất phương trình:  $\log_{0,7} \left( \log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4} \right) < 0$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \log_6 \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+4} > 0 \\ \frac{x^2+x}{x+4} > 1 \\ \frac{x^2+x}{x+4} < 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+4} > 1 & (2) \\ \frac{x^2+x}{x+4} < 6 & (3) \end{cases}$$

Hệ (2) (3) dễ dàng giải được (bạn đọc tự nghiệm lấy) và ta có:  $\begin{cases} -4 < x < -3 \\ x > 8. \end{cases}$

**Thí dụ 3: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối A – 2007)**

Giải bất phương trình:  $2\log_3(4x-3) + \log_1(2x+3) \leq 2$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ 2\log_3(4x-3) - \log_3(2x+3) \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \log_3 \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ \frac{(4x-3)^2}{2x+3} \leq 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ (4x-3)^3 \leq 18x+27 \end{cases}$$

$$(\text{do } x > \frac{3}{4} \Rightarrow 2x+3 > 0) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{3}{4} \\ 8x^2 - 21x - 9 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{3}{4} < x \leq 3.$$

**Thí dụ 4:**

Giải bất phương trình:  $5^{2x-10-3\sqrt{x-2}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$  (1).

**Giải**

Ta có:

$$(1) \Leftrightarrow \frac{5^{2x-10}}{5^{3\sqrt{x-2}}} - 4 \cdot 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow (5^{x-2})^2 - 4 \cdot 5^{x-5} \cdot 5^{3\sqrt{x-2}} - 5 \cdot (5^{3\sqrt{x-2}}) < 0$$

$$\Leftrightarrow (5^{x-5} + 5^{3\sqrt{x-2}})(5^{x-5} - 5 \cdot 5^{3\sqrt{x-2}}) < 0 \Leftrightarrow 5^{x-5} < 5^{1+3\sqrt{x-2}}$$

$$\Leftrightarrow x-5 < 1+3\sqrt{x-2} \Leftrightarrow x-6 < 3\sqrt{x-2} \Leftrightarrow 2 \leq x \leq 18$$

(bạn đọc tự nghiệm lại kết quả này).

**Loại 2:** Đặt ẩn phụ để đưa bất phương trình siêu việt về bất phương trình đại số trung gian.

Phương pháp giải như loại 1, §1. Xét các thí dụ sau:



**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2006)**

Giải bất phương trình:  $\log_5(4^x + 144) - 4\log_5 2 < 1 + \log_5(2^{x-2} + 1)$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \log_5 \frac{4^x + 144}{16} < \log_5 [5(2^{x-2} + 1)] \Leftrightarrow \frac{4^x + 144}{16} < 5(2^{x-2} + 1) \quad (2)$$

Đặt  $t = 2^x > 0$  khi đó (2) có dạng:

$$t^2 - 20t + 64 < 0 \Leftrightarrow 4 < t < 16 \Leftrightarrow 4 < 2^x < 16 \Leftrightarrow 2 < x < 4.$$

**Thí dụ 2:**

Giải bất phương trình sau:  $\log_2(2^x - 1) \log_{\frac{1}{2}}(2^{x+1} - 2) > -2$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có (1)} \Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) \log_2(2^{x+1} - 2) < 2$$

$$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) [1 + \log_2(2^x - 1)] - 2 < 0 \quad (2).$$

Đặt  $t = \log_2(2^x - 1)$ , nên (2) có dạng:

$$t(t + 1) - 2 < 0 \Leftrightarrow t^2 + t - 2 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} < 2^x - 1 < 1 \Leftrightarrow \frac{5}{4} < 2^x < 3 \Leftrightarrow -2 + \log_2 5 < x < \log_2 3.$$

**Thí dụ 3:**

Giải bất phương trình sau:  $25^{2x-x^2+1} + 9 \cdot 2^{2x-x^2+1} \geq 34 \cdot 15^{2x-x^2}$  (1).

**Giải**

$$\text{Ta có: (1)} \Leftrightarrow 25 + 9 \left( \frac{9}{25} \right)^{2x-x^2} - 34 \left( \frac{15}{25} \right)^{2x-x^2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 9t^2 - 34t + 25 \geq 0 \quad (\text{ở đây } t = \left( \frac{3}{5} \right)^{2x-x^2} > 0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \leq 1 \\ t \geq \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left( \frac{3}{5} \right)^{2x-x^2} \leq 1 \\ \left( \frac{3}{5} \right)^{2x-x^2} \geq \frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - x^2 \geq 0 \\ 2x - x^2 \leq -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \leq 1 - \sqrt{3} \text{ hoặc } 0 \leq x \leq 2 \text{ hoặc } x \geq 1 + \sqrt{3}.$$

**Loại 3:** Sử dụng điều kiện có nghĩa của bất phương trình để đơn giản hóa phép giải:

**Thí dụ 1: (Đề thi tuyển sinh Đại học khối B – 2002)**

Giải bất phương trình:  $\log_x(\log_3(9^x - 72)) \leq 1$  (1).

### Giải

$$\text{Điều kiện để (1) có nghĩa là } \begin{cases} 9^x - 72 > 0 \\ \log_3(9^x - 72) > 0 \Leftrightarrow 9^x - 72 > 1 \Leftrightarrow 9^x > 73 \quad (2). \\ x > 0, x \neq 1 \end{cases}$$

Từ (2) suy ra nói riêng  $x > 1$ . Vì thế

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x > 73 \\ \log_3(9^x - 72) \leq x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9^x > 73 \\ 9^x - 72 \leq 3^x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x > \sqrt{73} \\ (3^x)^2 - 3^x - 72 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{73} < 3^x \leq 9 \Leftrightarrow \log_3 \sqrt{73} < x \leq 2 \Leftrightarrow \log_9 73 < x \leq 2.$$

**Nhận xét:**

Mặc dù ẩn số của  $x$  nằm ở cơ số, nên về lí thuyết thì phải xét hai khả năng  $x > 1$  và  $0 < x < 1$ . Tuy nhiên, do ở đây từ điều kiện (2) suy ra  $x > 1$ , nhờ vậy phép giải đơn giản đi.

**Thí dụ 2:**

Giải bất phương trình:

$$5x + \sqrt{6x^2 + x^3 - x^4} \log_2 x > (x^2 - x) \log_2 x + 5\sqrt{6 + x - x^2} \quad (1).$$

### Giải

$$\text{Điều kiện để (1) có nghĩa là: } \begin{cases} 6 + x - x^2 \geq 0 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < x \leq 3. \quad (2)$$

Để dàng biến đổi bằng cách nhóm và đặt thừa số chung, ta có:

$$(1) \Leftrightarrow (x \log_2 x - 5) (\sqrt{6 + x - x^2} + 1 - x) > 0 \quad (3)$$

Do điều kiện (2) nên ta có:  $x \log_2 x - 5 \leq 3 \log_2 3 - 5 = \log_2 27 - 5 < 0$ .

$$\text{Vì thế (3)} \Leftrightarrow \sqrt{6 + x - x^2} + 1 - x < 0 \Leftrightarrow \sqrt{6 + x - x^2} < x - 1 \Leftrightarrow \frac{5}{2} < x \leq 3.$$

**Nhận xét:**

Nhờ có điều kiện (2) với nhận xét  $x \log_2 x - 5 < 0$  nên phép giải (3) đơn giản đi quá nhiều!

## **BÀI TẬP TỰ GIẢI**

**Bài 1:**

Giải phương trình:  $\log_x 2 + 2 \log_{2x} 4 = \log_{\sqrt{2x}} 8$ .

**Đáp số:**  $x = 2$ .

**Bài 2:** Giải phương trình:  $\log_3(3^x - 1) \log_3(3^{x+1} - 3) = 6$ .

$$\text{Đáp số: } \begin{cases} x = \log_3 10 \\ x = \log_3 \frac{28}{27} \end{cases}$$

**Bài 3:**

Giải phương trình:  $\log_{\sqrt{2}} \sqrt{x+1} - \log_{\frac{1}{2}} (3-x) - \log_8 (x-1)^3 = 0$ .

Đáp số:  $x = \frac{1 + \sqrt{17}}{2}$ .

**Bài 4:**

Giải phương trình:  $9^{x^2+x-1} - 10.3^{x^2+x-2} + 1 = 0$ .

Đáp số:  $x = 0, x = \pm 1; x = -2$ .

**Bài 5:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} 6^x - 2.3^y = 12 \\ 6^x.3^y = 12 \end{cases}$$

Đáp số:  $x = 1, y = \log_3 2$ .

**Bài 6:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} \log_2 (x^2 + y^2) = 5 \\ 2 \log_4 x + \log_2 y = 4. \end{cases}$$

Đáp số:  $x = y = 4$ .

**Bài 7:**

Giải hệ phương trình: 
$$\begin{cases} x - 4|y| + 3 = 0 \\ \sqrt{\log_4 x} - \sqrt{\log_2 y} = 0. \end{cases}$$

Đáp số:  $(1; 1)$  và  $(9; 3)$ .

**Bài 8**

Giải bất phương trình:  $\sqrt[3]{\log_{\frac{1}{2}} x} + \log_4 x^2 - 2 > 0$ .

Đáp số:  $\frac{1}{16} < x < \frac{1}{2}$ .

**Bài 9:**

Giải bất phương trình:  $3^{2x+4} + 45.6^x - 9.2^{x+2} \leq 0$ .

Đáp số:  $x \leq -2$ .

**Bài 10:**

Giải bất phương trình:  $4x + 8\sqrt{2-x^2} > 4 + (x^2 - x)2x + x.2^{x+1}\sqrt{2-x^2}$ .

Đáp số:  $-1 < x \leq \sqrt{2}$ .