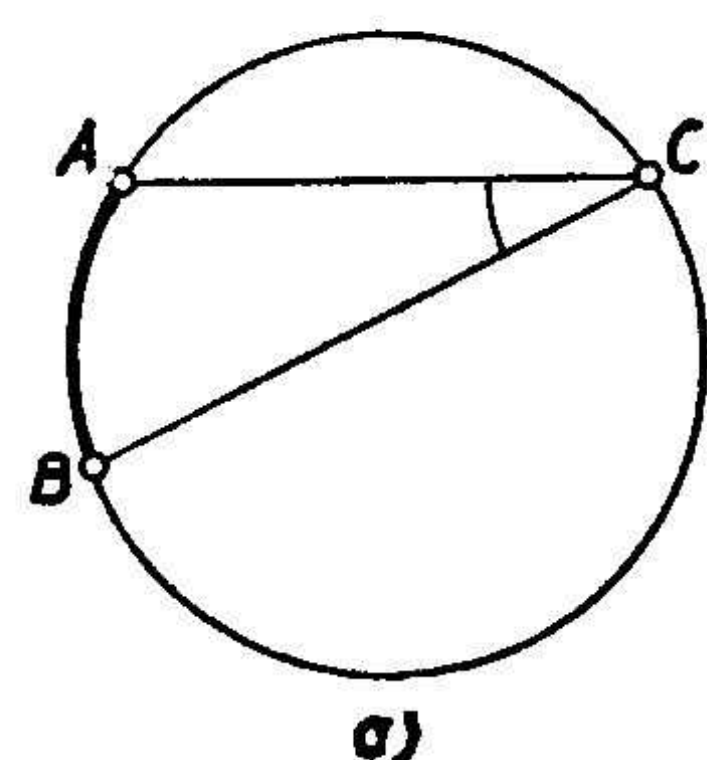


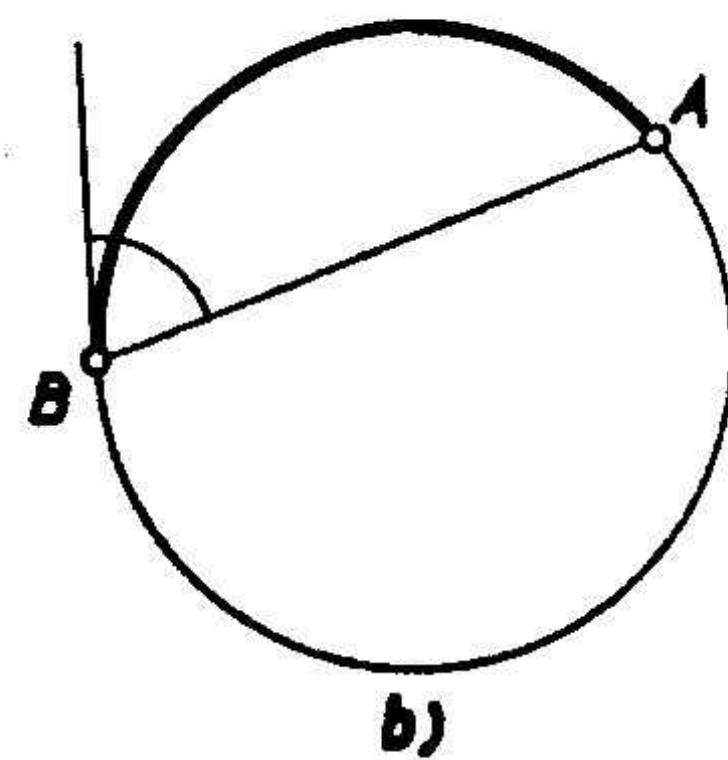
16. § Középponti és kerületi szögek

A kör sugarai, húrjai és érintői által alkotott szögeket vizsgáljuk. A középponti szöggel már 15.1-ben megismerkedtünk.

16.1 A kör két közös végpontú húrja által alkotott konvex szöget *kerületi szögnek* nevezzük. Az AC , BC húrok által alkotott ACB kerületi szögről (80a ábra) azt mondjuk, hogy a szögtartományban levő, tehát a C pontot nem tartalmazó AB köríven nyugszik.



80. ábra

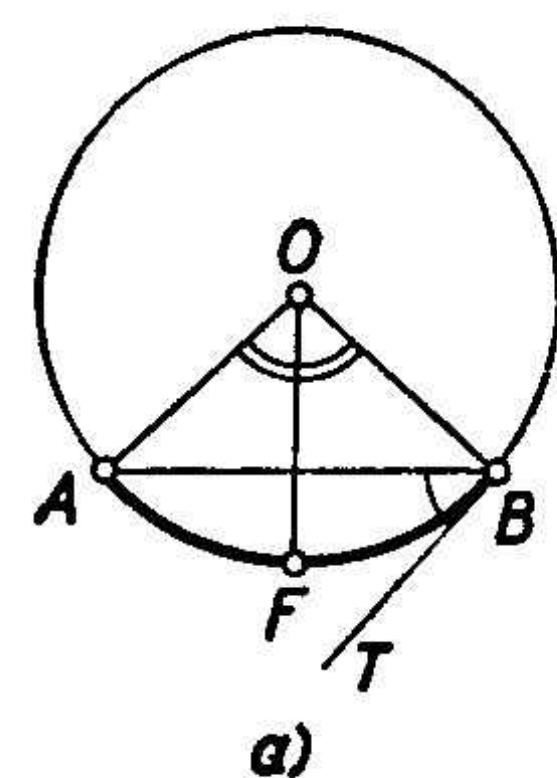


b)

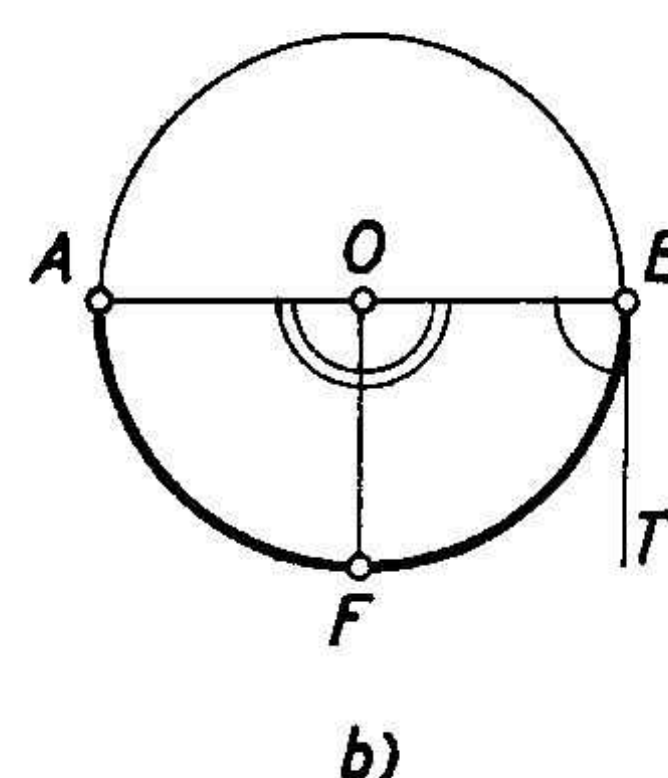
Kerületi szögnek mondjuk azt a konvex szöget is, amelyet egy húr és ennek egyik végpontjából induló, a kört érintő félegyenes alkot. Az ilyen szögről is mondjuk, hogy azon a köríven nyugszik, amely a húr végpontjait köti össze, s amelyet a szögtartomány tartalmaz (80b ábra).

Tétel. A kerületi szög kétszerese egyenlő az ugyanazon az íven nyugvó középponti szöggel.

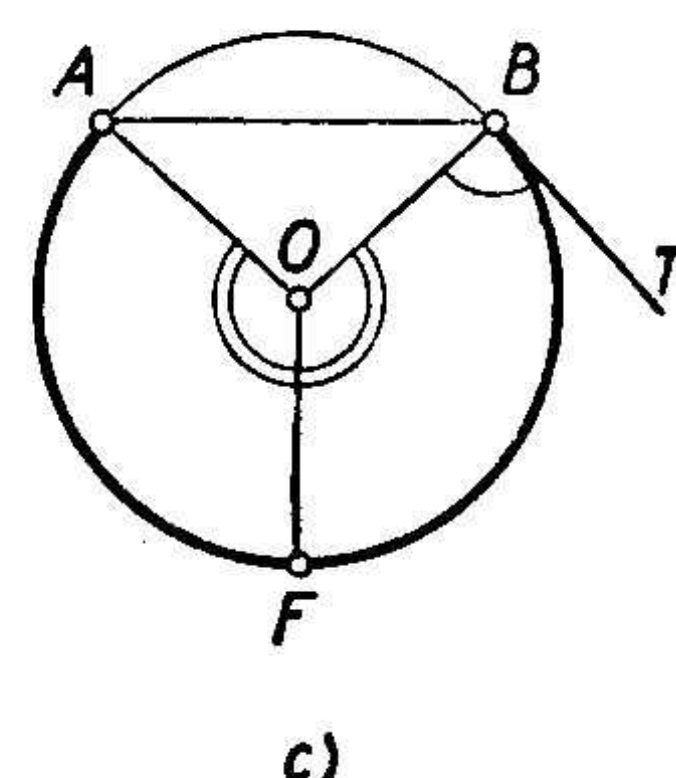
Bizonyítás. a) Az állítást először a húr és érintő alkotta kerületi szögekre bizonyítjuk (81. ábra). Tekintsük az AB íven nyugvó ABT kerületi szöget. Felezzé az OF sugár az ugyanezen az íven nyugvó AOB középponti szöget.



a)



b)



c)

81. ábra

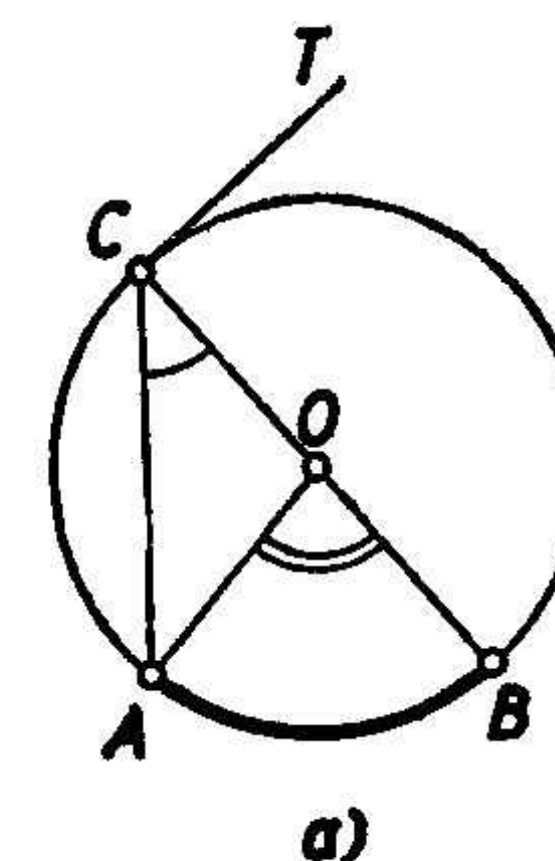
szöget. Azt kell bizonyítanunk, hogy az $ABT \sphericalangle$ és $FOB \sphericalangle$ egyenlő. Ezek merőleges szárú konvex szögek, tehát vagy egyenlők, vagy kiegészítő szögek. Egyenlőségükre abból következtethetünk, hogy nem lehet az egyikük hegyes, a másik meg nem. Ez valóban így van, mert az $ABT \sphericalangle$ -re és az $FOB \sphericalangle$ -re is áll, hogy akkor és csak akkor hegyes, ha az AFB körív a félkörnél kisebb.

b) Tekintsük most a húrok által alkotott ACB kerületi szöget (82. ábra). Húzzuk meg a C pontban a kört érintő CT félegyenest olyan irányban, hogy az ACT kerületi szög az ABC íven nyugodjék. Minthogy B az $ACT \sphericalangle$ tartományában van,

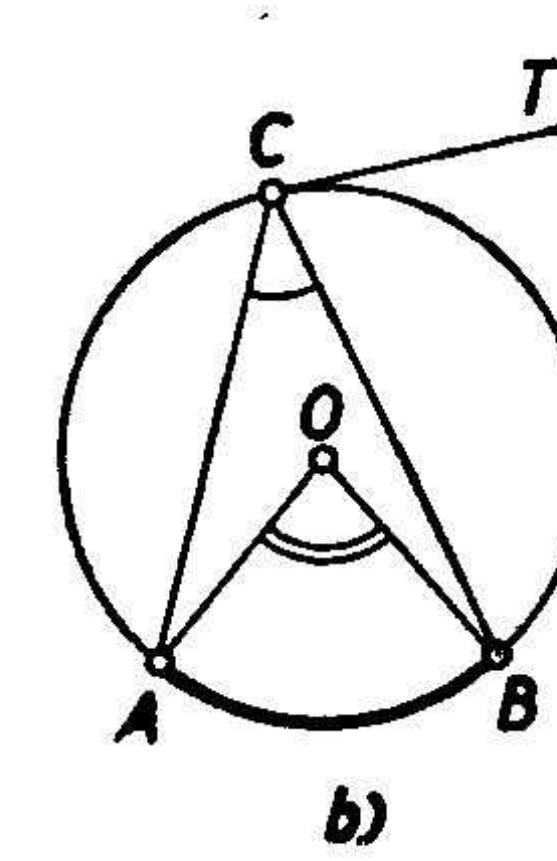
$$ACB \sphericalangle = ACT \sphericalangle - BCT \sphericalangle.$$

A jobb oldalon álló szögek a) szerint feleakkorák, mint az ABC íven, illetőleg

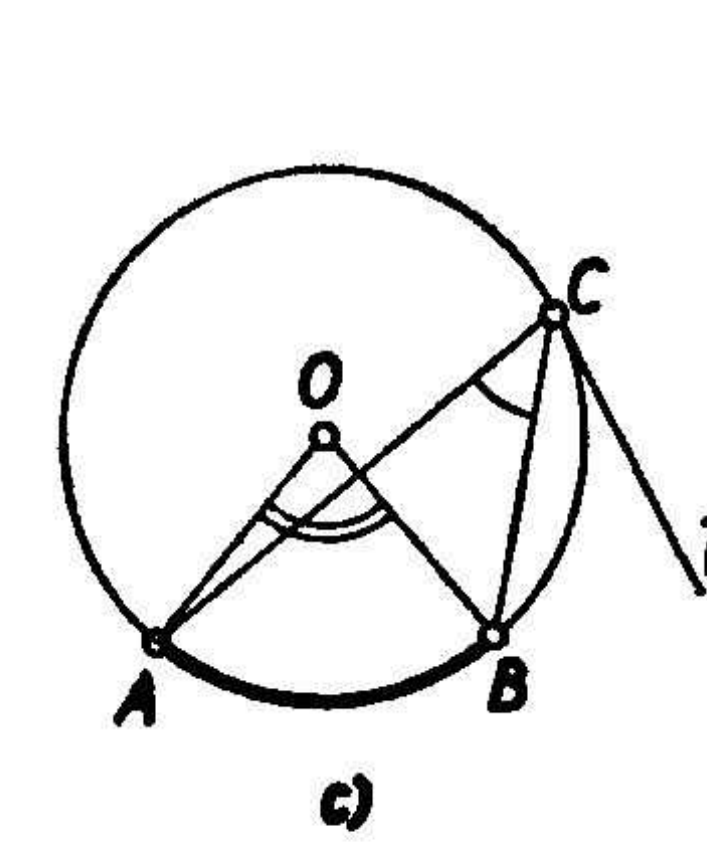
a BC íven nyugvó középponti szög. Ebből következik, hogy a bal oldali szög feleakkora, mint e két szög különbsége, azaz az AB íven nyugvó középponti szög. —



a)



b)



c)

82. ábra

Tételünk azt is kimondja, hogy minden félkörön nyugvó, vagyis átmérőn nyugvó kerületi szög derékszög.

Tétel. Egy kör egybevágó körívein egyenlő kerületi szögek nyugszanak.

Ezzel azt is kimondtuk, hogy az ugyanazon íven nyugvó kerületi szögek egyenlők. Ha már foglalkoztunk volna a körív mérésével, akkor egybevágó ívek helyett egyenlő íveket is mondhatnánk.

Bizonyításként elég arra hivatkoznunk, hogy egybevágó ívekhez egyenlő középponti szögek tartoznak. —

B1 Szakaszunk mindkét tétele változatlanul helyes marad, ha megfelelően irányított szögtartományokra mondjuk ki.

a) Az első tétel esetében természetesen úgy értjük ezt, hogy az egymáshoz tartozó kerületi és középponti szögeket olyan módon irányítjuk, hogy kezdőszáraik is és végszáraik is a körvonalon találkozzanak.

Eleg az állítást húr és érintő alkotta kerületi szögre igazolni, mert ebből ugyanúgy következtethetünk tovább, mint ahogyan bizonyításunk b) részében eljártunk.

Ha a húr az érintőre merőleges (81b ábra), akkor helyes az állítás, hiszen az $ABT \sphericalangle$ és $AOB \sphericalangle$ ebben az esetben egy állású irányított szögtartományok.

Ha az $ABT \sphericalangle$ nem derékszög (81a és 81c ábra), akkor forgassuk el 90° -kal olyan irányban, hogy a BT szár az OB félegyenes irányába jusson. Minthogy az $ABT \sphericalangle$ és $FOB \sphericalangle$ merőleges szárú, a mondott elforgatás a BA szárat az OF egyenessel párhuzamos helyzetbe viszi. Nem lehetséges azonban, hogy az OF félegyenessel ellentétes irányba jusson, mert akkor az (irányítatlan) $ABT \sphericalangle$ az $FOB \sphericalangle$ kiegészítő szöge volna, márpedig tudjuk, hogy ezek egyenlők és nem derékszögek. Kell tehát, hogy az $ABT \sphericalangle$ az elforgatás után az $FOB \sphericalangle$ -gel egy állású helyzetbe jusson, vagyis hogy ezek az irányított szögtartományok egyenlők legyenek. Ezért a $2ABT \sphericalangle = AOB \sphericalangle$ összefüggés az irányított szögtartományokra is fennáll.

b) Második tételünk esetében is természetes az, hogy ha irányított szögtartományokról szólnunk, akkor megköveteljük, hogy az egybevágó körívek olyan végpontjai helyezkedjenek el a kezdőszárazon (és a végszárazon is), amelyek egymást fedik akkor, ha a két körívet a síkban elforgatva egymásra fektetjük.

Állításunk helyessége következik abból, hogy az egymásba elforgatható ívekhez egyenlő irányított középponti szögtartományok tartoznak, és ezekről a) -ban már beláttuk, hogy a hozzájuk tartozó irányított kerületi szögtartományoknak a kétszeresei.

B2 A középponti és a kerületi szögeket irányított szögekként is tekinthetjük. Nem beszélhetünk azonban ilyenkor arról, hogy a szögek melyik köríven nyugszanak, hanem csak arról a rendezett (azaz sorrendben megadott) pontpárról, ahol a szögek első és második szára a körlemez elhagyja. Egybevágó ívek helyett most a kör középpontja körüli elforgatással fedésbe hozható rendezett pontpárokat kell tehát mondanunk.

Ha szakaszunk két tételét rendezett pontpáron nyugvó irányított szögekre mondjuk ki, akkor az első tétel helyes marad, a második azonban nem.

a) Az irányított szögekre kimondott első tétel helyességét a következőképpen látjuk be: Az irányított kerületi szög mértékei között szerepel annak az irányított konvex szögtartományának a mértéke is, amelynek kezdő és végszára az irányított kerületi szög első és második szárával azonos. Ehhez az irányított kerületi szögtartományhoz B1 szerint egy kétszer akkora irányított középponti szögtartomány tartozik. Ez utóbbinak a mértéke szerepel annak az irányított középponti szögnek a mértékei között, amelyikről a bizonyítandó tétel szól, hiszen szárai sorrendre nézve is azonosak.

Ezek szerint helyes az állítás, mert a benne szereplő irányított szögeknek vannak olyan mértékei, amelyekre az állítás teljesül, s ebből következik, hogy a 360° -os modulusra vonatkozó kongruencia minden más mértékre is fennáll.

Megjegyezhetjük, hogy az első tétel sem volna helyes irányított szögek körében, ha nem a kerületi szög kétszereséről, hanem a középponti szög feléről szólna. Ez abból következik, hogy az imént bizonyított kongruenciát nem oszthatjuk 2-vel (vö. 3.5 B2).

b) A második tétel már nem szolgáltat 360° modulusra vonatkozó helyes kongruenciát, ha irányított szögekre mondjuk ki. Ha a tétel a kerületi szögek kétszeresének egyenlőségét mondaná ki, akkor irányított szögek körében is helyes volna, hiszen ezek a kétszeresek a) szerint a megfelelő és egybevágó irányított középponti szögek mértékei. Az így kapott 360° -os modulusra vonatkozó kongruenciát nem szabad azonban 2-vel egyszerűsíteni (vö. 3.5 B2). A 88. ábrán meg is győződhetünk arról, hogy az irányított $BAD \nlessdot$ és $BCD \nlessdot$ nem egyenlő.

Helyes eredményhez jutunk azonban a 2-vel való egyszerűsítés révén akkor, ha a kapott összefüggést 180° modulusra vonatkozó kongruenciának tekintjük. Az algebrának arra a tételére kell csak hivatkoznunk, hogy a kongruenciát szabad egy (0-tól különböző) számmal osztanunk, ha a modulus is elosztjuk ezzel a számmal. A kapott kongruenciát úgy értelmezhetjük, hogy az nem irányított szögekről, hanem e szögek száregyeneseinek irányított hajlásszögéről szól, hiszen ilyen szögek egyenlősége éppen 180° modulusú kongruenciát jelent.

Okoskodásunk a következő eredményhez vezetett el: Ha A és B a kör két rögzített pontja, és P a kör tetszőleges pontja, akkor a PA , PB egyenesek irányított hajlásszöge nem függ P megválasztásától. Más szóval ez azt jelenti, hogy P helyzetétől függetlenül mindig ugyanolyan irányban és ugyanakkora szöggel kell a PA egyenest P körül elforgatni, hogy a PB egyenest fedje. A P pont egybe is eshetik az A , B pontok valamelyikével, s akkor az összekötő egyenes szerepét az érintő játssza.

Utolsó eredményünkhöz egyszerűbben is eljuthattunk volna (lásd B3). Célunk azonban itt az volt, hogy rámutassunk arra, hogyan módosulnak ennek a szakasznak a tételei, ha a különféle szögfajtákra akarjuk azokat kimondani.

B3 Szakaszunk tételeinek néhány átszövegezését és általánosítását tárgyaljuk.

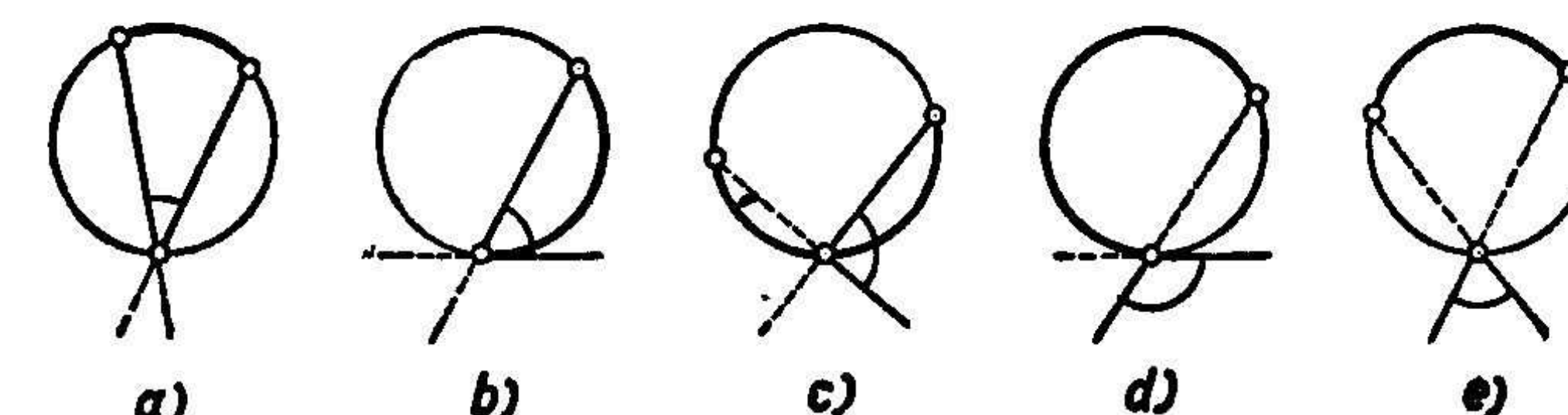
a) Első tételünket a következőképpen szövegezhettük: Ha egy a körön mozgó P pont az AB ívet bejárva A -ból B -be jut, továbbá O a középpont és C a körnek egy az AB ívhez nem tartozó rögzített pontja, akkor P mozgása során a CP egyenes feleakkora szöggel fordul el, mint az OP egyenes. Megengedhetjük azt is, hogy C az AB ív valamelyik végpontja legyen, de akkor a forgó CP egyenes kezdőhelyzetét vagy véghelyzetét az érintő adja.

Ezt az eredményt így is kimondhatjuk: Ha a P pont a kör rögzített C pontjából kiindulva állandó szögsebességgel bejárja a kört és végül ismét C -be jut, akkor a CP egyenes is állandó, de feleakkora szögsebességgel forog. E forgó egyenes kezdő és véghelyzete a C -ben vont érintő.

Ez megint más alakban a következőképpen mondható ki: Ha a kör C pontján áthaladó egyenes C körül állandó szögsebességgel forog, akkor ennek az egyenesnek a körrel alkotott második metszéspontja ugyancsak állandó, de kétszer akkora szögsebességgel halad a körön. A második metszéspont helyett itt maga a C pont veendő akkor, amikor a forgó egyenes a kört érinti.

Ha nem szögsebességről, hanem elfordulásról beszélünk, akkor utolsó eredményünk a következőt adja (83. ábra): Ha egy konvex szögtartomány csúcsa a körön van, és azt a körívet tekintjük, amelyik ennek a szögtartománynak, valamint csúcshoz tartományának egyesítésében van, akkor az ehhez az ívhez tartozó középponti szög kétszer akkora, mint az eredeti konvex szög. Ez szakaszunk első tételének általánosítása. Tartalmilag újat azonban csak a 83c ábra esete nyújt.

b) Ha a körön állandó szögsebességgel keringő P pontot a kör két pontjával, a C_1 , C_2 pontokkal kötjük össze, akkor a) második bekezdése alapján tudjuk, hogy a C_1P és C_2P egyenesek állandó és egyenlő szögsebességgel forognak. Itt is az érintő veendő akkor, amikor azonos pontokat kellene összekötnünk. Hozzátehetjük, hogy a két forgó egyenes egy irányban forog, hiszen ha ellentétes irányban forognának, akkor közben párhuzamossá is válnának, márpedig mindig van metszéspontjuk.



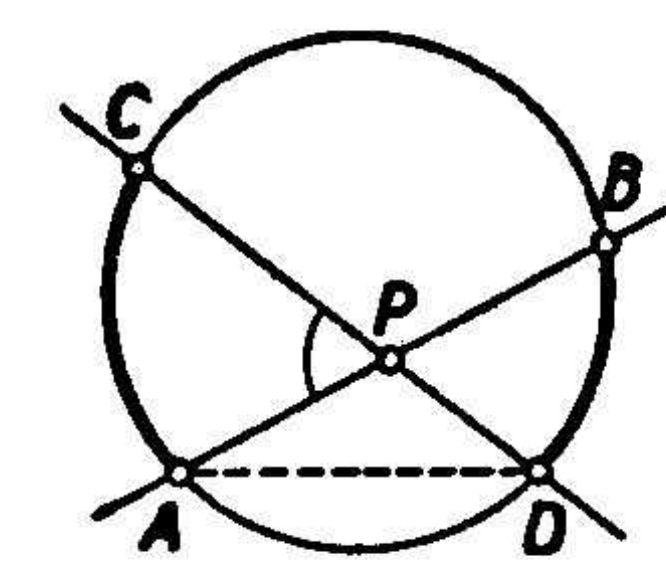
83. ábra

Ha tehát a kör C_1 , C_2 , P pontjai által meghatározott C_1P , C_2P egyeneseket a C_1 , C_2 pontok körül ugyanabban az irányban és ugyanakkora szögsebességgel forgatjuk, azaz úgy mozgatjuk, hogy közben az irányított hajlásszögük ne változzék meg, akkor a metszéspontjuk a kört írja le. Ha ez a metszéspont a C_1 , C_2 pontok valamelyikével azonos, akkor a két egyenes egyike ott érinti a kört.

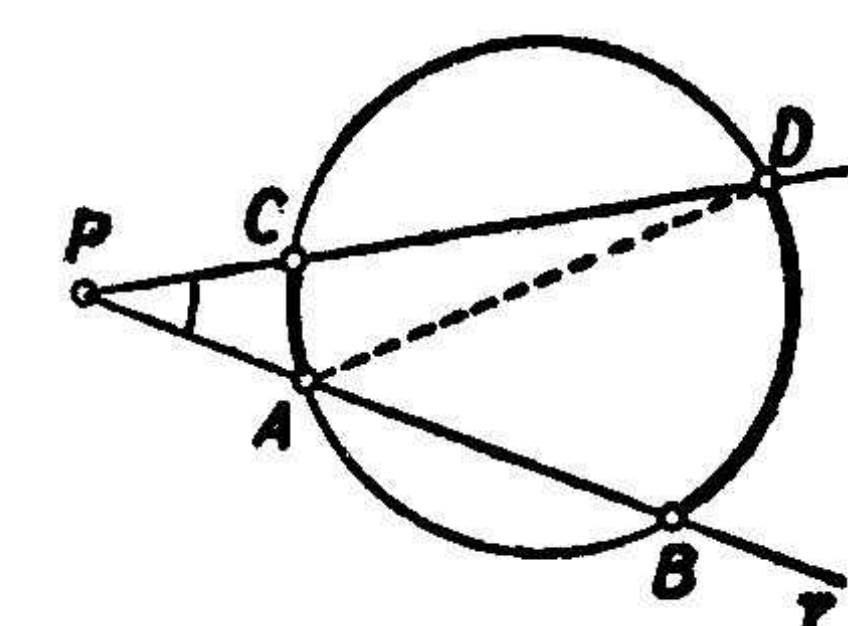
Ezek szerint a kör C_1 , C_2 , P pontjai által meghatározott C_1P , C_2P egyenesek irányított hajlásszöge akkor és csak akkor egyenlő a C_1Q , C_2Q egyenesek irányított hajlásszögével, ha Q is a körön van. Itt is megengedhetjük, hogy P vagy Q a C_1 , C_2 pontok valamelyikével azonos legyen, ha azonos körpontok összekötő egyenesének az érintőt tekintjük.

Utolsó eredményünk egyik fele B2b) végeredményét ismétli meg, a másik fele már 16.3 és 16.4 tárgykörébe vág.

Felelősen talán hangsúlyoznunk, hogy ebben a megjegyzésben csak egyszerűbb szövegezés és könnyebb áttekintés kedvéért beszéltünk szögsebességről. Mindezt elmondhattuk volna úgy is, hogy csak elforgatásokról szólnunk.



a)



b.)

16.2 Tétel. a) Ha egy konvex szög csúcsa a körön belül van, akkor ez a szög egyenlő azon két középponti szög összegének a felével, amelyeknek egyike a szög szárait összekötő, másika pedig a csúcshoz szárait összekötő körívhez tartozik.

b) Ha egy konvex szög csúcsa a körön kívül van, és mindkét szára metszi vagy érinti a kört, akkor ez a szög egyenlő ahhoz a két ívhez tartozó középponti szög különbségének a felével, amelyek a szög szárait összekötő két körívhez tartoznak.

Bizonyítás. A lehetséges eseteket a 84. ábra mutatja be. Ennek az ábrának a jelöléseit használjuk. Az ábrán bemutatott esetek mindegyikében az AC és BD ívekhez tartozó középponti szögekről van szó.

84. ábra

a) Ha P a körön belül van, akkor a vizsgált P az ADP Δ külső szöge, tehát

$$P \sphericalangle = \angle BAD + \angle ADC.$$

A jobb oldali kerületi szögek a BD , AC íveken nyugszanak, s ezért összegük az íveken nyugvó középponti szögek összegének felével egyenlő.

b) Ha P a körön kívül van, akkor a TAD az ADP Δ külső szöge, tehát

$$P \sphericalangle = \angle TAD - \angle ADP.$$

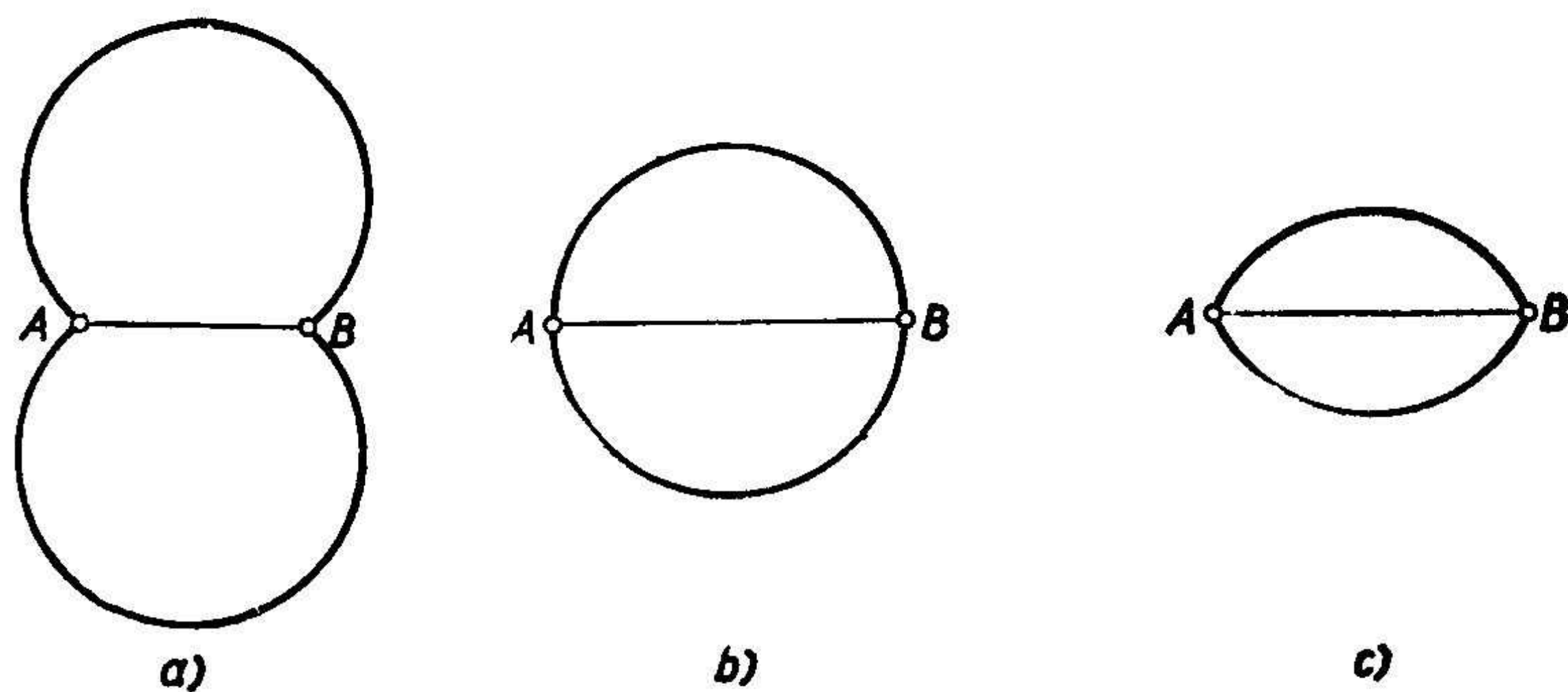
A jobb oldali szögek a BD és az AC íven nyugvó kerületi szögek, ezért különbségük az ívekhez tartozó középponti szögek különbségének felével egyenlő. —

A b) eset bizonyítása azt is mutatja, hogy a különbség képzésekor az az ív adja a kivonandót, amelyik a P pontból nézve konvex, vagyis az az ív, amelyet a P pont és az ív végpontjai által meghatározott háromszög tartalmaz.

B Ha ennek a szakasznak a tételét egybevetjük azzal, amit 16.1 B3-ban bizonyítottunk, és a 83. ábrán mutattunk be, akkor a következő általánosításhoz jutunk: Ha két csúcshöz tartományát tekintjük, és egy kör úgy helyezkedik el, hogy van közös pontja a tartománypár által tartalmazott egyenesek mindegyikével, akkor a csúcshoz tartozó kétszerese egyenlő azoknak a középponti szögeknek az algebrai összegével, amelyek a tartománypár által tartalmazott körívekhez tartoznak; az algebrai összeg itt azt jelenti, hogy negatív előjellel kell venni az olyan ívhez tartozó középponti szöget, amely a szögek csúcsából nézve konvex.

16.3 Ha a P pont az AB szakasznak nem végpontja, akkor a konvex APB \sphericalangle -ről mondjuk, hogy az AB szakasz a P pontból ekkora szögben látható. Ezt a szöget látószögnek mondjuk.

Tétel. A sík azon pontjainak a mértani helye, amelyekből egy szakasz megadott (0° és 180° közötti) szögben látható, a szakasz végpontjait összekötő, a szakaszra vonatkozólag szimmetrikusan elhelyezkedő két körív belseje (85. ábra).

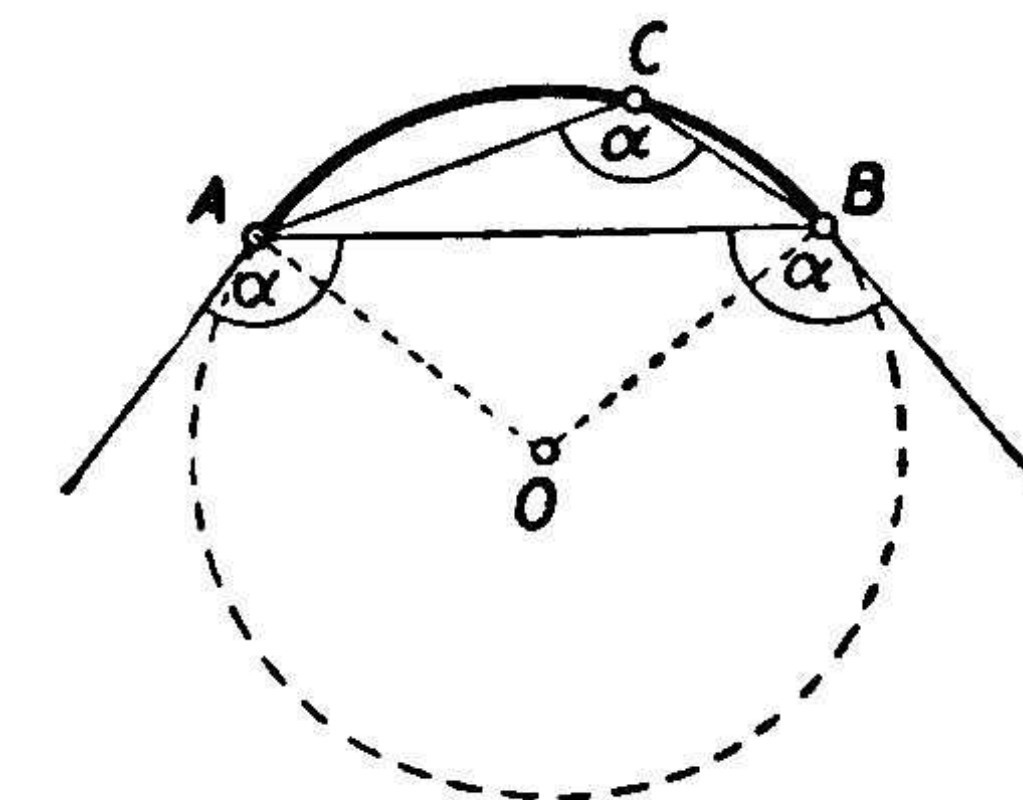


85. ábra

Azért mondtuk, hogy a mértani hely a körívek belseje, mert a két végpont nem tartozik a mértani helyhez, hiszen nem is lehet szó arról, hogy a szakasz mekkora szögben látható a végpontjaiból. A tétel csak 0° és 180° közötti látószögekről szól, hiszen a 180° -os látószögű pontok mértani helye a szakasz belseje, a 0° -os látószögűeké pedig a szakaszt meghosszabbító két félegyenes belseje.

Bizonyítás. A szakasz egyenesére nézve szimmetrikusan elhelyezkedő pontokból ugyanakkora szögben látható a szakasz, hiszen a tükrözés a szögeket nem változtatja meg. Ezért elég a keresett mértani helynek csak a szakasz egyenesére által határolt egyik félsíkban levő részét vizsgálni.

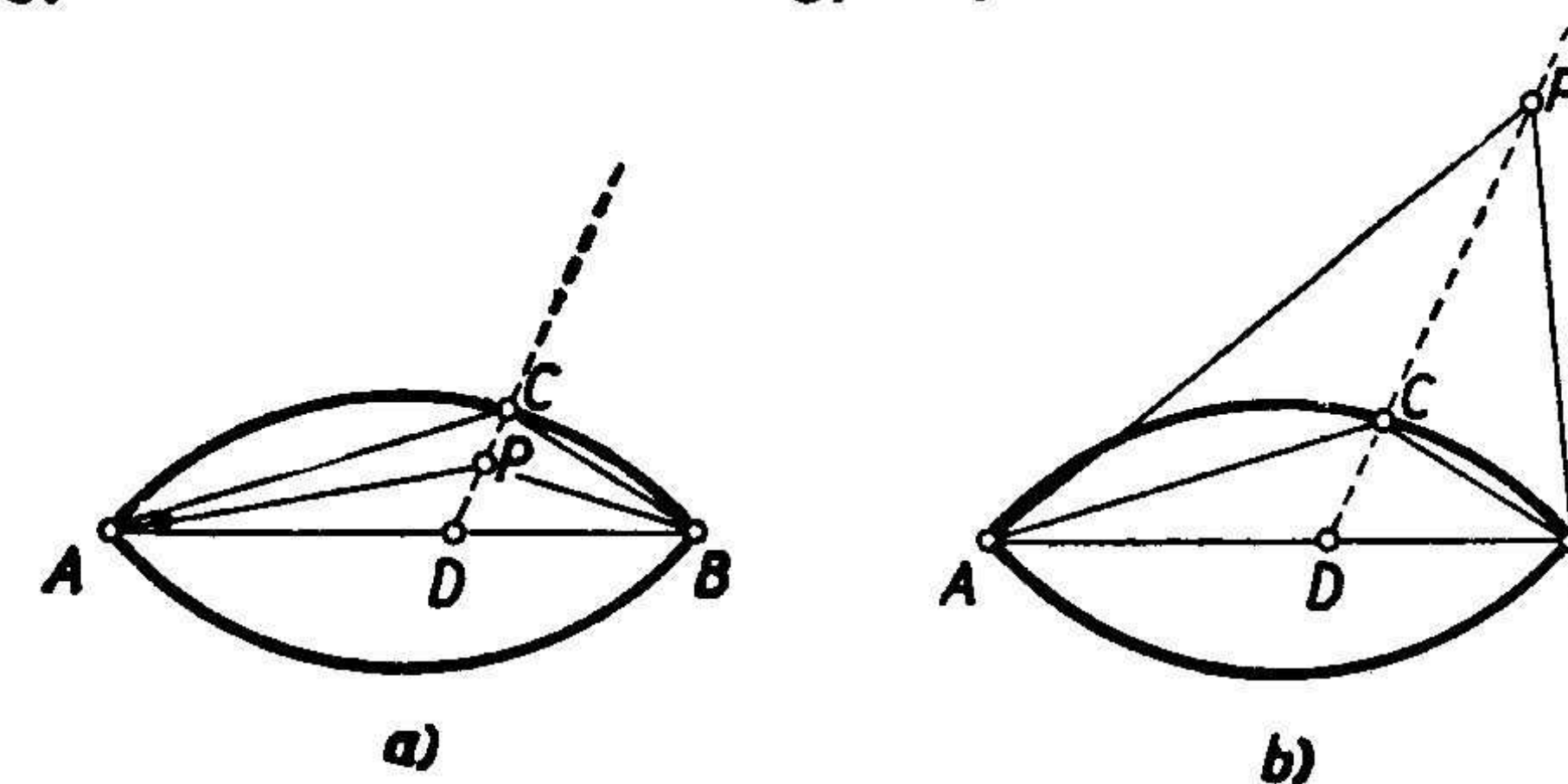
a) Tekintsük az AB szakaszt, és szemeljük ki az AB egyenes által határolt egyik félsíkot. A ki nem szemelt félsíkban olyan A kezdőpontú és B végpontú félegyeneset veszünk fel, amelyek az AB szakasszal a megadott α szöget zárják be (86. ábra). A felvett félegyenesekre A -ban és B -ben merőlegest állítunk. Ezek $\alpha < 180^\circ$ miatt nem merőlegesek AB -re, következésképpen metszik AB felezőmerőlegesét, mégpedig a szimmetria miatt ugyanabban az O pontban. O körül az A , B pontokon áthaladó kört írunk, és ennek a körnek a kiszemelt félsíkban elhelyezkedő AB ívét tekintjük. Az AB szakasz α szögben látható az AB ív bármely belső C pontjából, mert az ACB \sphericalangle , valamint az imént felmért α szögek mindannyian ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek, ti. a rajzolt körnek a ki nem szemelt félsíkban elhelyezkedő íven nyugszanak.



86. ábra

b) Be kell még látnunk, hogy ha a kiszemelt félsík P pontja nincs a kapott AB íven, akkor az AB szakasz P -ből α -tól különböző szögben látható. Feltehetjük, hogy P nincs az AB egyenesen, hiszen ott a látószög csak 0° vagy 180° lehet.

Az AB szakaszon belül egy D pontot választunk (87. ábra). A DP félegyenes az AB körívet egy C pontban metszi, és C az AB ívnek belső pontja, hiszen P nincs az AB egyenesen. Az ABC és ABP háromszögek egymástól különbözők, és az egyik tartalmazza a másikat.



87. ábra

Ha P az AB ív által határolt körszeleten belül van, ha tehát P a DC szakasz belső pontja, akkor az ABC Δ tartalmazza az ABP Δ -et, és ezért 9.1 második tétele szerint $\angle APB > \angle ACB = \alpha$. Ha viszont P a körszeleten kívül van, ha tehát P a DC szakasz meghosszabbításán helyezkedik el, akkor az ABP Δ tartalmazza az ABC Δ -et, és ezért $\angle APB < \angle ACB = \alpha$.

Ezek szerint az AB szakasz a vizsgált P pontok mindegyikéből α -tól különböző szögben látható. —

A tétel állításán túlmenően azt is bebizonyítottuk, hogy a tételben szereplő két körív által határolt síkidomon belül a látószög nagyobb, azon kívül viszont kisebb, mint az adott szög.

Tétel (THALES* tétel). A sík azon pontjainak mértani helye, amelyekből egy megadott szakasz derékszögben látható, a szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó kör, elhagyva belőle a szakasz végpontjait.

* A görög Thales i. e. 624—548 élt. Ő a legrégebb ismert nevű matematikus.

A szakasz végpontjait ki kell zárni, mert ott látószögről nem beszélhetünk. A szakaszhoz mint átmérőhöz tartozó kört tételünkre való hivatkozással *Thales-körnek* nevezzük (85b ábra). A tétel egyik felét már 16.1-ben kimondtuk, amikor megállapítottuk, hogy az átmérőn nyugvó kerületi szög derékszög.

Bizonyítás. A tétel az előző tétel speciális eseteként adódik. Ha $\alpha = 90^\circ$, akkor az előző bizonyításban szereplő O pont az AB szakasz felezőpontja. Ezért az ott szereplő körívek félkörök, amelyek együttesen az AB átmérőjű kört alkotják. —

Az előző tételnél mondottakra hivatkozva azt is megállapíthatjuk, hogy az átmérő a kör belső pontjaiból tompa- (vagy 180° -os) szögben látható, a külső pontokból pedig hegyesszögben.

Tételünk alapján kimondhatjuk, hogy két adott ponton áthaladó és egymásra merőleges egyenesek metszéspontjának mértani helye a két pont összekötő szakasza fölé mint átmérő fölé írt kör. Azt is kimondhatjuk, hogy ha az A pontból a B ponton áthaladó egyenesekre merőlegest bocsátunk, akkor a talppontok mértani helye az AB átmérőjű kör. Hangsúlyozzuk, hogy Thales tételének ezeknél az átfogalmazásainál nincs szükség a szakasz végpontjainak a kizárására.

A Thales tételére adott bizonyításunk korántsem a legegyszerűbb. A tétel tartalmilag szinte azonos 14.5 tételével, és azt jóval egyszerűbben bizonyítottuk. A mi tárgyalásunk e szakasz két tételének a kapcsolatát domborította ki.

16.4 Azokat az egyszerű sokszögeket, amelyeknek minden csúcsa egy körön van, amelyeknek tehát minden oldala a körnek húrja, *húrsokszögeknek* (körbe írt sokszög) nevezzük. Azt is mondjuk, hogy az ilyen sokszögek köré írható, vagy hogy van *körülírt körük*. Minden húrsokszög konvex, hiszen nem lehet pontja egyik oldal meghosszabbításán sem. Így tehát csak konvex sokszögeknek lehet körülírt körük.

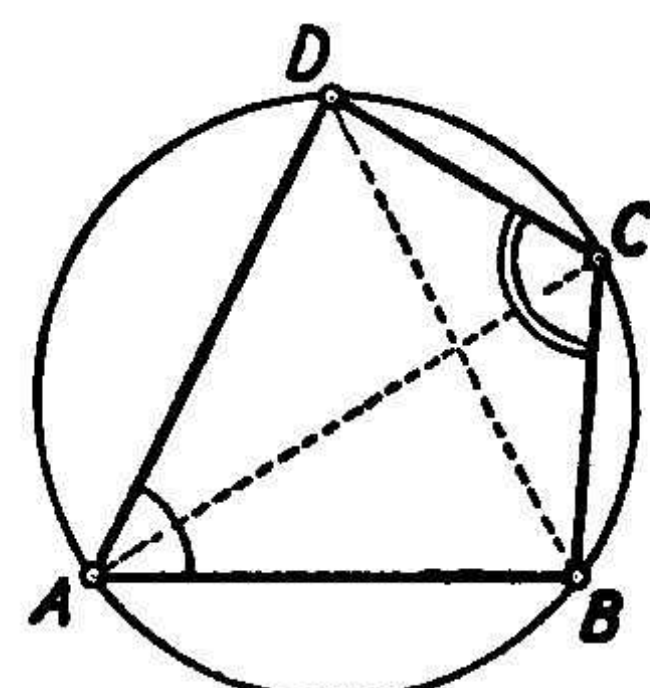
Mi most a *húrnégyszögekkel* foglalkozunk (88. ábra).

Tétel. Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két szemközti szöge kiegészítő szög.

Mint hogy a négyszög szögösszege 360° , következik, hogy ha két szemközti szöge kiegészítő szög, akkor a másik két szöge is az. A tételt így is szövegezzhetjük: egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha két-két szemközti szögének összege egyenlő. Ez a megfogalmazás tételünket 15.5 tételeivel állítja párhuzamba.

Bizonyítás. a) Egy húrnégyszög két szemközti szöge a körnek olyan két íven nyugszik, amelyeknek az együttese a teljes körvonal, azaz középponti szögeik összege 360° . Ezért a szemközti szögek összege feleakkora. Ez a megadott feltétel szükségességét bizonyítja.

b) Ha az $ABCD$ négyszögben $\angle A + \angle C = 180^\circ$, akkor az előző szakasz értelmében A azon a köríven van, amelyiknek a belseje a BD egyenes által határolt egyik félsíkban az olyan pontok mértani helye, ahonnan a BD távolság $\angle A$ alatt látható. E körívet teljes körre kiegészítő körív belső pontjaiból a BD távolság a) szerint az $\angle A$ kiegészítő szöge alatt látható. E kiegészítő körív belseje az előző szakasz szerint a másik félsík ilyen tulajdon-



88. ábra

ságú pontjainak a mértani helye. Ezért C ezen a kiegészítő köríven van, és a teljes kör az $ABCD$ négyszög valamennyi csúcsát tartalmazza. Beláttuk tehát, hogy a tételben megadott feltétel elégséges is. —

Tételünk alapján megállapíthatjuk, hogy a paralelogrammák közül csak a téglalapok, a trapézok közül pedig csak a szimmetrikus trapézok húrnégyszögek.

B1 Ha az $ABCD$ négyszög húrnégyszög, akkor $\angle ACB = \angle ADB$, mert ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. Ez a feltétel a konvex négyszögek körében elégséges is, mert ha a feltétel teljesül, akkor az A, B, C, D pontok az előző szakasz szerint egy köríven vannak. Azt azonban nem mondhatjuk ki, hogy feltételünk minden négyszögre, tehát a konkáv négyszögek körében is elégséges, ugyanis konkáv négyszög nem lehet húrnégyszög, pedig a feltétel ezekre is teljesülhet. Ezt belátjuk, ha a CD szakasz felezőmerőlegesén a szakasz által el nem választott A, B pontokat veszünk fel, és az $ABCD$ konkáv négyszöget tekintjük.

B2 Egy sokszögnek egynél több körülírt köre nem lehet, hiszen a sokszögnek legalább három csúcsa van, két körnek pedig 15.6 szerint kettőnél több közös pontja nem lehet.

17. § Hasonlóság

A köznapi nagyítás és kicsinyítés szemlélete vezet el a hasonlóság fogalmának megalkotásához. Hasonló alakzatok alapvető tulajdonságait tárgyaljuk.

17.1 *Hasonlóságnak* nevezünk egy ponttranszformációt, ha bármely két pont képének a távolsága a pontok távolságával osztva mindig ugyanazt a (0-tól különböző) hányadost adja. Azt a pozitív számot, amely megmondja, hogy a képtávolságok a megfelelő tárgytávolságoknak hányszorosai, a hasonlóság *arányának* nevezzük. Ha az arányszám 1-nél nagyobb, nagyítással, ha 1-nél kisebb, kicsinyítéssel állunk szemben. Ha az arányszám 1, akkor a hasonlóság egybevágóság.

A hasonlóság értelmezéséből nyomban következik, hogy minden hasonlóságnak van inverz transzformációja, hogy ez is hasonlóság, és hogy ez utóbbinak az aránya az eredeti hasonlóság arányának a reciproka. Nyomban belátható az is, hogy ha egymást követően két hasonlóságot alkalmazunk, akkor olyan hasonlósághoz jutunk, amelynek az aránya a két alkalmazott hasonlóság arányának a szorzata.

Két képtávolság aránya mindig megegyezik a hasonlóság által hozzájuk rendelt tárgytávolságok arányával. Ha ugyanis a tárgytávolságok és a megfelelő képtávolságok hossza a_1, b_1 és a_2, b_2 , akkor a hasonlóság szerint $a_2 : a_1 = b_2 : b_1$, s ebből az aránypárból a beltagok felcserélésével $a_2 : b_2 = a_1 : b_1$ adódik. Ezt a tulajdonságot akár a hasonlóság definiálására is felhasználhatjuk. Röviden azt mondhatjuk tehát, hogy a hasonlóság aránytartó (ti. a távolságok arányát megtartó) leképezés.

Két alakzat *hasonló*, ha van olyan hasonlóság, amely az egyikhez a másikat rendeli. A hasonlóság jele \sim . Ha a hasonló alakzatokat pontjaikkal adjuk meg, akkor szokás szerint az egymásnak megfelelő pontokat ugyanannyiadik helyre írjuk. Az $A_1B_1C_1 \triangle \sim A_2B_2C_2 \triangle$ írásmód azt is jelzi tehát, hogy pl. A_1 és A_2 egymásnak megfelelő pontok.

A fentebb mondottakból következik, hogy ha egy alakzat hasonló egy másikhoz, akkor ez utóbbi is hasonló az elsőhöz, valamint hogy ha két alakzat

mindegyike hasonló egy harmadikhoz, akkor ez a két alakzat is hasonló egymáshoz. Ez utóbbi kijelentés azt is kimondja, hogy ha egy alakzat két egybevágó alakzat egyikéhez hasonló, akkor hasonló a másikhoz is.

A1 A hasonlóság definíciójában mi csak a távolságok arányáról szoltunk, a szögek egyenlőségéről nem. Ez felesleges lett volna, mert a szögek egyenlősége már következik a távolságárányok egyezéséből (lásd 17.4).

A2 Ismételten dolgozunk e könyvben aránypárokkal. Az $a:b$ arány eredetileg az $\frac{a}{b}$ hányadost, az $a:b=c:d$ aránypár a két hányados egyenlőségét jelenti. Elsősorban későbbi fejezetek érdekében már itt leszögezzük, hogy az aránypár fogalmát általánosítva használjuk, és pl. a $3:0=2:0$, $3:2=0:0$, $3\text{ cm}:2\text{ cm}=3:2$, $3\text{ cm}:2\text{ cm}=90^\circ:60^\circ$ aránypárokat is helyesnek mondjuk.

Az $a:b=c:d$ aránypár ebben az általánosabb értelemben azt jelenti, hogy vagy van olyan x szám, amelyre $a=xb$ és $c=xd$, vagy pedig van olyan y szám, amelyre $b=ya$ és $d=yc$. Csak azért kellett itt két lehetőségről szólni, mert az is lehet, hogy az egyik oldalon minden tag 0. A definícióból következik, hogy ha $a:b=c:d$, akkor $c:d=a:b$ (oldalak felcserélése) és $b:a=d:c$ (a tagok felcserélése mind a két oldalon). Azt is megállapíthatjuk, hogy ha $a:b=c:x$ és $a:b=c:y$, ha továbbá a nem 0 (nem 0 mértékű), akkor $x=y$ (következtetés a negyedik tagok egyenlőségére).

Ha az aránypár egyik oldalán álló mennyiségek a jobb oldalon állókkal arányba állíthatók, ha tehát mind a két oldalon ugyanolyan mennyiségfajta szerepel, akkor az $a:b=c:d$ aránypárból következtethetünk arra is, hogy $a:c=b:d$ (belsőtagok felcserélése) és $d:b=c:a$ (külsőtagok felcserélése).

Ha az aránypár két oldalán olyan mennyiségek állnak, amelyeket egymással össze-szorozhatunk, akkor kimondhatjuk, hogy az aránypár akkor és csak akkor helyes, ha a külsőtagok szorzata a belsőtagok szorzatával egyenlő. Ilyenkor tehát $a:b=c:d$, valamint $ad=bc$ egyszerre helyes vagy helytelen.

Az $a_1:a_2:\dots:a_n=b_1:b_2:\dots:b_n$ írásmód azt jelenti, hogy a két oldal bármely két-két megfelelő tagja aránypárt alkot. Ha a két oldalon egynemű mennyiségek állnak, és az egyik oldalon álló tagoknak nem mindegyike 0 (illetve 0 mértékű), akkor van olyan szám, amellyel ezeket megszorozva a másik oldalon álló tagokat kapjuk meg. A későbbiekben főként hármasarányok egyenlősége szerepel majd.

B1 Felhívjuk a figyelmet, hogy e paragrafus tárgyalása javarészt betű szerint vonatkozik a térbeli alakzatokra is. Külön felhívjuk a figyelmet ott, ahol ez nincs így.

B2 A hasonlóság egy alakzaton definiált leképezés (vö. 6.1 B2). Két síkbeli vagy térbeli alakzat mindenestre hasonló akkor, ha van olyan, a teljes síkon vagy térben definiált hasonlóság, amely az egyik alakzathoz a másikat rendeli. Nem magától értetődő azonban, hogy hasonló síkbeli vagy térbeli alakzatokhoz található-e a síknak, illetve a térnek ilyen hasonlósága. Be fogjuk bizonyítani, hogy ez így van (lásd 17.2 B).

B3 Megállapíthatjuk, hogy a sík és a tér hasonlóságai csoportot alkotnak. Ez a csoport alcsoportként tartalmazza az egybevágóságok csoportját.

B4 Megemlíthetjük, hogy körülményesebben ugyan, de tárgyalni lehetne nem lineáris alakzatok hasonlóságát anélkül, hogy arányok szerepeljenek, sőt mindennemű számolás nélkül is. Azt mondhatnók ugyanis, hogy (ha nem lineáris alakzatokról van szó) hasonlóságnak a szögtartó ponttranszformációt nevezzük, mégpedig elég, ha ezt abban a legkevesebbet mondó alakban értjük, amelyből 11.1 B2 kiindult (vö. 17.5 B2). Eszerint a sík és a tér hasonlósága olyan ponttranszformáció, amely az egyeneseket egyenesekbe viszi át és a metsző egyenesek szögét nem változtatja meg.

17.2 A hasonlóság tárgyalását az itt következő tételekre alapozzuk majd.

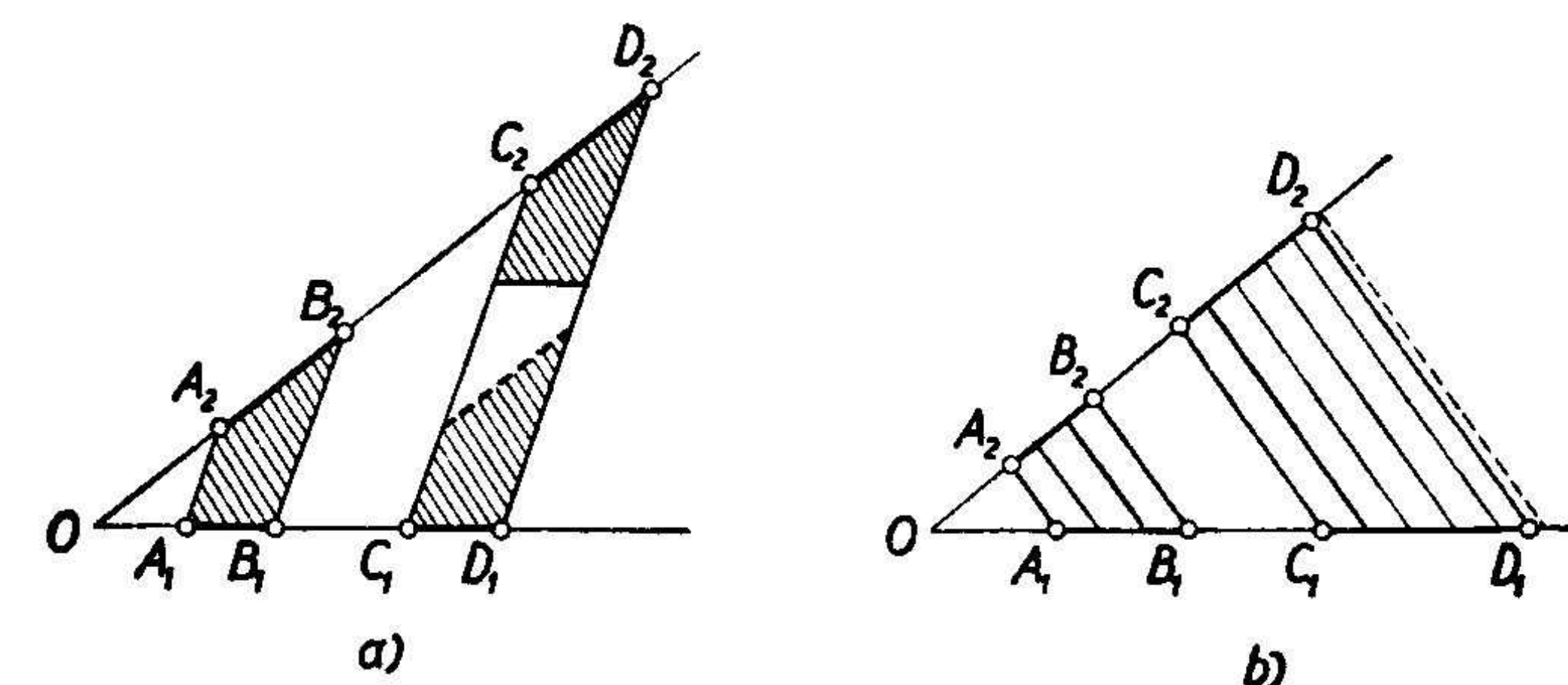
Tétel (párhuzamos szelők tétele). Ha egy szög szárait párhuzamosokkal metszük, akkor az egyik száron keletkező szakaszok aránya megegyezik a másik száron keletkező megfelelő szakaszok arányával.

A tétel a szög csúcsától a metszéspontokig terjedő és a metszéspontokat összekötő szakaszokra egyaránt vonatkozik. Az állítás akkor is helyes, ha nem

egy szög száraitól, hanem párhuzamos egyenesekről van szó, hiszen ott maguk a megfelelő szakaszok is egyenlők.

Bizonyítás. a) Először azt igazoljuk, hogy az egyik szár két egyenlő szakaszának a másik száron is két egyenlő szakasz felel meg. Legyen $A_1B_1=C_1D_1$ (89a ábra), bizonyítandó pedig az $A_2B_2=C_2D_2$ egyenlőség. Toljuk el az $A_1B_1B_2A_2$ síkidomot az OA_1 szár mentén úgy, hogy A_1B_1 fedje a vele egyenlő C_1D_1 távolságot. Az elmozgatott A_1A_2 , B_1B_2 szakaszok a párhuzamosság miatt a C_1C_2 , D_1D_2 egyenesekre kerülnek. Toljuk el újból e síkidomot, mégpedig a C_1C_2 egyenes mentén úgy, hogy a már előbb is elmozgatott A_2 pont végül a C_2 helyzetbe jusson. Eközben a már előbb is elmozgatott B_2 pont a D_2D_2 egyenesen mozog. Mivel A_2B_2 állása az eltolások során nem változik meg, A_2B_2 végül a C_2D_2 helyzetbe jut. E távolságok tehát valóban egyenlők.

b) Az általános esettel foglalkozunk. Legyen n tetszőleges természetes szám. Osszuk fel az A_1B_1 távolságot n egyenlő részre (89b ábra), és mérjük fel e részt a C_1 pontból kiindulva a C_1D_1 távolságra annyszor, ahányszor csak lehet. Ha e felmérés k -szor lehetséges, akkor



89. ábra

$$k \frac{A_1B_1}{n} \leq C_1D_1 < (k+1) \frac{A_1B_1}{n}.$$

A felmért részek végpontjain át párhuzamosokat húzunk a párhuzamos szelőkkel. Minden résznek a) szerint a másik száron is egyenlő szakaszok felelnek meg, s ezért

$$k \frac{A_2B_2}{n} \leq C_2D_2 < (k+1) \frac{A_2B_2}{n}.$$

Egyenlőtlenségeinket A_1B_1 -gyel, illetőleg A_2B_2 -vel osztva azt kapjuk, hogy a C_1D_1/A_1B_1 és C_2D_2/A_2B_2 számok egyike sem kisebb $\frac{k}{n}$ -nél, viszont mindegyikük kisebb, mint $\frac{k+1}{n}$. A két közrefogott szám különbsége kisebb tehát, mint a két közrefogó számé, azaz

$$\left| \frac{C_1D_1}{A_1B_1} - \frac{C_2D_2}{A_2B_2} \right| < \frac{1}{n}.$$

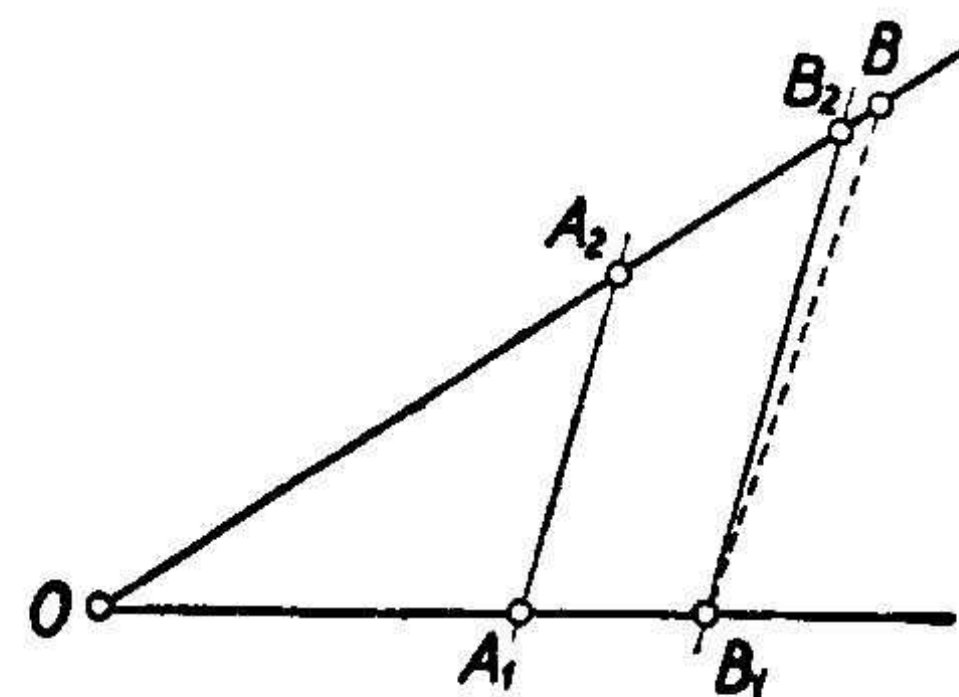
Minthogy az n természetes számot önkényesen választottuk meg, kimondhatjuk, hogy a bal oldali érték minden természetes szám reciprokánál kisebb. Ebből következik, hogy a bal oldali érték 0, hiszen 0 az egyetlen olyan nem negatív szám, amely minden természetes szám reciprokánál kisebb. Beláttuk ilyen módon, hogy a $C_1D_1 : A_1B_1 = C_2D_2 : A_2B_2$ aránypár helyes. —

Nemcsak ugyanannak a szárnak a szakaszait állíthatjuk arányba, hanem a két szár egy-egy megfelelő szakaszát is, és kimondhatjuk, hogy a párhuzamosok által kimetszett megfelelő szakaszpárok aránya minden ilyen szakaszpárra ugyanakkora. Ez a bizonyított aránypárból adódik, ha abban a beltagokat felcseréljük.

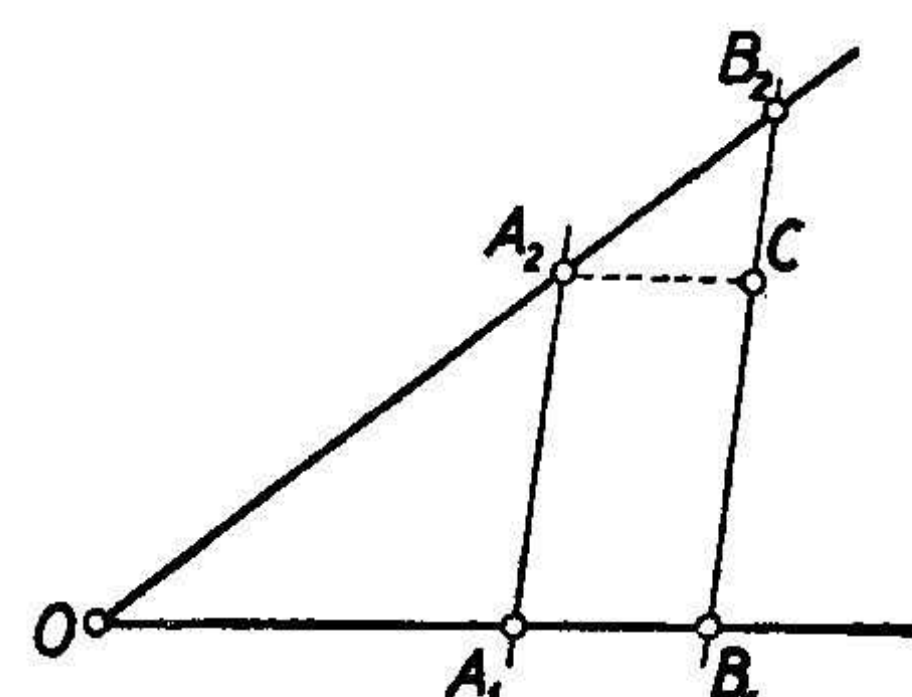
A következő tétel a most bizonyított tétel megfordítása.

Tétel. Ha két egyenes egy szög száraiból olyan szakaszokat vág le, amelyeknek az aránya mind a két száron ugyanaz, akkor a két egyenes párhuzamos.

A tétel a szelők által a két szárból lemetszett szeletekről, vagyis a szög csúcsától a szelők metszéspontjaiig terjedő szakaszokról szól. Az előző tétellel együtt azt mondja ki tételünk a 90. ábra jelöléseivel, hogy A_1A_2 és B_1B_2 akkor és csak akkor párhuzamos, ha $OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2$ teljesül. Kimondhattuk volna azt is, hogy a párhuzamosságnak szükséges és elégséges feltétele az, hogy az egyik szelő által levágott szeleteknek az aránya megegyezzen a másik szelő által levágottakéval, hogy tehát $OA_1 : OA_2 = OB_1 : OB_2$, hiszen ez az aránypár az előbbiből a beltagok felcserélésével adódik.



90. ábra



91. ábra

Bizonyítás. Feltesszük hogy $OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB_2$. A B_1 ponton át A_1A_2 -vel párhuzamosat húzunk. Ez az OA_2 szárt a B pontban metszi. Bizonyítanunk kell, hogy B és B_2 azonos. A 90. ábra torzítva szemlélteti az okoskodást.

Minthogy $A_1A_2 \parallel B_1B_2$, az előző tétel szerint $OA_1 : OB_1 = OA_2 : OB$. Ha ezt összevetjük a B_2 -re vonatkozó aránypárral, akkor $OB = OB_2$ adódik. Ezért $B = B_2$ és $A_1A_2 \parallel B_1B_2$. —

Tétel. Egy szög szárait metsző párhuzamosokból a szárak által kimetszett szakaszok aránya megegyezik a párhuzamosok által az egyes szárból lemetszett szeletek arányával.

E tételnek már a kimondása is feltételezi e szakasz első tételének az ismeretét, hiszen a párhuzamos szakaszok aránya csak úgy lehet mindkét szár szeleteinek az arányával egyező, ha ezek egymással is egyenlők.

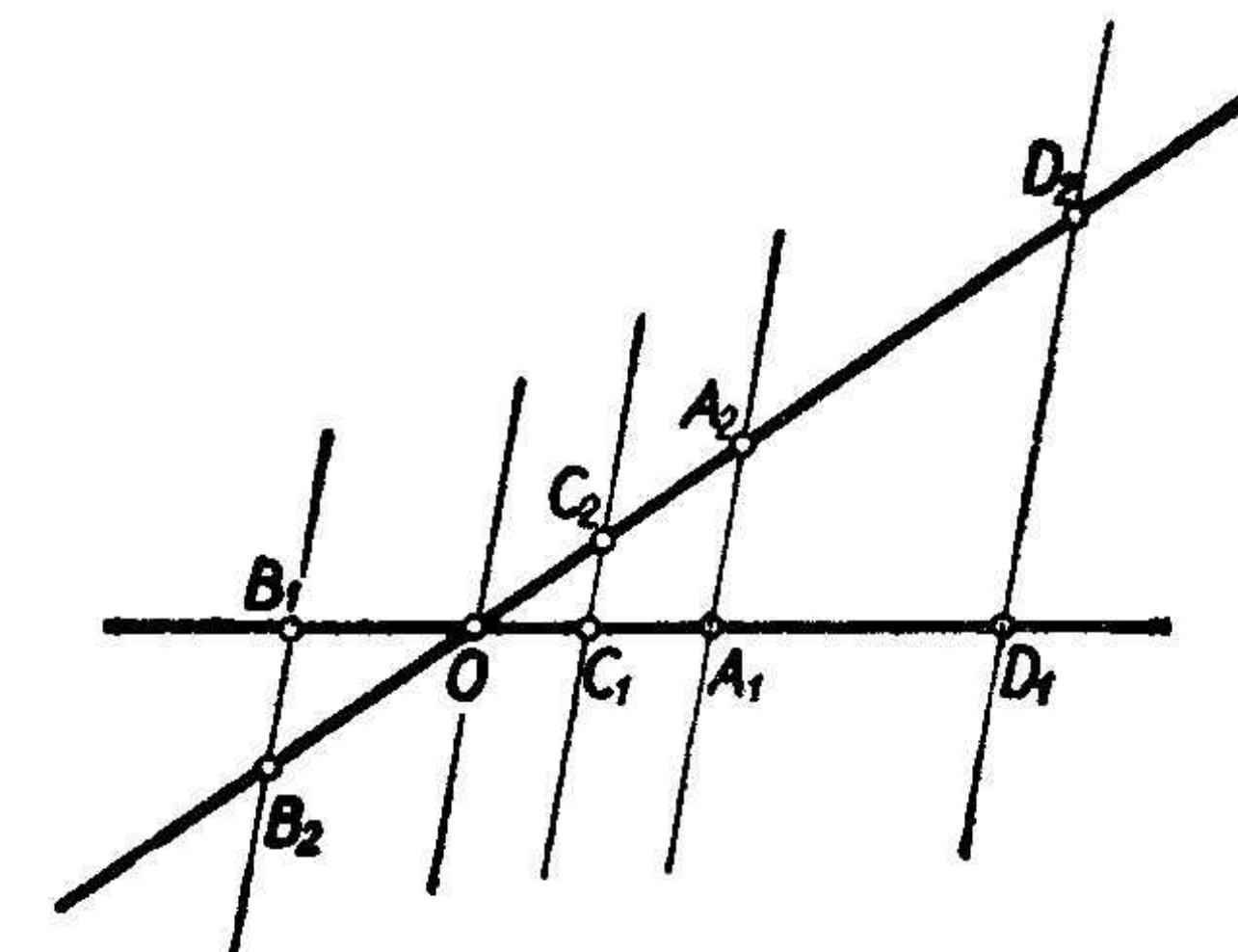
Bizonyítás. A 91. ábra párhuzamos A_1A_2 és B_1B_2 szelőjét tekintjük. Az A_2 ponton át az OA_1 szárral húzott párhuzamos a B_1B_2 szelőt C pontban metszi.

Alkalmazzuk e szakasz első tételét az OB_2B_1 -re s a párhuzamos A_2C , OB_1 szelőkre. Így $OA_2 : OB_2 = B_1C : B_1B_2$ adódik. Minthogy pedig az oldalak párhuzamossága miatt $A_1A_2CB_1$ paralelogramma, tehát $B_1C = A_1A_2$, azért $OA_2 : OB_2 = A_1A_2 : B_1B_2$ is teljesül. —

B1 Az első tétel bizonyítása jóval rövidebb volna, ha csak racionális arányú (kommenzurábilis, összemérhető) szakaszokkal foglalkoznánk. Ez esetben nem is lenne szükség egyenlőtlenség szerepeltetésére.

B2 Ennek a szakasznak valamennyi állítása helyes akkor is, ha nem a szög száiról, hanem száregyeneséről, tehát két egymást metsző egyenesről van szó. Bizonyításaink is változatlanul helytállóak maradnak. Egyedül az első tétel bizonyításában szereplő $A_1B_1B_2A_2$ négyszöget illetően tartjuk megemlítenéennek azt, hogy ha nem szögvonalról van szó, akkor ez a négyszög hurkolt is lehet (92. ábra).

Helyesek maradnak az állításaink akkor is, ha ezeket megfelelően irányított szakaszokra mondjuk ki. Ezt úgy értjük, hogy a száregyeneseken elhelyezkedő, egymásnak megfelelő szakaszok kezdőpontjaiul (és végpontjaiul) ugyanannak a szelőnek a metszéspontjait választjuk, s hogy a szelők szakaszainak kezdőpontját (és végpontját) ugyanazon a száregyenesen vesszük fel, és a párhuzamos szelők mindegyikén természetesen ugyanazt az irányt választjuk pozitív irányul. Indokolásul elég megemlítenünk egyrészt azt, hogy ha az egyik száregyenes irányított A_1B_1 , C_1D_1 szakaszai egyirányúak vagy ellentétes irányúak, akkor ugyanezt mondhatjuk a másik száregyenes megfelelő szakaszairól is, másrészt azt, hogy ha az egyik száregyenes irányított OA_1 , OB_1 szeletei egyező vagy ellentétes irányúak, akkor ugyanezt mondhatjuk a másik száregyenes megfelelő OA_2 , OB_2 szakaszairól, valamint az A_1A_2 , B_1B_2 szelőszakaszokról is.



92. ábra

B3 A szakasz első tétele bizonyításának b) részében egy gondolatmenetet alkalmaztunk, amelyet különféle geometriai beöltöztetésben több ízben alkalmazunk majd (lásd 19.8, 20.2, 20.8, 27.2, 29.8). A cél mindenütt az lesz, hogy bizonyos mennyiségek arányosságát kimutassuk.

Rámutatunk itt arra, hogy a geometriai beöltöztetéstől megfosztva hogyan szól ez a gondolatmenet, hogy tehát milyen segédétel volna szükséges ahhoz, hogy ne kelljen ezt a gondolatmenetet különféle beöltöztetésben újból és újból elvégezni.

Egy intervallumfüggvényt tekintünk, azaz (egy számtartományon belül) minden $X = (x_1, x_2)$ számközhöz hozzárendelünk egy-egy $y(X)$ értéket. Egy ilyen intervallumfüggvény additív, ha bármely két egymáshoz csatlakozó, együttesen az X intervallumot szolgáltató X_1 és X_2 intervallumra $y(X_1) + y(X_2) = y(X)$. Egy intervallumfüggvény pozitív, ha minden intervallumhoz pozitív értéket rendel. Ha egy intervallumfüggvény pozitív és additív, akkor monoton is, azaz valamely X_1 intervallumot tartalmazó minden más intervallumra $y(X_1) < y(X_2)$. Ennek bizonyítása végett az X_2 intervallumot az egymáshoz csatlakozó I_1 , X_1 , I_2 intervallumokra bontjuk fel, megengedve azt is, hogy az I_1 , I_2 intervallumok egyike nullintervallum legyen. Az additivitásból ilyenformán $y(X_2) = y(I_1) + y(X_1) + y(I_2)$ adódik, ahol az $y(I_1)$, $y(I_2)$ értékek egyike 0 lehet. A pozitivitásból következik tehát, hogy $y(X_2) > y(X_1)$ valóban teljesül.

Ha egy pozitív és additív intervallumfüggvény egyenlő intervallumokhoz egyenlő értékeket rendel, akkor két intervallumhoz rendelt érték aránya a két intervallum hosszának arányával egyenlő. Az állítás szerint van tehát olyan c állandó, hogy az $X = (x_1, x_2)$ intervallumhoz rendelt érték $y(X) = c(x_2 - x_1)$.

Bizonyítás céljából tekintsük az $A = (a_1, a_2)$ és $B = (b_1, b_2)$ intervallumokat. Válasszunk egy n természetes számot, és bontsuk fel az A intervallumot n egyenlő, $\frac{a_2 - a_1}{n}$ hosz-

szűségű részintervallumra. Vágjunk le ezekkel egyenlő részintervallumokat a B intervallumból is, mégpedig a b_1 értéktől elindulva sorozatosan annyiszor, ahányszor csak lehet. Ha ez k -szor lehetséges, akkor egyrészt igaz az, hogy B tartalmaz egy k egyenlő részintervallumból összetett intervallumot, másrészt pedig, hogy egy $k+1$ egyenlő részintervallumból összetett intervallum valódi részként tartalmazza a B intervallumot. Ezek szerint

$$k \frac{a_2 - a_1}{n} \leq b_2 - b_1 < (k+1) \frac{a_2 - a_1}{n}.$$

Minthogy az egyenlő részintervallumokhoz egyenlő értékek tartoznak, ez az érték az additivitás miatt csak $\frac{1}{n} y(A)$ lehet. Az additivitást újból kihasználva, a fentebb mondottak szerint igaz tehát, hogy B tartalmaz egy olyan intervallumot, amelyhez az $\frac{1}{n} y(A)$ érték k -szorosára van hozzárendelve, és hogy B valódi része egy olyan intervallumnak, amelyhez ugyanannak az értéknek a $(k+1)$ -szerese tartozik. A pozitivitásból és additivitásból következő monotonitás alapján adódik tehát, hogy

$$k \frac{y(A)}{n} \leq y(B) < (k+1) \frac{y(A)}{n}.$$

Ha egyenlőtlenségeinket a pozitív $a_2 - a_1$ és $y(A)$ értékekkel osztjuk, azt kapjuk, hogy $\frac{k}{n}$ és $\frac{k+1}{n}$ közrefogja a

$$\frac{b_2 - b_1}{a_2 - a_1}, \quad \frac{y(B)}{y(A)}$$

értékek mindegyikét, megengedve, hogy $\frac{k}{n}$ -nel egyenlők is lehessenek. Ebből következik, hogy a felírt két érték különbsége a közrefogó értékek különbségénél, $\frac{1}{n}$ -nél kisebb. Ezt a megállapítást a nem negatív különbségre, vagy ha tetszik, a különbség abszolút értékére tettük. Mivel a nem negatív különbség $\frac{1}{n}$ -nél kisebb, és n akármelyik természetes számot jelentheti, azért a különbség csak 0 lehet. Támaszkodtunk itt arra, hogy pozitív szám nem lehet minden természetes szám reciprokánál kisebb, hiszen van olyan egész szám, amely egy adott pozitív szám reciprokánál nagyobb. Beláttuk ilyen módon, hogy a felírt két érték egyenlő, és ez segéd-tételünk helyességét mondja ki.

Segéd-tételünk birtokában jóval egyszerűbb a szakasz első tételének a bizonyítása. Az egyik szár szakaszaihoz hozzárendeljük a másik szár megfelelő szakaszainak a hosszát. Ez az intervallumfüggvény nyilvánvalóan pozitív és additív. A bizonyítás a) részében kimutattuk azt is, hogy egyenlő szakaszokhoz egyenlő értékeket rendel. A segéd-tétel alapján máris következik ebből a bizonyítandó állítás.

Segéd-tételünk más szövegezéssel azt mondja ki, hogy ha minden szakaszhoz egy-egy számot rendelünk, mégpedig 1. mindig pozitív számot, 2. egyenlő szakaszokhoz egyenlő számokat, 3. egymáshoz csatlakozó szakaszokhoz olyan számokat, amelyeknek az összege a két szakasz együtteséhez rendelt számmal egyenlő, akkor a hozzárendelt szám csak a szakasz hosszának állandósorozosa lehet. Ha tehát azt is megköveteljük, hogy 4. az egységszakaszhoz rendelt szám 1 legyen, akkor a hozzárendelt szám csak maga a hossz lehet. E megállapítás síkbeli és térbeli megfelelőjével majd találkozni fogunk (lásd 20.1 és 27.1).

B4 Az előző megjegyzés segéd-tételét nyomban felhasználjuk annak bizonyítására, hogy a sík és a tér el nem fajuló félegyenestartó leképezései (vö. 6.1 B4) az egyező állású szakaszok arányát megtartják. 14.2 B2 szerint elég, ha ezt egy egyenes szakaszainak az arányára bizonyítjuk csak. Tekintsük ezért egy egyenes intervallumait, és rendeljük hozzájuk a képük hosszát. Ez az intervallumfüggvény pozitív és additív, továbbá 14.2 B2 szerint egyenlő intervallumokhoz egyenlő értékeket rendel. Igaz tehát, hogy a képszakaszok hosszának az aránya megegyezik a tárgyszakaszokéval.

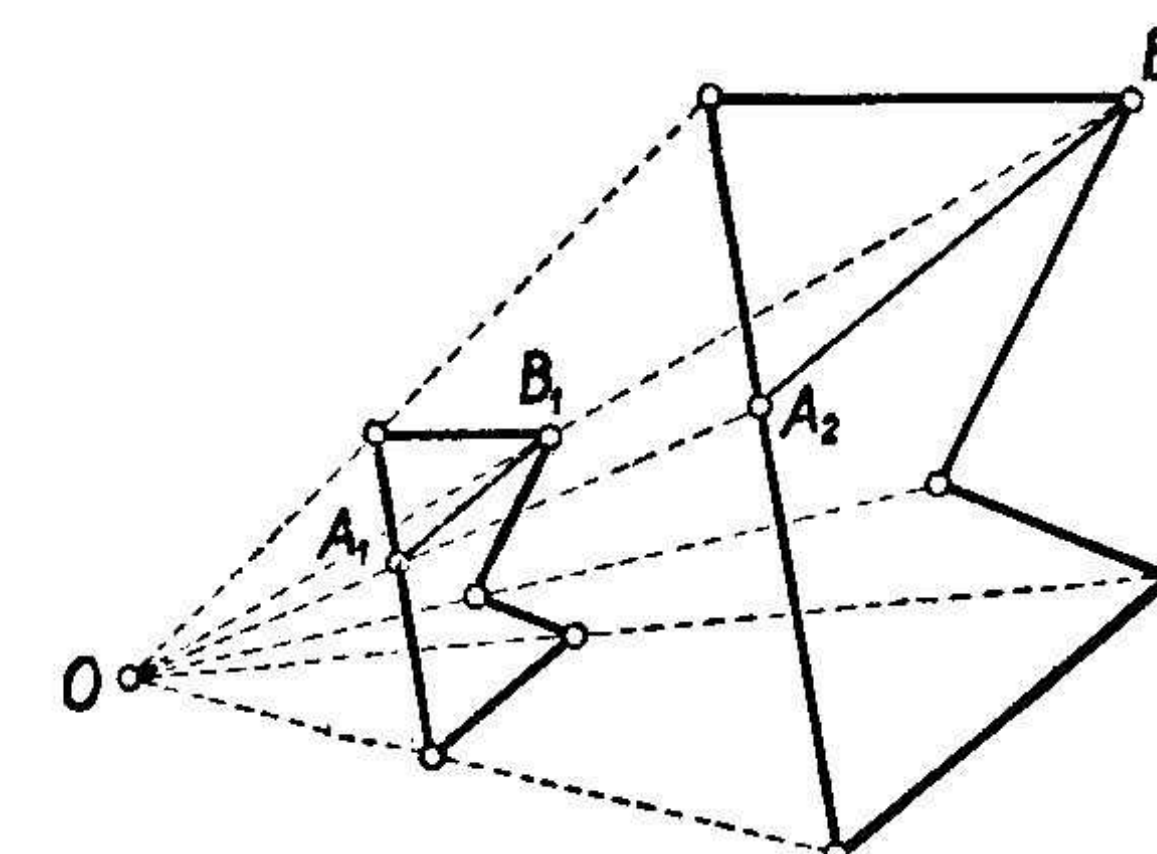
17.3 Az előző szakasz előkészítése után a hasonlóság tárgyalásába kezdünk.

Tétel. Ha egy alakzat minden egyes P_1 pontjához azt a P_2 pontot rendeljük hozzá, amelyik a rögzített O pontból induló OP_1 félegyenesen van, s amelyikre $OP_2 = \lambda OP_1$, ahol λ egy rögzített pozitív szám, akkor az így hozzárendelt pontok az eredetihez hasonló alakzatot alkotnak.

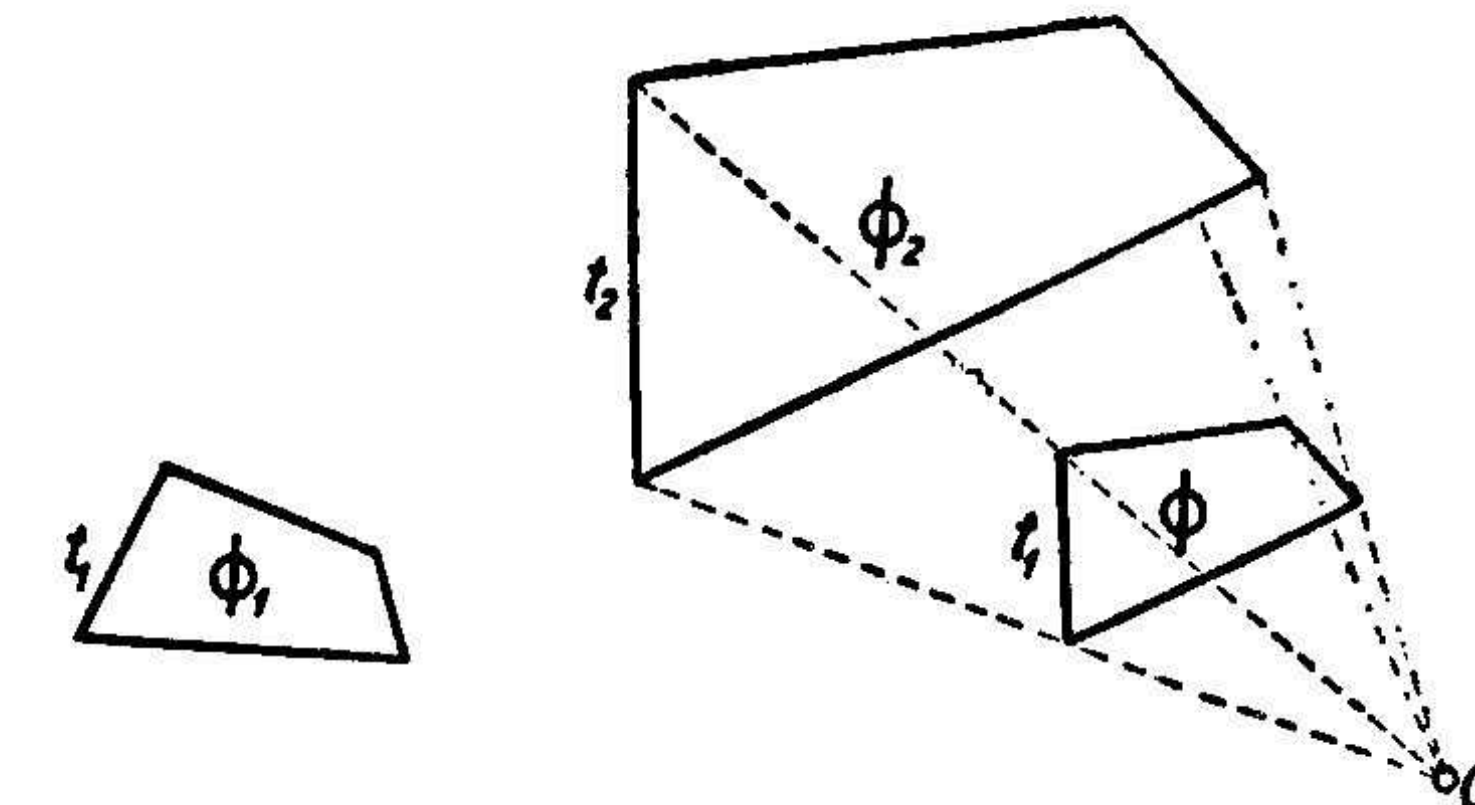
Tételünk az egy pontból való kinagyításról és az egy pontra való összehúzásról szól. Az alakzat, amelyre a tételben leírt műveletet alkalmazzuk, tetszőleges lehet. Lehet a teljes sík vagy akár az egész tér is. A tétel számunkra azért is fontos, mert biztosítja, hogy van szabadon megválasztott arányú hasonlóság, hogy minden alakzathoz található hasonló alakzat, mégpedig szabadon előírt aránnyal.

Bizonyítás. Ha az egyik alakzat A_1 és B_1 pontjának a másik alakzat A_2 és B_2 pontja felel meg (93. ábra), akkor e pontok megválasztásából következőleg $OA_2 : OA_1 = OB_2 : OB_1$. Ha tehát az OA_1, OB_1 egyenesek nem azonosak, akkor az előző pont második tétele szerint $A_2B_2 \parallel A_1B_1$, harmadik tétele szerint pedig $A_2B_2 : A_1B_1 = \lambda$.

Ha viszont OA_1 és OB_1 azonos egyenesek, akkor az A_1B_1 távolság az OA_1 és OB_1 távolságok különbsége vagy összege. Az A_2, B_2 pontok megválasztása folytán az A_2B_2 távolság is összege, illetve különbsége az OA_2 és OB_2 távolságoknak, azaz az OA_1, OB_1 távolságok λ -szorosainak. Ezért A_2B_2 az A_1B_1 távolság λ -szorosa.



93. ábra



94. ábra

Igazoltuk, hogy az új alakzat bármely két pontjának távolsága az eredeti alakzat megfelelő pontjai távolságának λ -szorosa. A két alakzat így hasonló, s a hasonlóság arányszáma λ .

Tételünk speciális helyzetű hasonló alakzatokról szól. A bizonyítás azt is mutatja, hogy az alakzatok megfelelő szakaszai párhuzamosak, sőt azt is, hogy ha a megfelelő szakaszokat úgy irányítjuk, hogy kezdőpontjaik megfelelő pontok legyenek, akkor irányuk is megegyező. Megállapíthatjuk tehát, hogy az alakzatok megfelelő szögei egy állásúak és így egyenlők.

B Bizonyítjuk, hogy két hasonló síkbeli alakzathoz található a síknak olyan hasonlósága, amely ezt a két alakzatot egymáshoz rendeli. Más szóval: két síkbeli alakzat hasonlósága kiterjeszthető síkjuk (vagy síkjaik) hasonlóságává (vö. 6.1 B2). Hasonlót mondhatunk két térbeli alakzatról is, de ennek helyességét majd csak később láthatjuk be (lásd 26.4 B2).

Az állítás bizonyítása céljából tekintsük a hasonló síkbeli Φ_1, Φ_2 alakzatokat (94. ábra), s legyen t_1 és t_2 egy-egy megfelelő távolságuk. Egy tetszőleges O pontot választunk, és Φ_2 -ből utolsó tételünk előírása szerint olyan hozzá hasonló Φ alakzatot készítünk, amelyben t_2 -nek t_1 távolság felel meg. Φ_1 és Φ egybevágók, mert hasonlóak, és egy-egy megfelelő távolságuk egyenlő, azaz hasonlóságuk aránya 1. Ez az egybevágóság 11.1 B3c) szerint kiterjeszthető

a sík egybevágó leképezésévé. Ha a síknak ezt az egybevágó leképezését követően a Φ alakzatot szolgáltató hasonlóság inverzét alkalmazzuk, akkor a sík kívánt tulajdonságú hasonlóságához jutunk.

17.4 Tétel. Minden hasonlóság szögtartó.

Ha tehát az A_1, B_1, C_1 pontokhoz a hasonlóság az A_2, B_2, C_2 pontokat rendeli, akkor $A_1B_1C_1 \sim A_2B_2C_2$.

Bizonyítás. Legyen Φ_1 és Φ_2 két hasonló alakzat, s legyen t_1 és t_2 egy-egy megfelelő távolságuk. Tetszőlegesen választott O pontból kiindulva készítsünk az előző szakasz eljárásával olyan Φ_2 -höz hasonló Φ alakzatot, amelyben t_2 -nek t_1 -gyel egyenlő távolság felel meg (94. ábra).

Φ_1 és Φ egybevágó, mert egyrészt hasonlóak, hiszen mindkettő hasonló Φ_2 -höz, másrészt egy-egy megfelelő távolságuk egyenlősége miatt hasonlóságuk arányszáma 1. Így tehát Φ_1 és Φ megfelelő szögei egyenlők. Viszont Φ és Φ_2 megfelelő szögei is egyenlők, miként ezt az előző szakaszban megállapítottuk. Ezek szerint Φ_1 és Φ_2 megfelelő szögei is egyenlők. —

A tételből következik, hogy kollineáris pontoknak ugyanilyen pontok felelnek meg, tehát a hasonlóság egyenestartó.

B Tételünk csak a szögtartásról szólt, rámutathatunk azonban arra, hogy ebből a hasonlóság számos további tulajdonsága is következik.

Elsőnek azt említjük, hogy a hasonlóság közösleges félegyenestartó leképezés. A szögtartásból következik ugyanis, hogy ha az A, B pontok képei A_1 és B_1 , akkor az A_1B_1 félegyenes tartalmazza az AB félegyenes képét. Az inverz hasonlóságra hivatkozva azt is kimondhatjuk, hogy az AB félegyenes képe tartalmazza az A_1B_1 félegyenest. Eszerint az AB félegyenes képe az A_1B_1 félegyenessel azonos.

Következik ebből, hogy a hasonlóság rendelkezik mindazokkal a tulajdonságokkal, amelyeket az el nem fajuló félegyenestartó leképezésekről már megállapítottunk (vö. 6.1 B4). Azt is kimondhatjuk tehát, hogy a hasonlóság nemcsak az eredeti értelemben szögtartó, hanem a 11.1 B2-ben említett további két értelemben is.

17.5 Tétel. Két háromszög hasonló, ha

- oldalaik aránya egyenlő,
- két-két oldaluk aránya s az ezek által közrefogott szögük egyenlő,
- két-két oldaluk aránya és e két-két oldal közül a nagyobbakkal szemközt levő szögük egyenlő,
- két-két szögük páronként egyenlő.

Tétel. Két egyszerű sokszög hasonló, ha

- megfelelő oldalaik és átlóik aránya egyenlő,
- megfelelő oldalaik aránya egyenlő, s megfelelő szögeik páronként egyenlők.

Mindkét tételcsoport a 11.1—11.3 szakaszokban tárgyalt egybevágósági tételeknek felel meg. A kimondott feltételekről már tudjuk, hogy a hasonlóságnak szükséges feltételei. A tételek e feltételek elégségességét mondják ki.

Bizonyítás. Valamennyi feltételről megállapíthatjuk, hogy csak távolságok arányának egyezését és szögek egyenlőségét szerepelteti, hogy továbbá bármelyikük az alakzatok egybevágóságához is elégséges abban az esetben, ha az arányított távolságok egyenlők, az első tétel d) esetében pedig akkor, ha két megfelelő oldal is egyenlő. A tételeinkben szereplő feltételek elégségességét e tulajdonságaik alapján egyszerre bizonyítjuk.

Legyen Φ_1 és Φ_2 két sokszög, amelyekre feltételeinknek valamelyike áll. Legyen t_1 és t_2 egy-egy olyan oldaluk, amelyeknek arányát a feltétel szerepelteti, az első tétel d) feltételének esetében pedig egy-egy megfelelő oldaluk. Legyen

továbbá Φ olyan Φ_2 -höz hasonló alakzat, melyben t_2 -nek t_1 -gyel egyenlő távolság felel meg.

A vizsgált feltétel Φ_1 -re és Φ -re is teljesül, mert a Φ_2 -ről Φ -re való áttérés a szögeket nem változtatta meg, s minden távolság hosszát ugyanannyiszorosára változtatta. Minthogy ezen túlmenőleg az arányított oldalak is egyenlők, illetve két megfelelő oldal egyenlő, azért az előrebecsátottak szerint Φ_1 és Φ egybevágó. Ezért a Φ -hez hasonló Φ_2 alakzat Φ_1 -hez is hasonló. —

B1 Az első tétel a) feltételével kapcsolatban 11.1 B1-hez hasonlót mondhatunk. Téved, aki két háromszög hasonlósága definíciójának azt gondolja, hogy oldalaik aránya egyezik. A hasonlóság definíciója bármely két-két megfelelő pont távolságának arányáról szól.

B2 Bizonyítjuk, hogy ha egy alakzat nem lineáris, és egy rajta definiált transzformáció szögtartó, akkor ez a transzformáció hasonlóság. A szögtartóságot itt abban a legkevesebbet kívánó alakban értjük, amelyet 17.4 is használt, hozzáértjük azonban a szögtartósághoz azt is, hogy különböző pontok képei különbözők, hogy tehát lehet valóban minden tárgyszög képszögéről beszélni.

Nem volna helyes az állítás, ha lineáris alakzatokra mondanók ki. Példát ad erre egy szakasz két végpontja és felezőpontja, ha a végpontokhoz önmagukat, a felezőponthoz pedig a szakasz egy másik belső pontját rendeljük.

Állításunk bizonyítása végett először is azt jegyezzük meg, hogy a szóban forgó alakzat bármely három nem kollineáris pontja, valamint ezek képei hasonló háromszögeket szolgáltatnak, hiszen szögeik a szögtartás miatt egyenlők, és már két szög egyenlősége is biztosítja a hasonlóságot.

Legyen most már A_1, B_1, C_1 az alakzat három nem kollineáris pontja továbbá P_1 és Q_1 két tetszőleges pontja, amelyek az előbbi háromtól nem feltétlenül különböznek. E pontok képpontjait A_2, B_2, C_2, P_2 és Q_2 jelöli.

A P_1Q_1 egyenes nem tartalmazhatja az A_1, B_1, C_1 pontok mindegyikét, hiszen ezek nem kollineárisak. Legyen pl. A_1 egy ilyen pont. Nem tartalmazhatja a B_1, C_1 pontokat az A_1Q_1 egyenes sem. Legyen pl. B_1 az A_1Q_1 egyenesen kívül. Az $A_1P_1Q_1, A_2P_2Q_2$ háromszögek, valamint az $A_1B_1Q_1, A_2B_2Q_2$ háromszögek hasonlóságából $P_2Q_2 : P_1Q_1 = A_2Q_2 : A_1Q_1 = A_2B_2 : A_1B_1$ adódik. Ezek szerint alakzataink bármely két megfelelő távolságának aránya megegyezik a hasonló $A_1B_1C_1, A_2B_2C_2$ háromszögek oldalarányával. A vizsgált transzformáció tehát valóban aránytartó, azaz hasonlóság.

17.6 Tétel. Hasonló sokszögek kerületének aránya megegyezik bármely megfelelő oldalpárjuk arányával.

Mondhattuk volna, hogy a kerületarány a hasonlóság arányával egyenlő.

Bizonyítás. A hasonlóság arányszámával szorozva az egyik sokszög oldalait, a másik sokszög oldalait kapjuk meg. Ezért e számmal szorozva az egyik sokszög oldalainak összegét, a másik sokszög oldalainak összege adódik. —

Tétel. Hasonló alakzatok két-két megfelelő távolságának szorzatával képezett arány a hasonlóság arányának négyzetével, három-három megfelelő távolság szorzatával képezett arány pedig a hasonlóság arányának köbével egyenlő.

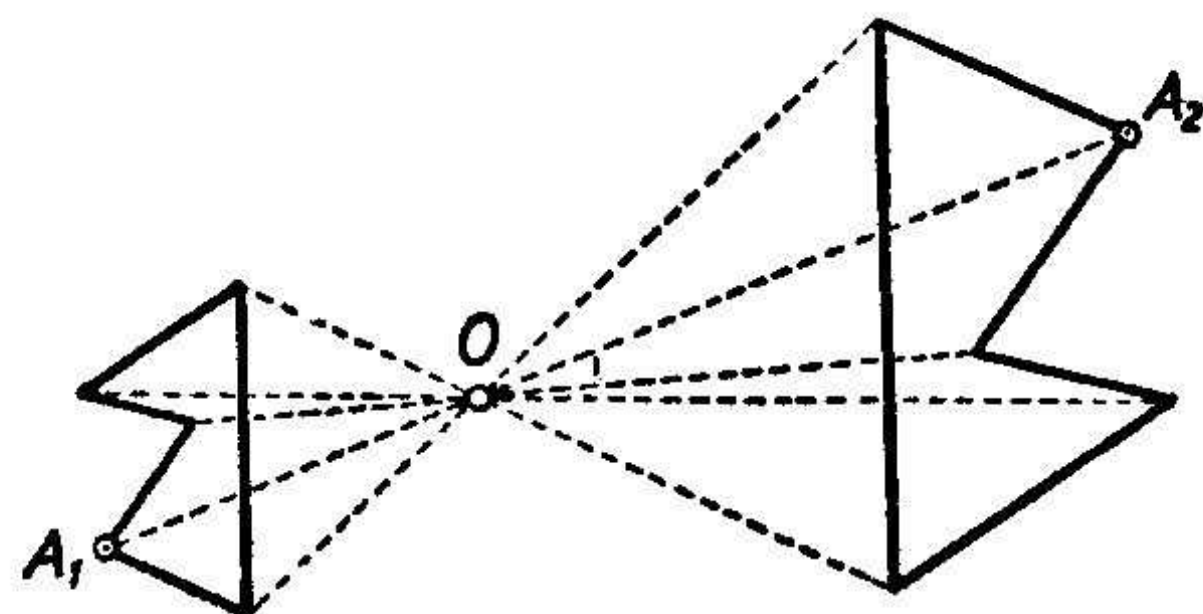
Szólhattunk volna háromnál több megfelelő távolság szorzatáról is, a két- és háromtényezős esetet csak a gyakoribb alkalmazás miatt emeltük ki.

Bizonyítás. Megfelelő távolságpárok szorzatának hányadosa két-két megfelelő távolság hányadosának szorzata, s ezért a hasonlóság arányszámának négyzetével egyenlő. Három-három megfelelő távolság szorzatának hányadosa hasonlóképpen három olyan tört szorzata, amelyeknek mindegyike a hasonlóság arányát adja. —

17.7 Két hasonló alakzat párhuzamos helyzetű (párhuzamosan hasonló, homotétikus), ha megfelelő szakaszaik állása megegyezik. Az olyan hasonlóságot, amely párhuzamos helyzetű alakzatokat rendel egymáshoz, párhuzamos hasonlóságnak (homotécia) nevezzük.

Az azonosság, az eltolás és a pontra vonatkozó tükrözés is párhuzamos helyzetű hasonló-

ság. Ilyen hasonlóságot tárgyalt 17.3 tétel, továbbá ilyen hasonlósághoz jutunk akkor is, ha az ott szerkesztett képalakzatot még tükrözzük az O pontra (95. ábra). Ez utóbbi képhez természetesen közvetlenül is eljuthatunk, ha a tárgyalakzat A_1 pontjához azt az A_2 pontot rendeljük, amely az OA_1 félegyenes meghosszabbításán van, és amelyre $OA_2 = \lambda OA_1$.



95. ábra

szintén párhuzamos hasonlóság, és hogy ilyenkor a hasonlóságok előjeles arányai össze-

Tétel. Egyetlenegy olyan párhuzamos hasonlóság van, amely két egyező állású irányított szakasz egyikét a másikba viszi.

Beszélhetünk volna irányítatlan szakaszokról is, ha előírjuk, hogy melyik végpont melyik végpontba jusson.

Bizonyítás. a) Legyenek A_1B_1 és A_2B_2 a megadott egyező állású szakaszok. Alkalmazzuk tetszőleges O pontból kiindulva 17.3 eljárását, mégpedig $\lambda = A_2B_2 : A_1B_1$ aránnyal. Ha ezt követően esetleg még tükrözzük az O pontra, akkor elérhetjük, hogy A_1B_1 az A_2B_2 szakasszal egyenlővé és vele egyirányúvá váljék. Újabb eltolással elérhetjük tehát azt is, hogy az előírt A_2B_2 helyzetbe jusson. Sorozatosan alkalmazott transzformációink párhuzamos hasonlóságok voltak, tehát olyan párhuzamos hasonlósághoz vezettek, amely az A_1B_1 irányított szakaszt a megadott A_2B_2 helyzetbe viszi.

b) Még azt kell belátnunk, hogy csak egy kívánt tulajdonságú párhuzamos hasonlóság van. Ha ez nem így volna, akkor az egyik után a másik inverzét alkalmazva olyan párhuzamos hasonlósághoz jutnánk, amely az A_1, B_1 pontokat helyben hagyja, de nem azonosság. Ha azonban az A_1, B_1 pontok helyben maradnak, akkor a hasonlóság aránya 1, és ennek következménye, hogy az A_1B_1 egyenes minden pontja helyben marad. Ha pedig egy az A_1B_1 egyenesen kívüli P pontot tekintünk, akkor is megállapíthatjuk, hogy P -nek helyben kell maradnia. Ez abból következik, hogy az A_1P, B_1P egyenesek önmaguknak a képei, hiszen képeiknek velük egyező állásúaknak kell lenniök, és át kell haladniuk a helyben maradó A_1, B_1 pontokon. Ezek szerint minden pont helyben marad, azaz a vizsgált transzformáció csak azonosság lehet. Ez az ellentmondás bizonyítja, hogy csak egy kívánt tulajdonságú párhuzamos hasonlóság van. —

Ha két hasonló alakzat esetében van olyan O pont, amely bármely megfelelő pontpárral együtt egy egyenesen van, akkor az O pontot *hasonlósági centrumnak* nevezzük, és *centrális hasonlóságról* beszélünk.

Ilyen centrális hasonlóság az azonosság, a pontra vonatkozó tükrözés, valamint a 17.3-ban tárgyalt és az abból O -ra tükrözve adódó hasonlóság is.

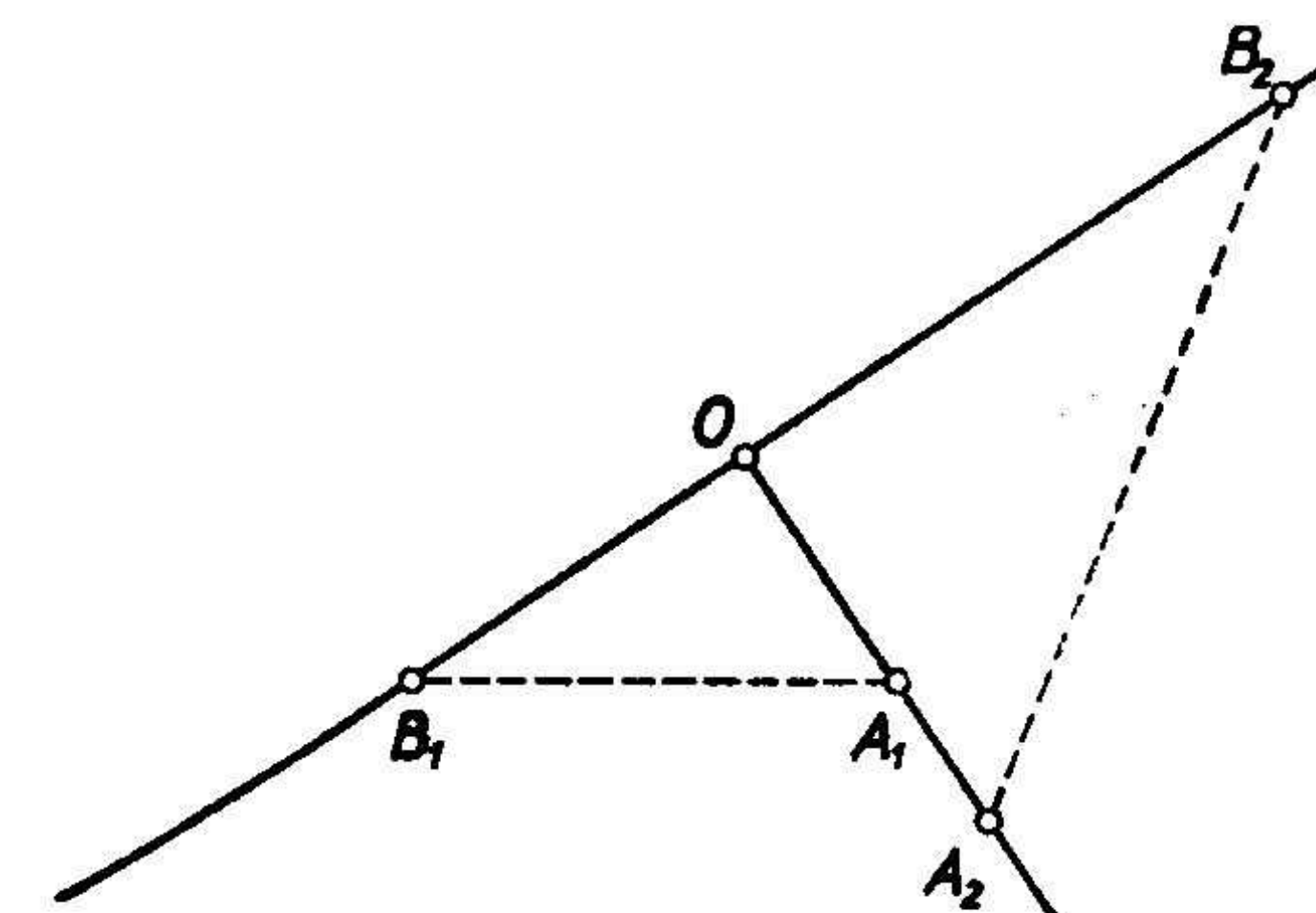
Tétel. Minden centrális hasonlóság párhuzamos is.

Bizonyítás. a) Először azt bizonyítjuk, hogy a hasonlóság centruma önmagának a képe. Evégből egy az O centrumon áthaladó egyenest és ezen egy az O pontot tartalmazó szakaszt veszünk fel. Mivel a hasonlóság centrális, szakaszunk képe ugyanezen az egyenesen van, kell tehát, hogy ez az egyenes O képét is tartalmazza. Minthogy az O ponton áthaladó egyenest önkényesen vettük fel, O képeinek rajta kell lennie az O ponton áthaladó egyenesek mindegyikén. Ez a kép ezért csak az O pont lehet.

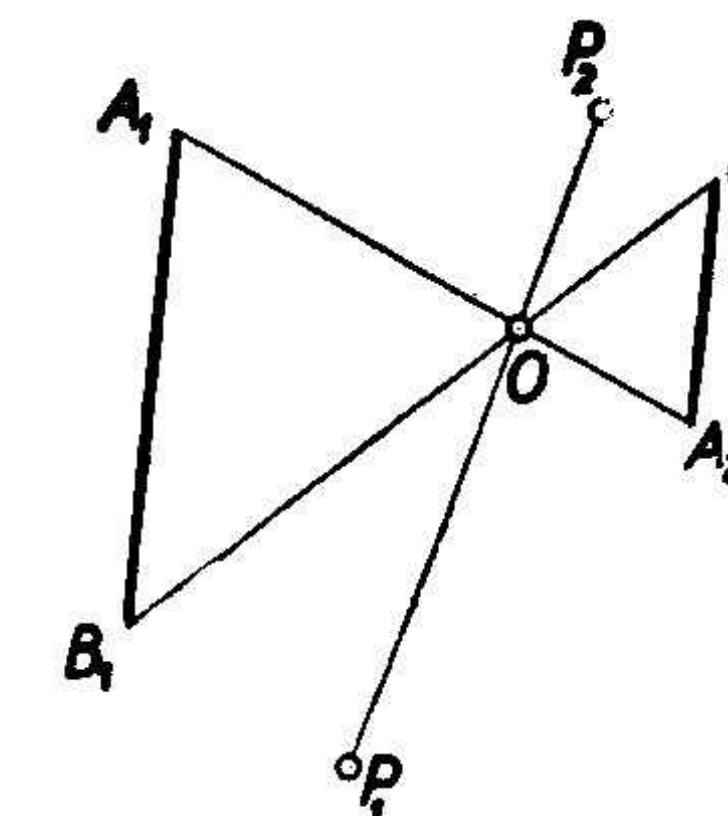
b) Igazoljuk, hogy az irányított szakaszokkal képezett $OA_2 : OA_1$ arány értéke nem függ attól, hogy melyik megfelelő, O -tól különböző A_1, A_2 pontpárt választjuk. A centrális hasonlóság miatt egy egyenes szakaszairól van itt szó. Az nyilvánvaló, hogy a felírt arány a hasonlóság arányát adja, hiszen O saját magának a képe. Csak azt kell belátnunk, hogy az arány előjele is ugyanaz minden pontpárra. Elég tehát azt bizonyítanunk, hogy ha pl. $OA_2 : OA_1$ pozitív, akkor egy másik megfelelő B_1, B_2 pontpárral képezett $OB_2 : OB_1$ nem lehet negatív.

Ha ez volna a helyzet, akkor mindezek a pontok nem lehetnek egy egyenesen, hiszen az elfajult OA_1B_1 és OA_2B_2 háromszögek a hasonlóság miatt hasonlóak, ha tehát O nem választja el az A_1, A_2 pontokat, a B_1, B_2 pontokat sem választhatja el. Ha viszont A_1 és A_2 nincs a B_1B_2 egyenesen (96. ábra), akkor az A_1OB_1 és A_2OB_2 szögek az arányok előjelére vonatkozó feltevés miatt mellékszögek, és ezért az O ponton át nem halad olyan egyenes, amely az A_1B_1, A_2B_2 szakaszok mindegyikét metszi. Ámde ezek megfelelő szakaszok, s így megfelelő belső pontjaiknak az O ponttal együtt egy egyenesen kell lenniök. Ez ellentmond az előző megállapításnak, s ez az ellentmondás állításunk helyességét bizonyítja.

c) Tételünk helyessége most már egyszerűen következik abból, hogy megfelelő P_1, P_2 pontok által meghatározott irányított szakaszokra $OP_2 = \lambda OP_1$ közös λ értékkel minden esetben teljesül. Ha λ pozitív, akkor 17.3 hozzárendelésével állunk tehát szemben, s arról tudjuk, hogy párhuzamos helyzetű hasonlóságot ad. Ha viszont λ negatív, akkor még tükrözni kell az O pontra, s ez a tükrözés a párhuzamosságon nem változtat. —



96. ábra



97. ábra

Tétel. Ha egy párhuzamos hasonlóság nem eltolás, akkor centrális.

Nyilvánvaló, hogy az eltolást ki kellett itt zárni, mert (hacsak nem egy lineáris alakzatot tolnak el saját egyenesé mentén, és nem azonosságról van szó) eltolás esetében hasonlósági centrum nincs.

Bizonyítás. Legyen A_1 olyan pont, amely a párhuzamos hasonlóság által szolgáltatott képével, A_2 -vel nem esik egybe. Legyen B_1 egy nem az A_1A_2 egyenesen levő pont, és B_1 -nek képe B_2 (97. ábra). Az A_1B_1 és A_2B_2 szakaszok párhuzamosak, mert megfelelő szakaszok és nincsenek egy egyenesen. E két szakasz nem lehet egyenlő s egyben egy irányú is, mert akkor eltolást határoznának meg. Ezért az A_1A_2, B_1B_2 egyenesek nem párhuzamosak, s egymást egy O pontban metszik.

Az A_1A_2 egyenesnek képe önmaga, mert kell, hogy a kép A_2 -n áthaladjon s állása A_1A_2 -ével megegyezzek. Ugyanígy B_1B_2 is önmagának a képe. Így az O pont képe önmaga, mert képeinek az A_1A_2, B_1B_2 egyenesek mindegyikén rajta kell lennie.

Jelentse P_1 az első alakzat tetszőleges, O -tól különböző pontját. Az OP_1 egyenes képe önmaga, mert a kép is áthalad az O ponton és állása OP_1 -ével egyezik. Ezért P_1 képe, P_2 is ezen az egyenesen van. A vizsgált hasonlóság ezek szerint valóban centrális, hiszen O minden megfelelő pontpárral együtt egy egyenesen van. —

B1 Ennek a szakasznak a tárgyalása a térbeli hasonlóságra csak akkor válik majd alkalmazhatóvá, ha a térgeometria egyes elemi tényeit már megismertük. Itt a párhuzamosság, állás és irány térbeli tisztázására gondolunk (lásd 23.2). Ezzel a főntartással kell fogadni mindazt, amit ebben a paragrafusban térbeli alakzatok párhuzamos hasonlóságáról még mondani fogunk.

B2 A sík minden párhuzamos hasonlósága megtartja az orientációt. Nyilvánvaló ez, ha pozitív arányú centrális hasonlóságról van szó, hiszen ott minden irány változatlan marad. Minthogy a negatív arányú párhuzamos helyzetű hasonlóságokhoz a pozitív arányúakból orientációt tartó tükrözéssel jutottunk el, azért az orientációt a negatív arányúak is megtartják. Minthogy végül az eltolás is megtartja az orientációt, azért ez az állítás valóban minden párhuzamos hasonlóságra teljesül.

A tér párhuzamos hasonlóságaira nem mondhatjuk ki ugyanezt. A pozitív arányúakra

az orientációtartás a síkbeli eset mintájára látható be (ha majd a térbeli irány fogalmával megismerkedtünk), viszont a negatív arányúakhoz vezető, pontra vonatkozó tükrözés megváltoztatja az orientációt.

A hasonlóságokat osztályozni lehet aszerint, hogy megtartják-e az orientációt vagy sem. Van orientációt megváltoztató hasonlóság a síkban is és a térben is. Erre a legegyszerűbb példát a sík egyenesre vonatkozó tükrözése és a tér pontra vagy síkra vonatkozó tükrözése, tehát az orientációt megváltoztató egybevágóságok adják. Az orientációt megtartó hasonlóságok csoportot alkotnak.

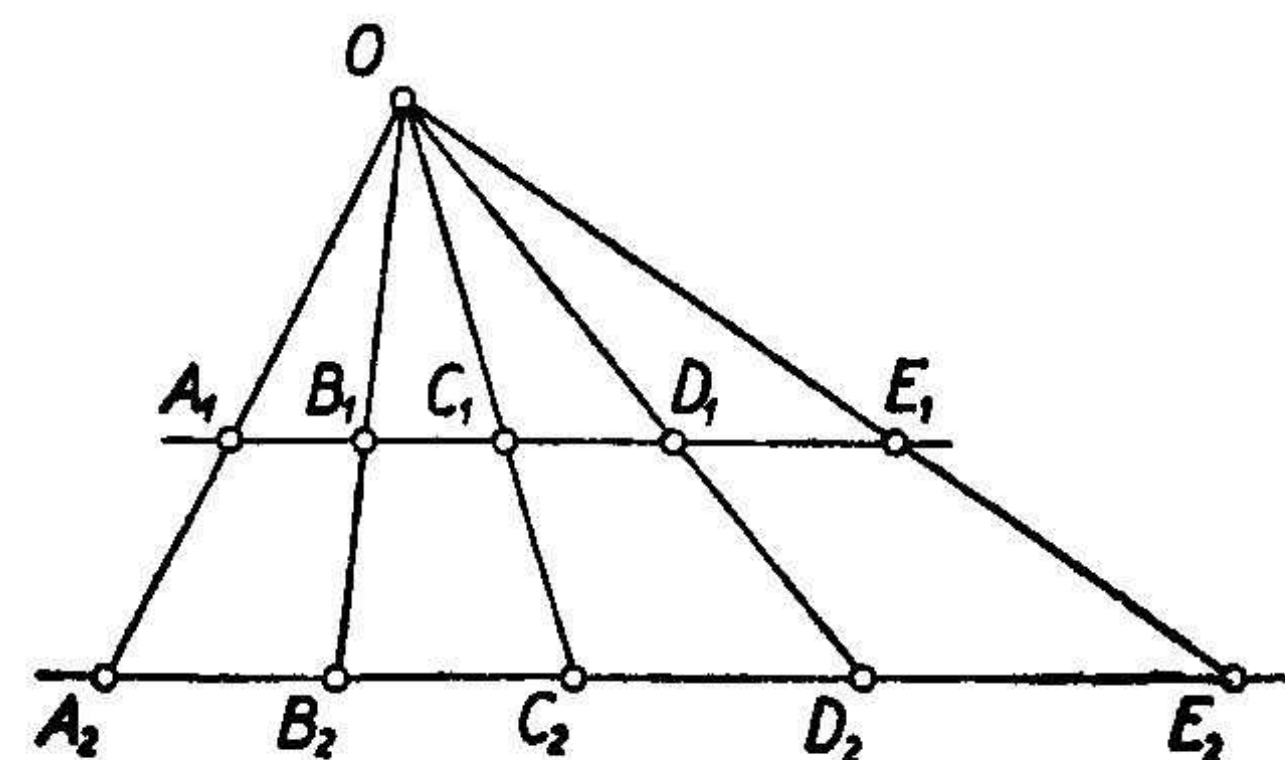
Itt említjük, hogy a köznap nyelv két testre akkor mondja, hogy „alakjuk” megegyezik, ha orientációtartó hasonlósággal keletkeznek egymásból (vö. 2.1).

B3 Nyilvánvaló, hogy a párhuzamos hasonlóságok csoportot alkotnak. A centrális hasonlóságokra ez nem áll, hiszen két centrális hasonlóság egymásutánja eltolást is szolgáltat.

B4 Azt mondhatja valaki, hogy „minden párhuzamos hasonlóság centrális, csak hogy, ha eltolásról van szó, akkor a centrum a végtelenben van”. Mi az ilyen beszédet csak alapos előkészítés után fogadjuk majd el a könyv második felében.

17.8 A következőkben párhuzamos helyzetű hasonló alakzatokról szóló tételek szerepelnek.

Tétel. Ha két párhuzamos egyenest egy hozzájuk nem tartozó ponton áthaladó egyenesekkel metszünk, akkor az egyik párhuzamosból kimetszett szakaszok aránya megegyezik a másik párhuzamos megfelelő szakaszainak az arányával.



98. ábra

Bizonyítás. A metsző egyenesek közös O pontját centrumul választjuk, és olyan centrális hasonlóságot alkalmazunk, amelyik az egyik párhuzamos valamely A_1 pontját a másik párhuzamos megfelelő A_2 pontjába viszi (98. ábra). Ez a hasonlóság a metsző egyeneseket helyben hagyja, az első párhuzamost pedig a másodikba viszi át, hiszen a centrális hasonlóság az egyenesek állását nem változtatja meg. Ezek szerint az első párhuzamos metszéspontjaihoz a hasonlóság a második párhuzamos megfelelő metszéspontjait rendeli, és ez a hasonlóság tételünk helyességét mondja ki. —

Tétel. Ha két sokszög megfelelő oldalainak és átlóinak az állása páronként egyező, akkor a két sokszög hasonló.

Azt eleve tudjuk, hogy csak párhuzamos helyzetű hasonlóságról lehet szó. Tételünk azt is kimondja, hogy párhuzamos oldalú háromszögek hasonlóak. Ha nem háromszögekről van szó, akkor nem elég csak az oldalak párhuzamosságát követelni meg. Erre két különböző oldalarányú, párhuzamosan elhelyezett téglalap is példát ad.

Bizonyítás. Alkalmazzunk az egyik sokszögre olyan párhuzamos hasonlóságot, amely ennek egy A_1B_1 oldalát a másik sokszög megfelelő A_2B_2 oldalára fekteti, mégpedig az oldal végpontjait is a megfelelő végpontokba juttatja. Ha belátjuk, hogy ez a hasonlóság az első sokszög minden csúcsát a második sokszög megfelelő csúcsába viszi át, akkor bebizonyítottuk, hogy tételünk helyes.

Ez nyomban belátható minden olyan C_1 csúcsra, amely nincs az A_1B_1 egyenesen, hiszen az A_1C_1 és B_1C_1 szakaszok képeinek a velük párhuzamos A_2C_2 és B_2C_2 egyeneseken kell elhelyezkedniük, és ezért C_1 képe csak ezeknek az egyeneseknek a metszéspontja, azaz a C_2 -nek megfelelő C_2 csúcs lehet.

Ebből az is következik, hogy ha a D_1 csúcs az A_1B_1 egyenesen van, akkor is igaz, hogy D_1 a megfelelő csúcsba jut. Ha ugyanis C_1 nem ilyen csúcs, akkor már tudjuk, hogy az A_1C_1 szakasz az előírt helyzetbe jut. Minthogy D_1 nincs az A_1C_1 egyenesen, alkalmazhatjuk állításunknak már bizonyított részét ezekre a pontokra, tudjuk tehát, hogy D_1 a neki megfelelő csúcsba jut.

Ezek szerint a készített sokszög valóban azonos a második megadott sokszöggel. —

Tételünk alapján azt is kimondhatjuk, hogy a sík két sokszöge hasonló, ha megfelelő oldalai és átlói páronként merőlegesek egymásra. Ha ugyanis az egyiket 90° -kal elforgatjuk, akármelyik pont körül és akármelyik irányban, akkor már alkalmazhatóvá válik a most bizo-

nyított tétel. Kimondhatjuk tehát, hogy a sík két háromszöge hasonló, ha oldalai merőlegesek egymásra.

B1 Az utolsó bizonyítás lényegesen kihasználta azt, hogy a sokszög csúcsai nincsenek mind egy egyenesen, hiszen ezt használtuk ki, amikor a bizonyítás utolsó részében egy az A_1B_1 egyeneshez nem illeszkedő C_1 csúcsot vettünk fel. Nem is volna helyes a tétel, ha pl. elfajuló háromszögekre akarnók kimondani.

B2 Utolsó tételünket poliéderekre is kimondhattuk volna, sőt bizonyítása is változtatás nélkül alkalmazható ebben az esetben (azonban 17.7 B1 fenntartása ide is vonatkozik). Nem mondhatunk viszont hasonlót a második tételnek arról az átfogalmazásáról, amely az oldalak és átlók merőlegességéről szólt. Megemlítjük, hogy ez az átfogalmazás akkor sem volna helyes, ha két nem párhuzamos síkban elhelyezkedő sokszögre mondanók ki.

17.9 Két kör hasonlóságával akarunk itt foglalkozni.

Először is megállapítjuk, hogy a hasonlóság körhöz kört rendel, mégpedig középpontjukat is egymáshoz rendeli. Ez a távolságok arányának megtartásából nyomban belátható.

Bármely két kör hasonló, mert az olyan hasonlóság, amelyik az egyik kör középpontjához a másik kör középpontját (és síkjához annak síkját) rendeli, s amelyiknek arányszáma a körök sugarainak hányadosa, az az egyik kört a másikba viszi át.

Két párhuzamos helyzetű hasonló alakzat esetében tudjuk, hogy vagy eltolással, vagy centrális hasonlósággal származnak egymásból. Ha tehát nem eltolással származnak egymásból, akkor beszélhetünk a két alakzat hasonlósági centrumáról. A hasonlósági centrumot külsőnek vagy belsőnek mondjuk aszerint, amint pozitív vagy negatív arányú centrális hasonlóság szolgáltatja.

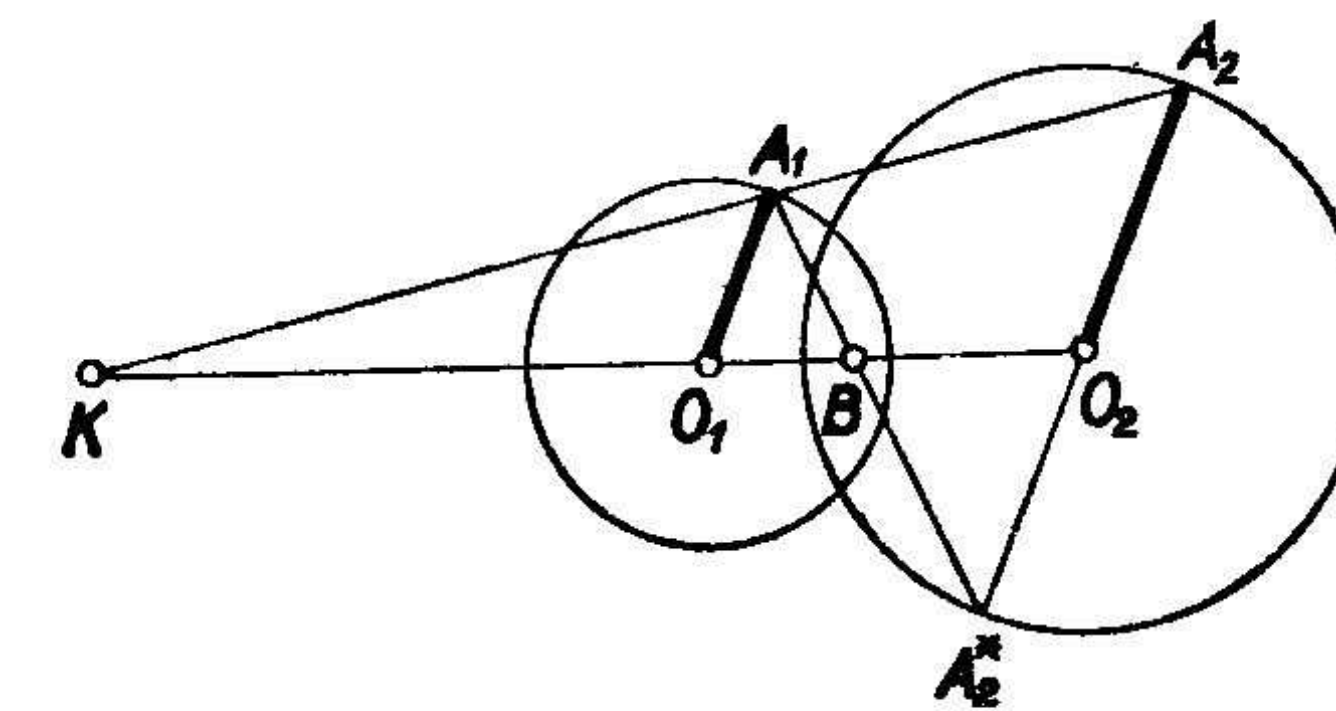
Ha két párhuzamos helyzetű hasonló alakzat centrálisan szimmetrikus, akkor kétféleképpen is felfoghatók egymás párhuzamos helyzetű hasonló képének. Ehhez a két leképezéshez úgy jutunk, hogy egyszer az eredeti párhuzamos hasonlóságot, másodszor pedig azt a leképezést tekintjük, amelyikhez eljutunk, ha az először tekintett párhuzamos hasonlóságot követően még tükrözünk a képalakzat szimmetriacentrumára. Párhuzamosan hasonló és egymásból nem eltolással származó centrális szimmetrikus alakzatok esetében ezek szerint két hasonlósági centrumot találhatunk. Ezekhez a centrumokhoz tartozó előjeles hasonlósági arányok ellentétes előjelűek (de egyenlő abszolút értékűek), hiszen a szimmetriacentrumra vonatkozó tükrözés megváltoztatta a szakaszok irányát. Ilyenkor tehát az egyik hasonlósági centrum külső, a másik pedig belső.

Bármely két kör felfogható kétféleképpen is egymás párhuzamosan hasonló képének, hiszen bármely két párhuzamos sugár a köröket egymáshoz rendelő párhuzamos hasonlóságot határoz meg, márpedig egy irányú és ellentétes irányú sugarakból is ki lehet indulni. Ha a két kör sugara egyenlő, akkor az egy irányú sugarakból kiindulva eltoláshoz jutunk, ilyenkor tehát csak belső hasonlósági centrum van. Különböző sugarú köröknek viszont van belső és külső van hasonlósági centrumuk (99. ábra).

Ha két körnek van két külső érintője, s ezeknek van metszéspontjuk, illetve ha két körnek van két belső érintője, akkor az egyenmű érintők metszéspontja a körök külső, illetve belső hasonlósági centruma (vö. 77. ábra). A centrális hasonlóság ugyanis a hasonlósági centrumból az egyik körhöz vont érintőt önmagába viszi át, s így kell hogy ez az egyenes a másik kört is érintse. Hozzátehetjük ehhez, hogy az egyenes a két kört más-más oldalról vagy ugyanarról az oldalról érinti aszerint, amint a centrális hasonlóság az egyenes által határolt félsíkokat felcseréli vagy nem, aszerint tehát, amint a centrális hasonlóság aránya negatív vagy pozitív.

Érintkező körök érintési pontja egyben hasonlósági centrumuk is, mégpedig kívülről érintkezőké belső, belülről érintkezőké pedig külső hasonlósági centrum. Ez nyomban belátható, ha az érintési ponthoz vezető sugarakat és az ezek által meghatározott párhuzamos hasonlóságot tekintjük.

B Körök hasonlósági centrumait ismerve egyszerűbben bizonyíthatuk volna 15.7 tételét. Elegendő lett volna a hasonlósági centrumból az egyik körhöz vont érintőket vizsgálni.



99. ábra

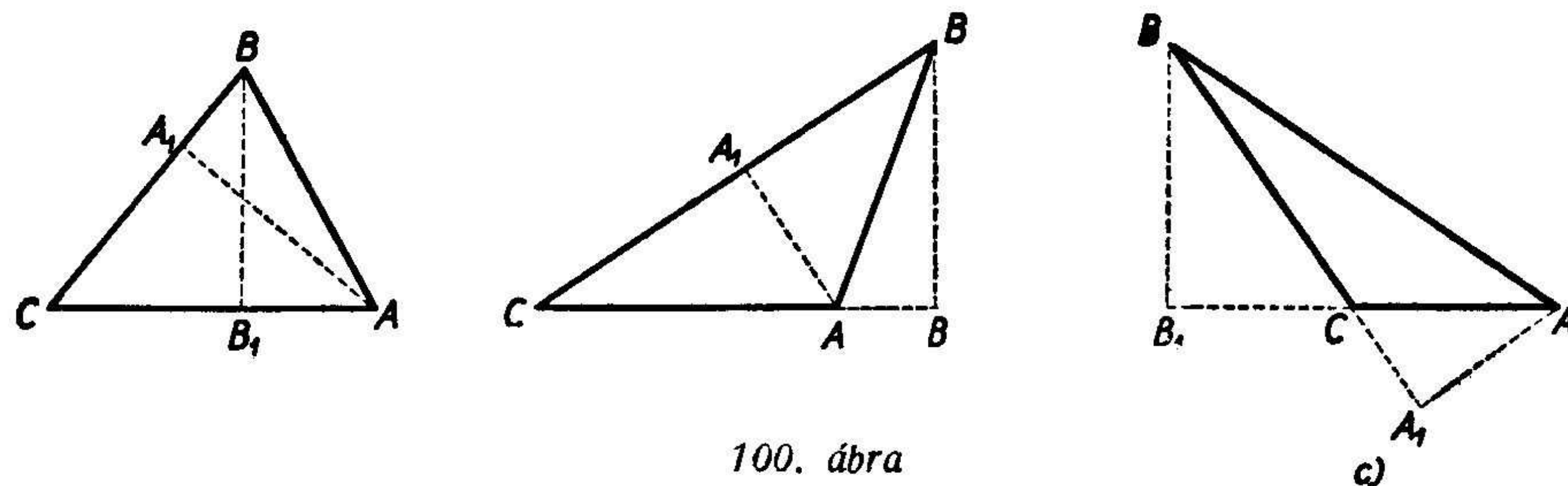
18. § Arányos távolságok a háromszögnél és a körnél

A háromszöggel, különösen a derékszögű háromszöggel, valamint a körrel kapcsolatban szerepelnek olyan távolságok, amelyekről belátható, hogy arány-párt alkotnak. Ebben a paragrafusban ilyen távolságokkal foglalkozunk.

18.1 A háromszögnek egy csúcsából a szemközti oldalegyenesre bocsátott merőleges szakaszt a háromszög *magasságának* (magasságszakasz, magasságvonal) nevezzük, mely az illető oldalhoz mint *alaphoz* tartozik. Ha derékszögű háromszög magasságáról beszélünk, akkor az átfogóhoz tartozó magasságra gondolunk, ugyanis a derékszögű háromszög egyik befogójához magasságként a másik befogó tartozik. Magasságnak mondjuk a magasságszakasz hosszát is.

Tétel. Ha a háromszög egy oldalát a hozzá tartozó magassággal megszorozzuk, akkor az oldal megválasztásától függetlenül mindig ugyanazt az eredményt kapjuk.

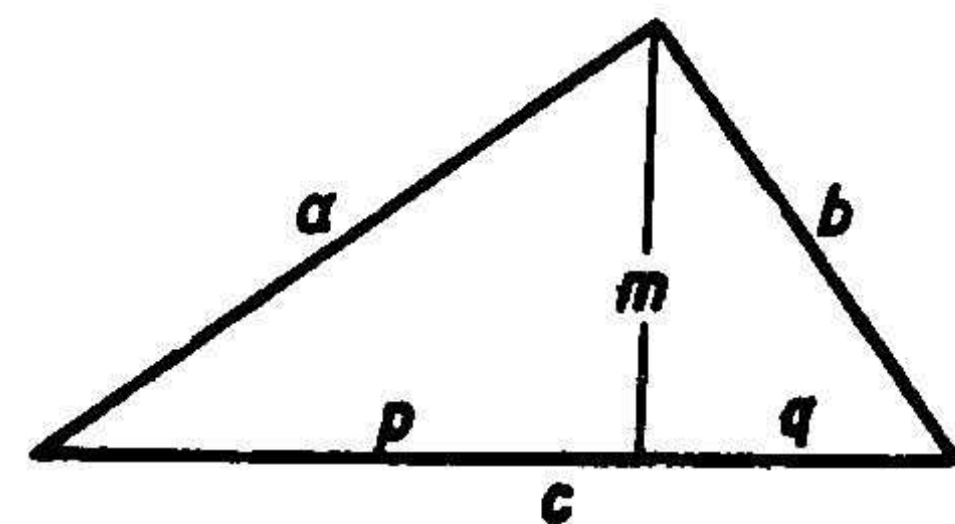
Ha az a, b, c oldalakhoz m_a, m_b, m_c magasságok tartoznak, akkor $am_a = bm_b = cm_c$. **Bizonyítás.** Elég csak az $am_a = bm_b$ egyenlőséget bizonyítanunk. Az $ABC\Delta$ -et és annak AA_1 és BB_1 magasságait tekintjük (100. ábra). $CAA_1\hat{=}CBB_1\hat{=}$, mert merőleges szárú hegyesszögek. Ezért a $CAA_1\Delta$ és $CBB_1\Delta$ hasonló, hiszen derékszögűk s egy-egy hegyesszögük egyenlő. A hasonlóság miatt $CA:CB = AA_1:BB_1$, azaz $b:a = m_a:m_b$, ami éppen a bizonyítandó egyenlőséget adja. —



100. ábra

B A tétel bizonyítására segédeszközzül a területszámítás kínálkozik, a területszámítás szabatos megalapozása viszont éppen erre a tételre támaszkodik (vö. 20.4 B).

18.2 A derékszögű háromszög magassága az átfogót két darabra bontja. Ezek a befogóknak az átfogóra vetett vetületei. Szokás szerint az a és b befogó vetületét p és q jelöli (101. ábra).



101. ábra

Tétel (magasságtétel). A derékszögű háromszög magassága a befogók átfogóra vetett vetületeinek a mértani középarányosa.

Két pozitív szám mértani középarányosa e két szám szorzatának pozitív négyzetgyökét jelenti. A tétel állítása szokott jelöléssel $m^2 = pq$.

Bizonyítás. A derékszögű háromszöget magassága két hasonló háromszögre bontja, mert hegyesszögeik merőleges szárú szögek. E hasonlóság alapján $p:m = m:q$, tehát $m^2 = pq$. —

Tétel (befogótétel). A derékszögű háromszög befogója mértani középarányosa az átfogónak s a befogó átfogóra vetett vetületének.

A tétel állítása szokott jelöléssel $a^2 = cp$ és $b^2 = cq$.

Bizonyítás. A derékszögű háromszög magassága által levágott háromszögek az eredeti háromszöghöz hasonlóak, mert egy-egy hegyesszögük közös. Az eredeti háromszög és pl. az a befogóra támaszkodó kisebb háromszög hasonlósága alapján $a:c = p:a$, azaz $a^2 = cp$. —

Tétel (PYTHAGORAS* tétéle). A derékszögű háromszög befogóinak négyzetösszege az átfogó négyzetével egyenlő.

Bizonyítás. Az előző tétel szerint, szokott jelöléssel, $a^2 = cp$ és $b^2 = cq$. Ezek összegezésével $a^2 + b^2 = c(p + q) = c^2$. —

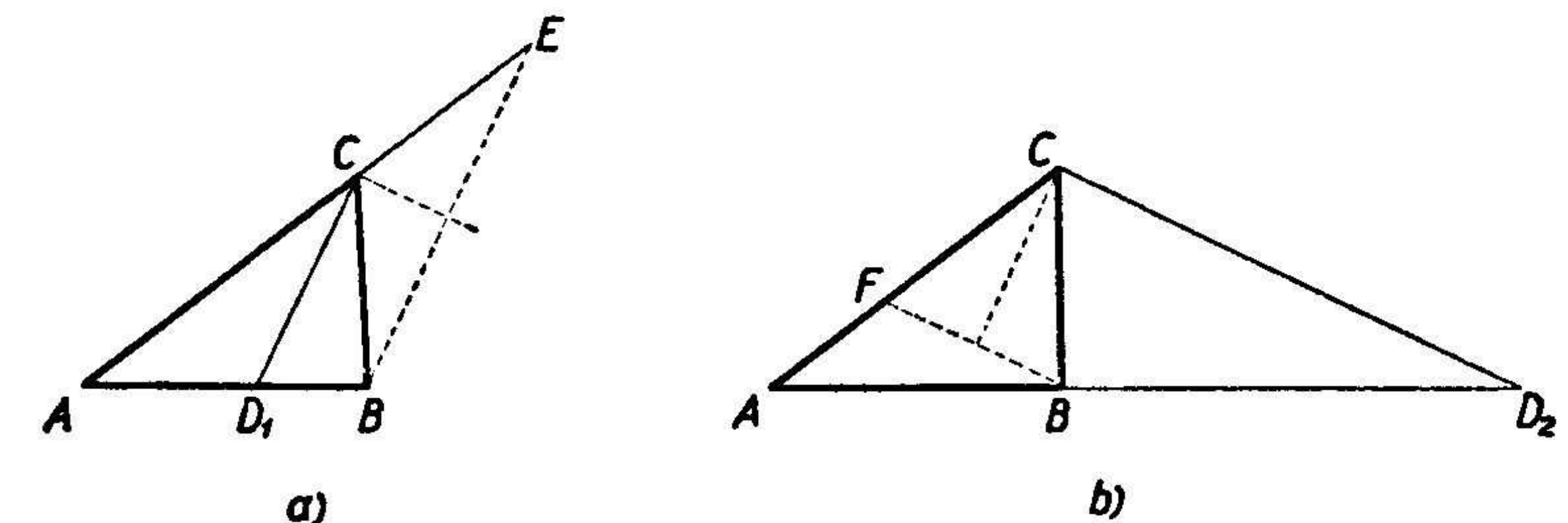
B Ennek a szakasznak a tételei megfordíthatók: ha egy háromszög c oldalát a hozzá tartozó m magasság p, q szakaszokra bontja, mégpedig p az a oldal és q a b oldal vetülete, ha továbbá ezekre három tételünk valamelyikének az állítása teljesül, akkor a háromszög derékszögű.

A magasságtétel esetében ez abból következik, hogy ha egy derékszögű háromszögből indulunk ki, és oly módon térünk át nem derékszögű háromszögre, hogy a és p rögzítése mellett a q szakaszt megváltoztatjuk, akkor $m^2 = pq$ már nem teljesül. Hasonlóan járhatunk el a befogótétel esetében is, de ott azt mondjuk, hogy a és p rögzítése mellett a c oldalt változtatjuk meg, és ennek következtében $a^2 = cp$ már nem lesz érvényes. Végül a Pythagoras-tétel esetében az a, b oldalakat tartjuk változatlanul, de az általuk közrefogott szöveget változtatjuk. Ekkor 11.5 szerint c hossza megváltozik, és ezért $a^2 + b^2 = c^2$ már nem teljesül.

18.3 A háromszög szögének felezőegyenését a háromszög (belső) szögfelezőjének, külső szögének felezőegyenését pedig a háromszög külső szögfelezőjének mondjuk. Sokszor ugyanígy nevezzük ezeknek a szögfelező egyeneseknek ama szakaszait is, amelyek a felezett szög csúcsát a szemközti oldallal kötik össze (szögfelezőszakasz, szögfelezővonal), valamint ezeknek a szakaszoknak a hosszát is.

Tétel. Ha a háromszög egyik oldalának az egyenesét a szemközti csúcsból induló (belső vagy külső) szögfelezővel metsszük, akkor a metszéspontnak az oldal végpontjaitól mért távolságai úgy aránylanak egymáshoz, mint a szemközti csúcsból ezekhez a végpontokhoz vezető oldalak.

A 102. ábra jelöléseivel a CD_1 belső és a CD_2 külső szögfelezőre $AD_1:D_1B = AD_2:D_2B = CA:CB$. A külső szögfelezőre vonatkozó állítás csak arra az esetre vonatkozik, amikor a szögfelező metszi a szemközti oldalt, amikor tehát a felezett szög nem egy egyenlő szárú háromszög szárszöge.



102. ábra

Bizonyítás. a) Az állítást először a CD_1 belső szögfelezőre bizonyítjuk. Az AC oldalt a $CE = CB$ távolsággal meghosszabbítjuk. CD_1 merőleges a $BCE\hat{=}$ felezőjére, mert ezek mellékszögek felezői. EB is merőleges $BCE\hat{=}$ felezőjére, mert a $BCE\Delta$ egyenlő szárú. Ezért $CD_1 \parallel EB$, és a párhuzamos sze-

* Pythagoras görög matematikus és filozófus i. e. 550 körül élt.

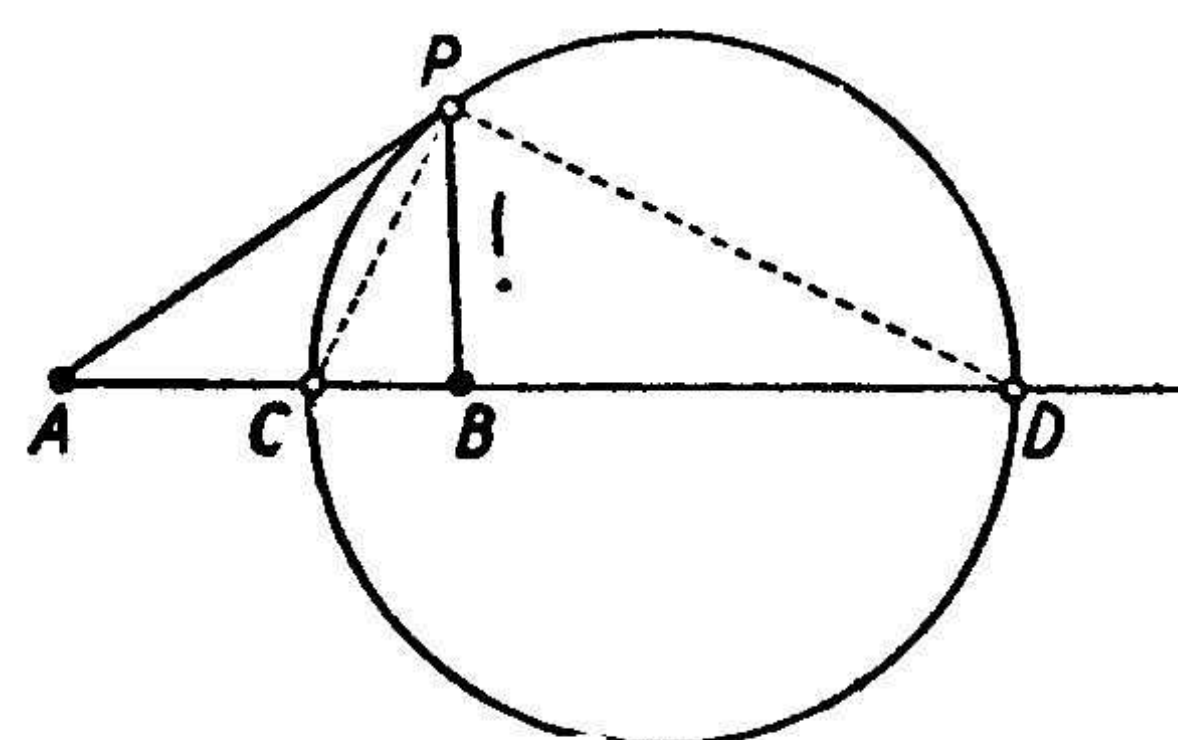
lők tétele alapján $AD_1 : D_1B = AC : CE$. Ez $CE = CB$ miatt a bizonyítandó állítással azonos.

b) Az állítást most a CD_2 külső szögfelezőre bizonyítjuk. Ha $CA = CB$, akkor a szögfelező a szemközti oldalt nem metszi, s ezért ezzel az esettel nem kell foglalkoznunk. Legyen pl. $CA > CB$. A CA oldal F pontjára legyen $CF = CB$. A CD_2 és FB egyenesek párhuzamosak, mert mindkettő merőleges az ACB felezőjére. A BAC szög szarainak megfelelő szakaszaira tehát $AD_2 : D_2B = AC : CF$, s ez $CF = CB$ miatt éppen a bizonyítandó állítás. —

18.4 Tétel. Azoknak a pontoknak a mértani helye a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságainak aránya adott, 1-től különböző pozitív szám, egy kör (Apollonios*-féle kör).

Az A és B ponthoz s a λ számhoz tartozó Apollonios-féle kör P pontjaira $PA : PB = \lambda$. Ha $\lambda = 1$, akkor mértani helyként AB felezőmerőlegese adódik.

Bizonyítás. a) Legyen P egy olyan pont, amely nincs az AB egyenesen, s amelyre $PA : PB = \lambda$. Feltehetjük, hogy $PA > PB$, azaz $\lambda > 1$. A PAB Δ-nek P -ből induló belső szögfelezője az AB oldalt C pontban metszi, P -ből induló külső szögfelezője pedig $\lambda > 1$ miatt az előző tétel értelmében AB -nek B -ből induló meghosszabbítását metszi egy D pontban (103. ábra). A és D pont az előző tétel értelmében a keresett mértani helyhez tartozik. Minthogy a szögfelezők egymásra merőlegesek, a P pont a CD távolság Thales-körén van.



103. ábra

Be akarjuk látni, hogy a mértani helynek minden P pontja ugyanezen a körön van. Ehhez elég azt kimutatnunk, hogy az AB egyenes pontjai közül csak C és D tartozik a mértani helyhez. Minthogy $\lambda > 1$, azt kell csak igazolnunk, hogy sem az AB szakaszon, sem a BD félegyenesen nincs más, a mértani helyhez tartozó pont. Ez a tény viszont a következő két megállapításból következik:

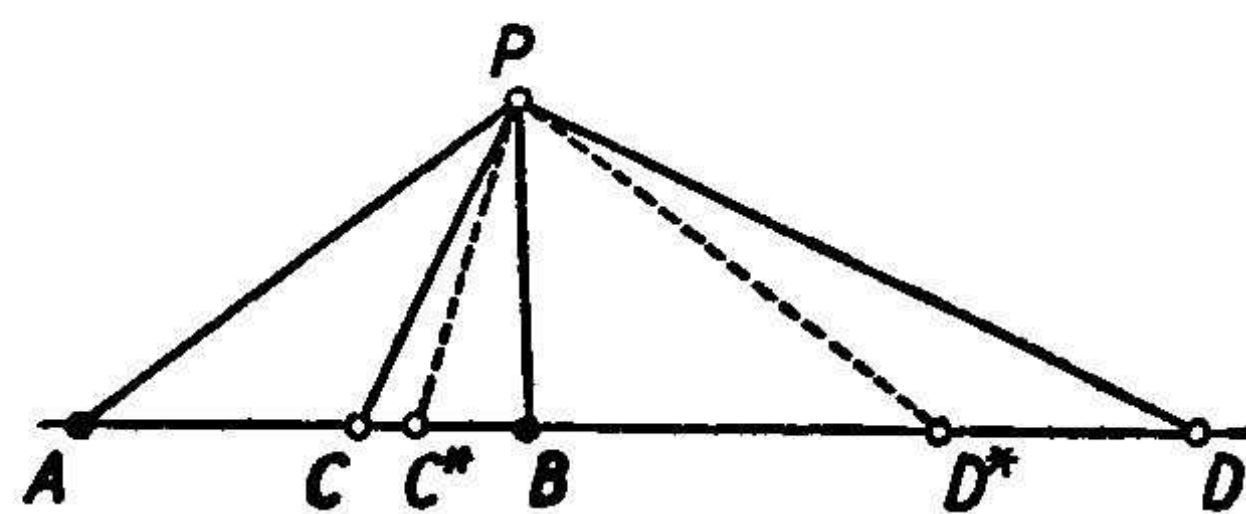
Ha C az AB távolságon A -tól B felé mozog, akkor az $AC : CB$ arány értéke állandóan növekszik. Ez abból következik, hogy ha C távolodik A -tól, akkor az AC/CB tört számlálója nő, nevezője pedig fogy.

Ha D a BD félegyenesen B -ből kiindulva mozog, akkor az $AD : DB$ arány értéke állandóan csökken. Ennek igazolása végett írjuk a vizsgált értéket $1 + AB/BD$ alakba. Ha D távolodik B -től, akkor az AB/BD tört csökken, mert számlálója állandó, nevezője pedig növekszik. Ezért a fenti állítás is helyes.

Ezek szerint C és D helyzete valóban egyértelműen meghatározott, s a keresett mértani hely minden pontja a CD szakasz Thales-körén van.

b) Be kell még látnunk, hogy ennek a körnek minden pontja a mértani helyhez tartozik. A és D pontokról tudjuk ezt. Legyen tehát P a körnek egy további pontja. Elég azt belátnunk, hogy PC és PD a PAB Δ szögfelezői, mert akkor az előző tétel értelmében $PA : PB = CA : CB = \lambda$.

A bizonyítást indirekt úton végezzük. Ha állításunk nem igaz, akkor a PAB Δ szögfelezői PC és PD -től különböző PC^* és PD^* egyenesek. Okoskodásunkat a 104. ábra torzítva kíséri. C és D megválasztása miatt $AC : CB = AD : DB$, az előző tétel szerint pedig $AC^* : C^*B = AD^* : D^*B$. Az a) rész megállapításai szerint ez csak úgy lehetséges, hogy vagy CD tartalmazza a C^*D^* távolságot, vagy C^*D^* a CD távolságot, annak megfelelően ti., hogy a második aránypárban nagyobb vagy kisebb arányok szerepelnek-e, mint az elsőben. Eszerint a CPD , C^*PD^* szögek egyike tartalmazza a másikat. Ez azonban lehetetlen, mert mindkettő derékszög, egyrészt Thales tétele, másrészt a szögfelezők merőlegessége miatt.



104. ábra

* Apollonios görög matematikus megközelítőleg i. e. 265—170 élt, Alexandriában működött.

Kell tehát, hogy PC és PD szögfelező legyen, s így CD Thales-körének valóban minden pontja a mértani helyhez tartozik. —

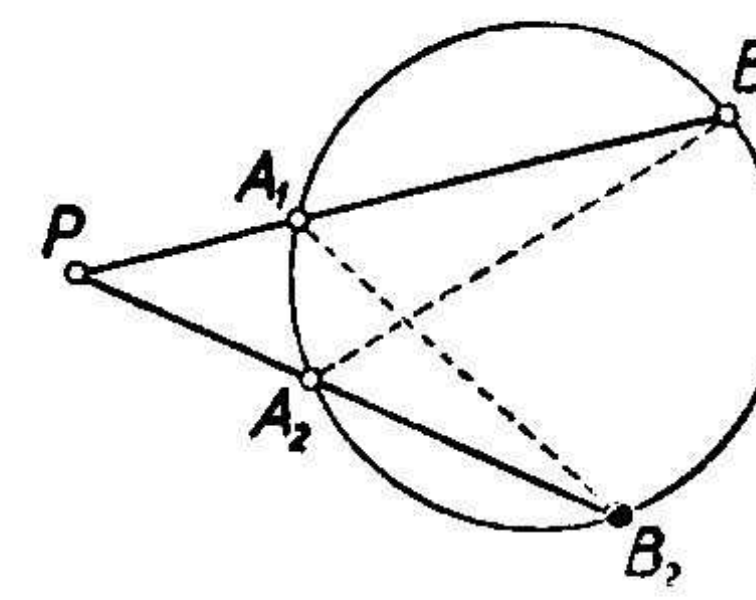
B A most bizonyított tételt 40,7-ben újból bizonyítjuk majd.

18.5 Tétel. Ha egy ponton át szelőt húzunk a körhöz, akkor a ponttól a metszéspontokig terjedő szakaszok szorzata nem függ a szelő megválasztásától.

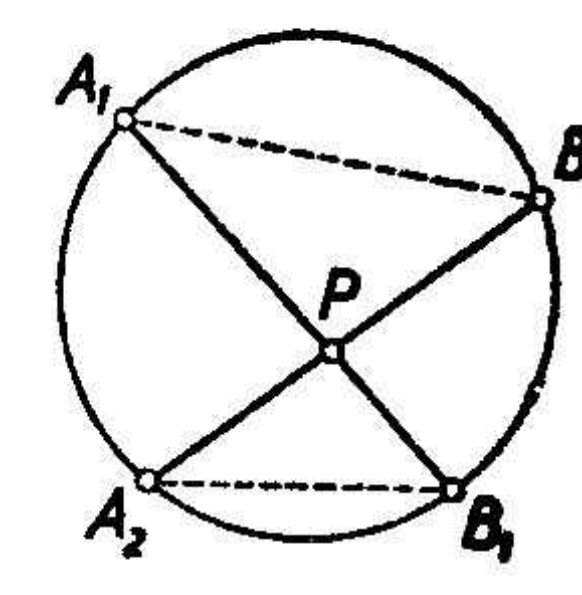
A szorzat csak a kör s a pont megválasztásától függ. Ha a szelő metszéspontjait A és B jelöli, és P a körön kívül van, akkor PA és PB egy irányú szakaszok. Ha viszont P a körön belül van, PA és PB iránya ellentétes. Ha P a körön van, akkor PA és PB egyike nulla. Kiegészíthetjük tehát tételünket azzal a megállapítással, hogy az irányított PA és PB szakasz előjeles hosszának szorzata sem függ a szelő megválasztásától.

Az előjeles távolságokkal számított $PA \cdot PB$ szorzatot a P pont *hatványának* nevezzük. Tételünk éppen annak a lehetőségét biztosítja, hogy definiálhassuk a pont körre vonatkozó hatványát. Külső pont hatványa pozitív, belsőé negatív, a kör pontjaié pedig nulla.

Bizonyítás. Ha a P pont a körön van, akkor a $PA \cdot PB$ szorzat értéke mindig nulla. Ezért csak a körön kívül s a körön belül levő pontokkal kell foglalkoznunk. Azt mutatjuk ki, hogy két szelő ugyanazt az értéket adja.



a)



b)

105. ábra

a) Legyen P a körön kívül. A 105a ábra jelöléseit használjuk. A PA_1B_2 és PA_2B_1 háromszögek hasonlóak, mert egyik szögük közös, és a PB_2A_1 , PB_1A_2 szögek ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. A hasonlóság folytán $PA_1 : PB_2 = PA_2 : PB_1$, és ezért $PA_1 \cdot PB_1 = PA_2 \cdot PB_2$.

b) Legyen P a körön belül. A 105b ábra jelöléseit használjuk. A PA_1B_2 Δ és a PA_2B_1 Δ hasonló, mert egy-egy szögük egymás csúcsharmonikus szöge, a PB_2A_1 , PB_1A_2 szögek pedig ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. Ez a hasonlóság ugyanahhoz az aránypárhoz és eredményhez vezet, mint az előbb. —

Tétel. Egy pontnak egy körre vonatkozó hatványa a pont körközepptől mért távolsága négyzetének s a sugár négyzetének különbségével egyenlő.

Ha $PO = d$, akkor P -nek az O középpontú, r sugarú körre vonatkozó hatványa $d^2 - r^2$.

Bizonyítás. Tekintsük a PO egyenesnek s a körnek A és B metszéspontjait (106. ábra). Előjeles távolságokkal számolva $PO = d$, $OA = -r$, $OB = r$, tehát $PA = d - r$, $PB = d + r$, a hatvány pedig ezek szorzata, azaz $d^2 - r^2$. —

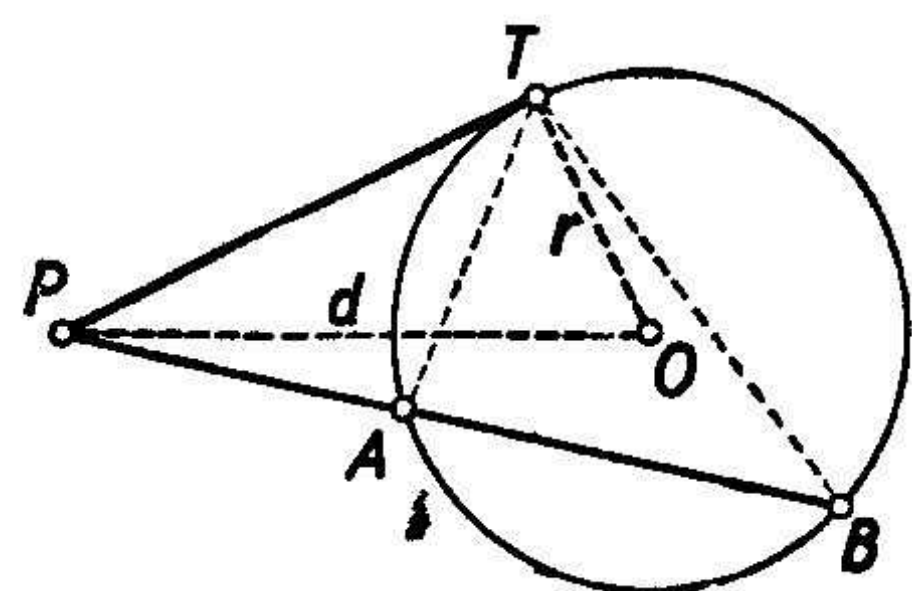


106. ábra

Ebből a tételből újból látható, hogy P hatványa pozitív, nulla vagy negatív aszerint, amint P a körön kívül, a körön vagy a körön belül van.

Tétel. Egy a körön kívül levő pontnak a körre vonatkozó hatványa a pontból a körhöz húzott érintő négyzetével egyenlő.

Ha a P -ből a körhöz húzott érintő a kört T -ben érinti, akkor P -nek hatványa \overline{PT}^2 . Ez a tétel szakaszunk első tételének határeseteként fogható fel. Már a tétel kimondása is feltételezi annak ismeretét, hogy a P -ből húzható két érintő hossza egyenlő.



107. ábra

Első bizonyítás. Szakaszunk első tételének a bizonyítása most is alkalmazható (107. ábra). A $PAT\triangle$ és a $PTB\triangle$ hasonló, mert egy szögük közös, a PTA , PBT szögek pedig ugyanazon az íven nyugvó kerületi szögek. E hasonlóság alapján $PA : PT = PT : PB$ és $PA \cdot PB = \overline{PT}^2$. —

Második bizonyítás. Mivel az érintő a sugárra merőleges, a $POT\triangle$ derékszögű. Pythagoras tétele szerint tehát $\overline{PT}^2 = d^2 - r^2$, és ez az előző tétel szerint P hatványával egyenlő. —

A A matematika jellegzetessége, hogy egy-egy tételnek több, néha sokféle bizonyítása is van. Többféle bizonyítás ismerete jól segíti az anyag összefüggéseinek megértését. Mi olyankor szerepeltetünk több bizonyítást, amikor több egyszerű bizonyítást említhetünk, s amikor a többféle bizonyítás valamilyen tanulsággal jár. A most szerepeltetett két bizonyítás burkoltan Pythagoras tételének új bizonyítását tartalmazza.

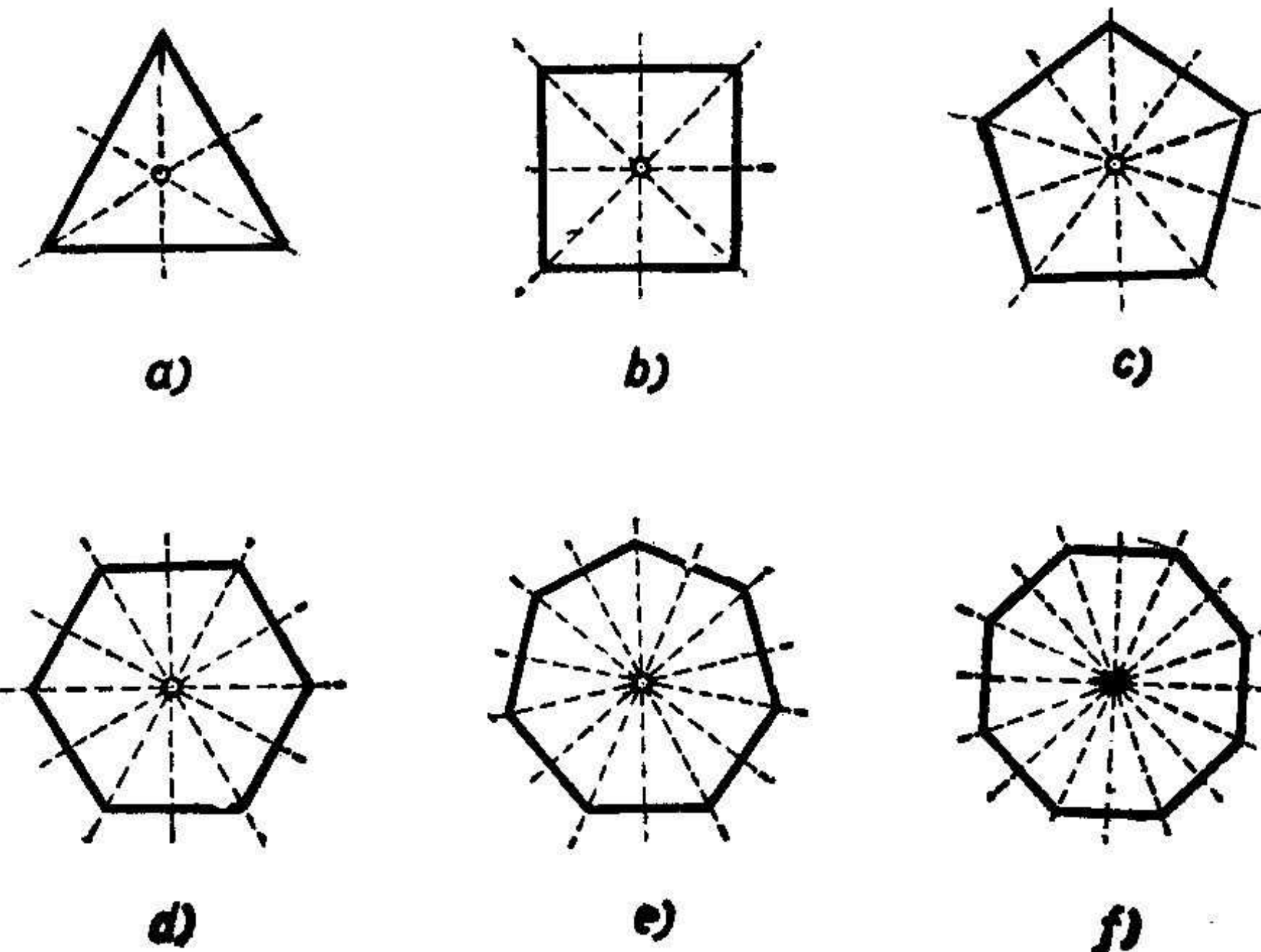
B A pont körre vonatkozó hatványával és erre épülő további tényekkel és fogalomalkotásokkal az analitikus geometria keretében még részletesen foglalkozni fogunk (lásd 40. §).

19. § Szabályos sokszög, a kör kerülete

Szabályos háromszöggel és négyszöggel (négyzet) már találkoztunk. Most általában az n -oldalú szabályos sokszögekkel foglalkozunk. A szabályos sokszögek tanulmányozása vezet el a kör kerületének kiszámításához.

19.1 Egy egyszerű sokszög *szabályos*, ha minden oldala és szöge ugyanakkora. Az egyenlő oldalú háromszög s a négyzet valóban szabályos ebben az értelemben. Természetesen csak legalább három oldalú szabályos sokszögekről lehet szó (108. ábra).

Szabályos n -szöghöz jutunk, ha a kör középpontjánál elhelyezkedő teljes szöget sugarakkal n egyenlő szögre osztjuk fel, és az így kapott középponti szögekhez tartozó húrok által határolt sokszöget tekintjük. Szabályos n -szöghöz juthatunk úgy is, hogy a teljes szöget n egyenlő szögre felosztó sugarak végpontjaiban a körhöz érintőt vonunk, és azt a sokszöget tekintjük, amelyet az érintőkből a szomszédos érintők által



108. ábra

kimetszett szakaszok határolnak. Mindkét eljárás szabályos sokszöghöz vezet, mert ha a teljes ábrát a kör középpontja körül $\frac{2\pi}{n}$ szöggel elforgatjuk, ugyanazt az ábrát kapjuk, ebből pedig következik, hogy sokszögeink oldalai és szögei egyenlők.

Minthogy az n -szög szögeinek összege $(n-2)\pi$, a szabályos n -szögnek egy szöge $\left(1 - \frac{2}{n}\right)\pi$. Ez a képlet $n = 3, 4, 5, 6$ esetében rendre $60^\circ, 90^\circ, 108^\circ, 120^\circ$ -ot szolgáltat. Minden szabályos sokszög konvex, hiszen szögei konvexek.

Két ugyanakkora oldalú szabályos n -szög (11.1 utolsó tétele szerint) egybevágó, mert oldalai és szögeik páronként is egyenlők. Ez a megállapítás mindig helyes, akármilyen módon rendeltük is előzetesen egymáshoz a két n -szög csúcsait (természetesen szomszédhoz mindig szomszédot rendelve). Ha tehát két szabályos n -szögnek egy oldala közös, és a közös oldal egyenese a két n -szöget nem választja el, akkor a két n -szög csak azonos lehet.

Bármely két szabályos n -szög hasonló, mert szögeik egyenlők, s oldalai aránya is megegyezik (vö. 17.5).

B Amikor beláttuk, hogy van szabályos n -szög, akármilyen 2-nél nagyobb természetes számot jelent is n , akkor arra építettünk, hogy a teljes szöget fel lehet osztani n egyenlő részre. Ha ezt a tényt axiómáinkra támaszkodva bizonyítani akarjuk, akkor a folytonosságból a köraxiómánál többre van szükség (vö. 5.2 B2). Ha a folytonosságot csak a köraxióma alakjában használjuk ki, akkor nem lehet n minden lehetséges értékére bebizonyítani, hogy léteznek szabályos n -szögek.

n bizonyos értékeire elvégezhetjük ezt a bizonyítást akkor is, ha a köraxiómánál többet nem veszünk igénybe. Az $n = 3, 4, 5, 6, 8, 10$ értékek ilyenek. Azokról az n értékekről van itt szó, ahány oldalú szabályos sokszöget meg lehet szerkeszteni (vö. 22.4 B2).

19.2 A szabályos sokszögek szimmetriaviszonyaival foglalkozunk.

Tétel. a) A szabályos n -szög minden oldalának felezőmerőlegesére és minden szögének szögfelezőjére vonatkozólag szimmetrikus.

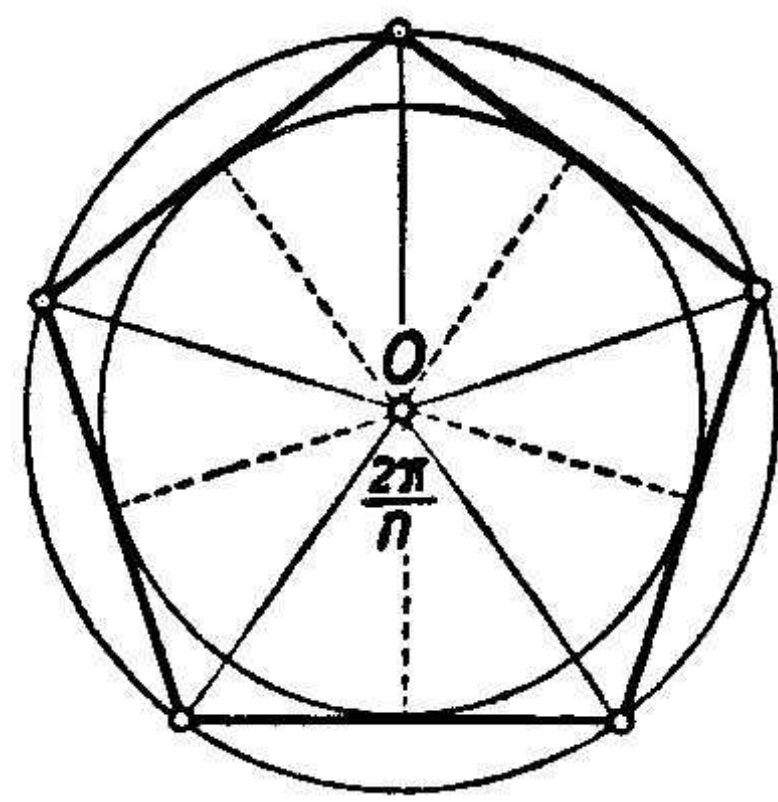
b) Ezek a szimmetriatengelyek egy közös ponton haladnak át.

A szimmetriatengelyek közös pontját a szabályos n -szög középpontjának (centrum) nevezzük.

Bizonyítás. a) Ha egy oldal felezőmerőlegesére tükrözünk, akkor ez az oldal és az oldalegyenes által határolt félsíkok helyben maradnak. Ha egyenlő oldalak által közrefogott szög felezőjére tükrözünk, akkor ez a két oldal helyet cserél, és a szögtartomány önmagát fedi. Mindkét tükrözésről megállapíthatjuk tehát, hogy a szabályos n -szög tükörképének van az eredetivel közös oldala, s hogy mindkettő ugyanarról az oldalról támaszkodik a közös oldalra. Az előző szakasz megállapítására hivatkozva kimondhatjuk ezért, hogy a szabályos n -szög mind a két esetben saját magának a tükörképe.

b) A szimmetriatengelyek közös pontjára vonatkozó állítás helyességét a szabályos n -szögek hasonlósága miatt elég, ha egy szabályos n -szögre látjuk be, hiszen a hasonlóság oldalfelező merőlegeshez oldalfelező merőlegest és szögfelezőhöz szögfelezőt rendel. Tekintsük evégből azt a szabályos n -szöget, amelyet az előző szakasz előírása szerint egy adott kör húrjaiból alakítottunk

(109. ábra). A húrokról tudjuk, hogy felezőmerőlegeseik a kör középpontján haladnak át, s hogy a kör középpontja a húroktól egyenlő távolságra van. Ez utóbbi tényből következik, hogy a kör középpontja rajta van a szögfelezőkön is. —



109. ábra

Tétel. A szabályos n -szög a középpontjára vonatkozólag n -edrendben forgásszimmetrikus.

Bizonyítás. Az előző szakaszban láttuk, hogy van n -edrendű forgásszimmetrikus szabályos n -szög. Az előző bizonyítás b) részében azt is megállapítottuk, hogy ennek a forgásszimmetriának a centruma a szabályos n -szög középpontja. A szabályos n -szögek hasonlóságából következik akkor, hogy ez minden szabályos n -szögnél így van, hiszen a hasonlóság szögtartó és egyenlő szakaszokhoz egyenlő szakaszokat rendel. —

Megállapíthatjuk, hogy páros oldalszámú szabályos sokszögek a középpontjukra vonatkozólag centrálszimmetrikusak is. Akár páros, akár páratlan oldalszámú a szabályos n -szög, szakaszunk első tétele mindig n szimmetriatengelyről szól, mert a páros esetben minden oldalfelező merőleges még egy oldalt felez, és minden szögfelező még egy szöget felez, a páratlan esetben pedig minden oldalfelező merőleges egy szöget is felez.

Az n -edrendű forgásszimmetriából közvetlenül következik, de kiolvasható az előző tétel bizonyításából is, hogy a szabályos sokszög középpontja körül kör írható a szabályos sokszög köré és a szabályos sokszögbe is.

A szabályos hatszögnél két szomszédos csúc és a középpont szabályos háromszöget ad, mert két egyenlő oldala 60° -os szöget fog közre. Egy körbe írt szabályos hatszög oldala tehát a kör sugarával egyenlő.

Leszögezzük végül, hogy egy szabályos sokszög alakját oldalszáma és egy távolságadata (oldala, beírt vagy körülírt körének a sugara) egyértelműen meghatározza.

B1 A szabályos n -szögnek a talált n szimmetriatengelyen kívül nincs más szimmetriatengelye. Ez abból következik, hogy a szimmetriatengely csak merőlegesen felezve metszhet egy oldalt, s ha csúcson halad át, akkor a csúcsnál elhelyezkedő szöget feleznie kell.

A szabályos sokszög középpontján kívül nincs más olyan pont, amelyre vonatkozólag véges rendű (legalább harmadrendű) forgásszimmetria volna megállapítható. Ez abból adódik, hogy egy ilyen forgásszimmetria centruma legalább annyi csúcstól van egyenlő távolságra, ahányadrendű a forgásszimmetria; márpedig bármely három csúc egyértelműen meghatározza a szabályos sokszög köré írt kört, tehát csak a középponttól van egyenlő távol.

A páros oldalszámú szabályos sokszög csak a középpontjára vonatkozólag centrálisan szimmetrikus. Mindjárt általánosabban azt bizonyítjuk itt, hogy korlátos alakzatnak nem lehet két szimmetriacentruma. Ha ugyanis A és B két ilyen szimmetriacentrum volna, akkor az alakzat egy P_0 pontját először A -ra, majd B -re tükrözve az alakzat egy P_1 pontjához jutnánk, és az irányított P_0P_1 szakasz a háromszög középvonaláról szóló tétel szerint az irányított AB szakasz kétszeresével egyenlő. Ezt az eljárást újból és újból elismételhetjük, és ezáltal a P_0P_1 egyenesen az alakzathoz tartozó, egyenlő közű $P_0, P_1, P_2, P_3, \dots$ pontsorozathoz jutunk. Ez ellentmond annak, hogy az alakzat korlátos, bizonyítja tehát, hogy két szimmetriacentrum nem lehet.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy a szabályos sokszögek körében nincs más szimmetria, mint amelyeket tárgyaltunk.

B2 A szabályos sokszög általánosítása révén a szabályos csillagsokszögekhez jutunk. Ezt a sík véges sok szakasza alkotja, ha minden végpontjuk két szakasz közös végpontja, és található hozzájuk olyan egybevágóság, amely a szakaszok egyikét egy tetszőlegesen előírt másikra

fekteti, s amely a teljes alakzat helyét nem változtatja meg. A szabályos sokszögvonal is ilyen alakzat, de ezt nem nevezzük szabályos csillagsokszögnek. Egy szabályos sokszögnek a középponttól egyenlő (0-tól különböző) távolságra levő átlói szabályos csillagsokszöget alkotnak.

19.3 Mielőtt a kör területét tárgyalnánk, a kerület fogalmával foglalkozunk. Egyelőre csak konvex síkidomok kerületéről lesz szó.

Egy síkidom által tartalmazott sokszöget a síkidom *belső* sokszögének, a síkidomot tartalmazó sokszöget a síkidom *külső* sokszögének nevezzük. Ha a síkidom sokszög, akkor egyben saját magának *belső* és *külső* sokszöge is. Az olyan egyszerű sokszöget, amelynek csúcsai egy síkbeli tartomány peremén vannak, *beírt* sokszögnek nevezzük. Egy adott sokszögbe beírt sokszögek között van maga az adott sokszög is. A beírt sokszög most adott definíciója általánosítja azt, amit a körbe írt sokszögekről már mondtunk (vö. 16.4).

Konvex síkidom beírt sokszöge konvex *belső* sokszög, mert oldalait a konvex síkidom tartalmazza, és oldalainak meghosszabbításán nem lehet pontja. Bármely *külső* sokszög kerülete bármely (más) konvex *belső* sokszög kerületénél nagyobb, mert a *külső* sokszög tartalmazza a *belső*t (vö. 9.5).

Egy korlátos konvex síkidom *kerületének* a beírt sokszögek kerületének a felső határát nevezzük. Mondjuk azt is, hogy ez a konvex síkidomot határoló konvex zárt görbe kerülete (hossza). A felső határ létezését a korlátosság biztosítja, mert bármely *külső* sokszög kerülete a konvex *belső* sokszögek kerületének felső korlátja.

Konvex sokszögre az új definíció 9.5 szerint a régi kerületet adja.

Egybevágó konvex síkidomok kerülete definíciónk szerint egyenlő, hasonló kerületének az aránya pedig a hasonlóság arányát adja.

A kerületnek felső határként való meghatározásánál *szorítkozhatunk olyan beírt sokszögekre, amelyek tartalmazzák a határoló konvex zárt görbe megadott véges sok pontját*. Ez azért lehetséges, mert az adott pontokat nem tartalmazó beírt sokszög kerületét növeljük, ha a sokszög és az adott pontok konvex burkával pótoljuk, és ez a konvex burk is beírt sokszög.

Definíciónkból következik, hogy egy konvex síkidom kerülete *egyetlen külső sokszög kerületénél sem nagyobb*. Az is igaz, hogy egy konvex síkidom kerülete egyetlen konvex *belső* sokszög kerületénél sem kisebb, mert minden *belső* sokszöghöz találhatunk azt tartalmazó beírt sokszöget. Ilyet ad azoknak a pontoknak a konvex burka, amelyekben a konvex *belső* sokszög oldalegyenesei a konvex síkidom határát metszik, illetve elhagyják. Ezért egy konvex síkidom kerülete a *konvex belső sokszögek kerületének is felső határa*.

Egy konvex síkidom kerülete a *síkidom belsejében elhelyezkedő konvex sokszögek kerületének is felső határa*. Ugyanezt kimondhatjuk ugyanis minden konvex sokszögre, tehát a konvex *belső* sokszögekre is, és egy számhalmaz felső határa nem változik meg, ha egyes részhalmazainak a felső határát a számhalmazhoz csatoljuk. Konvex sokszögre valóban helyes az állítás, hiszen egy *belső* pontot a centrális hasonlóság centrumául választva olyan az eredetihez hasonló, annak belsejében elhelyezkedő konvex sokszöghöz juthatunk, amelynek a kerülete előírt kevéssel kisebb az eredeti sokszög kerületénél, ha ti. a hasonlóság aránya kevéssel kisebb, mint 1.

Ha egy konvex síkidom tartalmaz egy másikat, akkor a *tartalmazottnak a kerülete nem lehet a tartalmazónál nagyobb*, hiszen a tartalmazottnak minden *belső* sokszöge *belső* sokszöge a tartalmazó síkidomnak is.

Azt mondjuk, hogy egy adott konvex síkidom által tartalmazott *konvex síkidomoknak egy sorozata tart* (konvergál) az adott síkidomhoz, ha az adott síkidom bármely *belső* pontját a sorozatnak csak véges sok eleme nem tartalmazza, ha tehát a pontot a sorozat valamelyik síkidomától kezdve már mindegyik tartalmazza. Azt is mondjuk, hogy ilyenkor a síkidomsorozatot *elemi határoló konvex zárt görbék sorozata tart* (konvergál) az adott konvex síkidom határvonalához.

Tétel. Ha egy adott korlátos konvex síkidom által tartalmazott konvex síkidomoknak egy sorozata tart az adott síkidomhoz, akkor kerületük is tart az adott síkidom kerületéhez.

Bizonyítás. Minthogy a sorozat síkidomainak kerülete nem lehet az adott síkidom kerületénél nagyobb, s minthogy ez a kerület az olyan belső sokszögek kerületének is felső határa, amelyek az adott síkidom belsejében vannak, elég azt bizonyítanunk, hogy a kerületsorozatnak nincs olyan torlódási értéke, amelyik egy az adott síkidom belsejében levő konvex S sokszög kerületénél kisebb. Ez valóban lehetetlen, mert a síkidomsorozat síkidomai konvexek, és véges soknak kivételével tartalmazzák S -nek minden csúcsát, tehát az egész S sokszöget is. —

A1 A kezdőt meglepi a kerület definíciójának körülményessége. Egyszerűbbnek hiszi a következő definíciót: a síkidom határára helyezett, majd kifeszített fonál hosszát kerületnek nevezzük. Ez a „definíció” végtelen vékony, határtalanul hajlékony, egyáltalában nem nyúló, a valóságban nem is létező fonalat feltételez. Jó lehet ez a gyakorlatban a kerület kisebb-nagyobb pontosságú megmérésére, a kerület definiálására azonban nem alkalmas, hiszen addig meg sem tudjuk mondani, mi a „nem nyúló” fonál, amíg nem tisztázzuk, mi a fonál hossza, ha nincs kifeszítve.

A2 Igen lényeges az a megállapítás, hogy a sokszögekhez az új definíció is a régi kerületet rendeli. Egy fogalom kiterjesztésekor feltétlenül ügyelni kell arra, hogy az új fogalomalkotás ne legyen ellentétben a réggel.

B Az ebben a szakaszban bizonyított tételt szövegezhetjük volna szűkebben, úgyhogy csak sokszögsorozatról szóljon. Ezzel kapcsolatban figyelmeztetünk arra, hogy bizonyítás nélkül nem nyilvánvaló, van-e olyan sokszögsorozat, amely egy megadott konvex síkidomhoz tart (lásd 20.6 B3). Ha ezt tudjuk, akkor a kerületet ilyen sokszögsorozat segítségével is definiálni lehet.

19.4 Tétel. Két kör kerületének aránya sugaruk arányával egyenlő.

Bizonyítás. A sugarak aránya a körök hasonlóságának az arányát adja. Ezért a sugarak aránya a két kör egymáshoz hasonló beírt sokszögei kerületének az arányával, tehát ezek felső határának az arányával is egyenlő. —

Tétel. Az r sugarú kör kerülete $2\pi r$, ahol π egy valós számot jelöl.

A tétel lényege, hogy a π szám r -től független. Tételünk ilyen π érték létezését mondja ki, tehát azt állítja, hogy a kör kerületét az átmérővel osztva minden körnél ugyanahhoz az eredményhez jutunk.

Bizonyítás. Az előző tételből következik, hogy ha egy kör kerületét sugarával elosztjuk, minden körnél ugyanazt a számot kapjuk. Ezt a számot 2π -vel jelölhetjük. —

A kör kerületéről mondottak alapján π értékét tetszőleges pontossággal meghatározhatjuk. Közeliítőleg $\pi = 3,14159$.

A1 π a periféria (kerület) szó görög kezdőbetűje. Értékének meghatározására már az ókorban törekedtek. Az egyiptomi Rhind papirusztekercsen (i. e. 1700 körül) értékeként $\left(\frac{16}{9}\right)^2 = 3,16\dots$ szerepel. ARCHIMEDES* a beírt és körülírt szabályos sokszögek segítségével módszert dolgozott ki π értékének meghatározására, a szabályos 96-szögek segítségével bebizonyította, hogy értéke $3\frac{10}{71} > 3,1408$ és $3\frac{10}{70} < 3,1429$ között van. 35 tizedesjegyre pontos értékét LUDOLF* határozta meg. Innen eredt, hogy Ludolf-féle számnak nevezték. Ma már több mint ezer jegyét határozták meg.

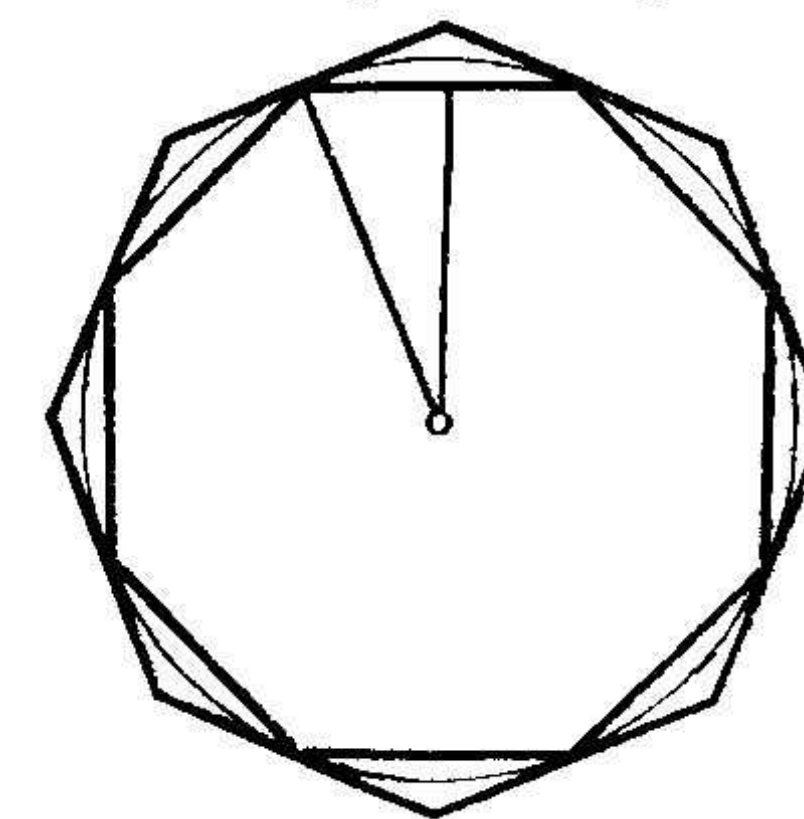
A2 A π szám irracionális, sőt transzcendens, azaz nem gyöke egyetlen egész együtthatós algebrai egyenletnek sem. A német J. H. LAMBERT bizonyította be 1770-ben, hogy irracionális, és a német F. LINDEMANN 1882-ben, hogy transzcendens.

19.5 Tétel. A körbe írt szabályos sokszögek kerülete is és a kör körül írt szabályos sokszögek kerülete is tart a kör kerületéhez, ha a sokszögek oldalszáma minden határon túl nő.

* A görög Archimedes i. e. 287—212 Szicília szigetén, Siracusában élt. Ludolf van Ceulen (ejtsd: fan kőlen) holland mérnök, 1540—1610.

Bizonyítás. Elég azt bizonyítanunk, hogy a beírt szabályos n -szög kerületét a körülírt szabályos n -szög kerületével osztva n növekedtekor 1-hez tartó hányadost kapunk. Ebből következik ugyanis, hogy ezek a kör kerületét közrefogó sokszögek a kör kerületéhez tartanak. Az említett hányados a két szabályos sokszög hasonlósága miatt azzal a hányadossal egyenlő, amelyet a középpontnak a sokszögsokszögektől való távolságai adnak (110. ábra). Minthogy a körülírt körre vonatkozólag ez a távolság éppen a körsugár, elég már csak azt bizonyítanunk, hogy a középpontnak a beírt szabályos n -szög oldalaitól való távolsága n növekedtekor a körsugárhoz tart. Ez viszont abból következik, hogy ennek a távolságnak és a sugárnak a különbsége a háromszögegyenlőtlenség szerint kisebb, mint a beírt szabályos n -szög oldalának a fele, ez utóbbi pedig 0-hoz tart, ha n minden határon túl nő. —

Tételünk módot ad π közelítő meghatározására. A tételnek a beírt sokszögekről szóló része 19.3 tételéből is következik, hiszen a növekvő oldalszámú beírt szabályos sokszögek a körhöz tartanak (vö. B2).



110. ábra

B1 Bebizonyítjuk, hogy a körbe írt szabályos n -szög oldala az oldalszám növekedtekor valóban 0-hoz tart, vagy általánosabban: hogy egy kör húrjainak hossza 0-hoz tart, ha középponti szögeik 0-hoz tartanak.

Azt kell bizonyítanunk, hogy egy adott körhöz és egy megadott távolsághoz megadható egy olyan ω szög, hogy ha a kör egy húrjához ω -nál kisebb középponti szög tartozik, akkor a húr hossza a megadott távolságnál kisebb. Mivel kisebb középponti szöghöz rövidebb húr tartozik, elég az ω szöget úgy választanunk meg, hogy ω -hoz a megadott távolságnál kisebb húr tartozzék.

Írjunk a kör egy A pontja körül kört, amelynek sugara a megadott távolságnál és a kör átmérőjénél is kisebb. A rajzolt kör 15.6 szerint metszi körünket. Ha B egy metszéspont, akkor az AB húrhoz tartozó ω középponti szöget tekintjük. Ez a szög megfelel követelményünknek, mert a hozzá tartozó AB húr valóban kisebb a megadott távolságnál.

B2 Hivatkoztunk arra, hogy a beírt szabályos sokszögek sorozata a körhöz tart. Itt még többet bizonyítunk: Ha egy körbe írt, a kör középpontját tartalmazó sokszögekből álló sorozat finomodó abban az értelemben, hogy a sokszögek leghosszabb oldalainak sorozata 0-hoz tart, akkor a sokszögek kerülete tart a kör kerületéhez.

Csak azt kell belátnunk, hogy sokszögsorozatunk a körhöz tart, azaz hogy a kör bármely belső pontját a sorozatnak légfeljebb véges sok sokszöge nem tartalmazza. Ez valóban így van, mert ha a sokszög leghosszabb oldala már olyan rövid, hogy a középpontnak ettől az oldaltól való távolsága a választott belső ponttól való távolságánál nagyobb, akkor a sokszög tartalmazza ezt a belső pontot, hiszen a rajta áthaladó sugarat a sokszög határa a belső pontnál messzebb metszi.

Az utolsó lépés arra a kikötésre támaszkodott, hogy a kör középpontja sokszögeink belsejében van. Ilyen megszorítás nélkül nyilván nem is helyes az állítás. Helyettesíthető viszont ez a megszorítás mással, pl. azzal, hogy a sorozat sokszögeinek ne legyen hegyesszögük.

19.6 Egy módszert ismerünk meg π jegyeinek kiszámítására. A számítás egyszerűsítése érdekében nem egy adott sugarú körbe írt s e kör köré írt egyre több oldalú sokszögek kerületét fogjuk kiszámítani, hanem adott kerületű s egyre több oldalú szabályos sokszögek beírt és körülírt körének sugarát határozzuk meg. π értékéhez jutunk tehát, ha majd az adott kerületet a kiszámított sugarak határértékének kétszeresével osztjuk.

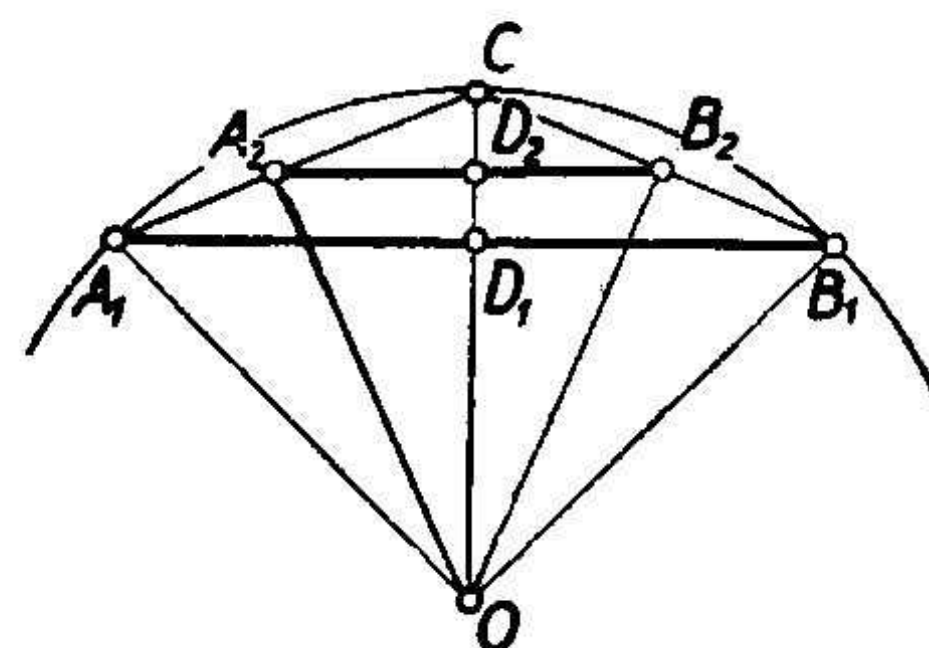
Eljárásunk alapja a következő tétel lesz:

Tétel. Ha r_1 és R_1 egy szabályos sokszög beírt és körülírt körének sugarát jelöli, akkor az ugyanakkora kerületű s kétannyi oldalú szabályos sokszög beírt és körülírt körének r_2 és R_2 sugarát a következő képletek adják:

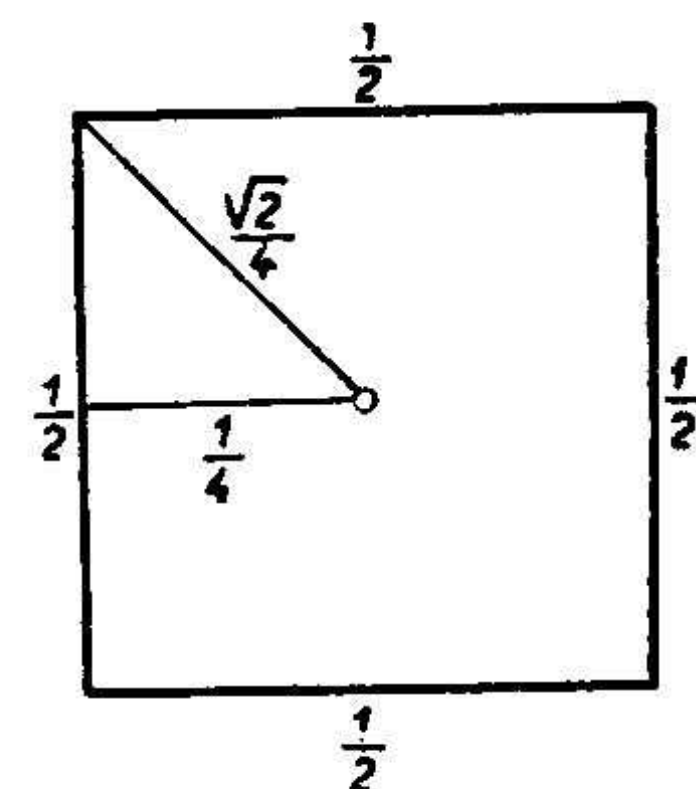
$$r_2 = \frac{r_1 + R_1}{2}, \quad R_2 = \sqrt{R_1 r_1}.$$

Bizonyítás. Legyen az O középpontú szabályos n -szög egy oldala A_1B_1 , s ennek felezőpontja D_1 (111. ábra). A beírt és körülírt kör sugara tehát $r_1 = OD_1$, $R_1 = OA_1$.

Az OD_1 félegyenes a sokszög köré írt kört a C pontban metszi. Az $A_1B_1C\Delta$ -nek A_1B_1 -gyel párhuzamos középvonala A_2B_2 . Állítjuk, hogy A_2B_2 egy O középpontú, az n -szöggel egyenlő kerületű, szabályos $2n$ -szögnek az oldala. Ez akkor igaz, ha az $OA_2B_2\Delta$ egyenlő szárú, A_2B_2 fele A_1B_1 -nek, és az $A_2OB_2\Delta$ fele az $A_1OB_1\Delta$ -nek. Az első megállapítás az ábra OC -re vonatkozó szimmetriájából, a második A_2B_2 középvonal voltából, a harmadik pedig abból következik, hogy OA_2 és OB_2 felezi az A_1C és B_1C húrokhoz tartozó középponti szöget, mert a húrokat felezi. Ha tehát A_2B_2 felezőpontját D_2 jelöli, akkor $r_2 = OD_2$ és $R_2 = OA_2$.



111. ábra



112. ábra

Minthogy A_2B_2 középvonal, D_2 felezi a CD_1 szakaszt, és így

$$r_2 = OD_2 = \frac{1}{2}(OD_1 + OC) = \frac{1}{2}(r_1 + R_1).$$

Az OA_2C derékszögű háromszögből viszont a befogótétel szerint

$$R_2 = OA_2 = \sqrt{OC \cdot OD_2} = \sqrt{R_1 r_2}.$$

Ez a tétel valamely szabályos sokszög r_1 és R_1 értékéből kiindulva viszonylag egyszerű számítással s elég gyors közelítéssel lehetővé teszi π kiszámítását. Célszerű például a 2 kerületű

négyszetből kiindulni, amelyre $r_1 = \frac{1}{4}$ és $R_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$ (112. ábra). Ez esetben ugyanis π a ki-

számított sugarak határértékének reciproka lesz, mert a sokszögek kerületének fele a sugárral osztva π -hez tart. A kiszámított sugarak a határértéket közrefogják, ezért mindegyik sugár-pár alsó és felső becslést is ad π számára.

A számítás eredményét a mondott kezdés mellett 6 tizedes jegyre pontosan a következő táblázat tartalmazza:

| | |
|------------------|------------------|
| $r_1 = 0,25$ | $R_1 = 0,353553$ |
| $r_2 = 0,301777$ | $R_2 = 0,326641$ |
| $r_3 = 0,314209$ | $R_3 = 0,320365$ |
| $r_4 = 0,317287$ | $R_4 = 0,318822$ |
| $r_5 = 0,318055$ | $R_5 = 0,318438$ |
| $r_6 = 0,318246$ | $R_6 = 0,318342$ |
| $r_7 = 0,318294$ | $R_7 = 0,318318$ |
| $r_8 = 0,318306$ | $R_8 = 0,318312$ |
| $r_9 = 0,318309$ | $R_9 = 0,318310$ |

Az utolsó értékek szabályos 1024-szögekre vonatkoznak. Ezek reciproka hat jegyre pontosan 3,14160 és 3,14159.

B1 A számítást az $r_0 = 0$ és $R_0 = 0,5$ értékekkel is elkezdhettük volna, így az első lépés éppen r_1 és R_1 fenti értékét adja. Ez a „szabályos kétszögből” való kiindulásnak felel meg.

B2 Ha két szám viszonylag kevésbé különbözik egymástól, mértani közepük nagyon közel van számtani közepükhöz. Ezért számításunk későbbi lépéseiben az R értékeket számtani közép képzése is megadta volna.

Könnyen belátható, hogy ha valamely r_i , R_i értékpárból kiindulva számtani közepelés-

sel számítjuk a további értékeket, akkor határértékük $\frac{1}{3}(r_i + 2R_i)$ lesz. Ezt az észrevételt a számítás gyors befejezésére használhatjuk fel. Ha a fenti számítást csak r_4 és R_4 meghatározásáig végezzük el, ezekből az értékekből máris $\frac{1}{3}(r_4 + 2R_4) = 0,318310$, s ebből π értékeként 3,14159 adódik.

19.7 A körív hosszával akarunk foglalkozni. Előbb azonban az ívhossz fogalmával ismerkedünk meg. Csak konvex zárt görbe íveiről lesz szó.

Egy konvex zárt görbét két pontja két *konvex ívre* bont fel (lásd B1). A konvex ív lehet egyenesszakasz is.

Ha nem szakaszcsozról van szó, akkor a konvex ív végpontjait összekötő szakaszt az ívhez tartozó *húrnak* mondjuk. Ilyenkor ez a húr az ívvel együtt egy konvex síkidomot határol. Ha ennek a síkidomnak kerületéből a húr hosszát levonjuk, a konvex ív *ívhosszát* (hosszát) kapjuk. A szakaszhoz ívhosszként a szakasz hosszát rendeljük.

Konvex sokszög határán elhelyezkedő töröttvonalhoz definíciónk ugyanazt rendeli ívhosszként, mint amit eddig a töröttvonal hosszának neveztünk.

Megállapíthatjuk, hogy egybevágó konvex ívek hossza egyenlő, s hogy hasonlóak hosszának hányadosa a hasonlóság arányát adja.

Egy konvex ív esetében *beírt* poligonnak nevezzük az olyan nyílt töröttvonalat, amelynek végpontjai az ív végpontjai, s amelynek töréspontjai az íven vannak. Ha a konvex ív nem egyenesszakasz, akkor a beírt poligon a húrral együtt egy az ív és húr határolta síkidomban írt sokszöget határol.

Tétel. Egy konvex ív hossza a beírt poligonok hosszának felső határa.

Bizonyítás. Feltehetjük, hogy nem szakaszcsozról van szó, hiszen arra a tétel helyessége nyilvánvaló. Az ív és húr határolta síkidom kerületének kerületek felső határaként való előállításánál szorítkozhatunk azokra a beírt poligonokra, amelyeknek töréspontjai között az ív végpontjai is szerepelnek. Ha az ebben a kijelentésben szereplő kerületek mindegyikét a húr hosszával csökkentjük, állításunk helyességét látjuk be. —

Tétel. Egy konvex zárt görbe két csatlakozó ívének ívhosszát összeadva a két ív együttesének ívhosszát kapjuk.

A két ív együttese lehet egy ív, de lehet a teljes zárt görbe is. Ez utóbbi esetben a zárt görbe ívhossza a kerületet jelenti.

Bizonyítás. Ha íveink együttesének ívhosszát felső határként származtatjuk, szorítkozhatunk olyan beírt poligonokra, amelyeknek szögpontjai között a két ív (egy vagy két) csatlakozási pontja is szerepel. A két ív hosszának összegét és az ívek együttesének ívhosszát ezek szerint ugyanannak a számhalmaznak a felső határa adja. —

Tételünkkel következik, hogy ha egy konvex ívet vagy egy konvex zárt görbét n ívre bontunk, akkor ezek ívhosszainak összege a teljes ívhosszat adja.

A Minthogy az ívhosszt hosszúságmértékkel definiáltuk, az ívhossz is hosszúságdimenziójú mennyiség.

B1 Ha megadjuk egy konvex zárt görbe két pontját, akkor az általuk határolt két konvex ívhez a következőképpen jutunk: a zárt görbe által határolt tartomány egy belső pontjából a két ponton át félegyeneseket húzunk, majd tekintjük az ezek által határolt két szögtartományt a zárt görbével alkotott közös részét. Ez az eljárás annak az általánosítás, ahogyan a körívhez jutottunk (vö. 5.2 B1). Ha a felbontással származó két konvex ív között nincs szakasz, akkor szögtartományok helyett szerepeltethetnők azokat a félsíkokat is, amelyek a két pont összekötő egyenese határol.

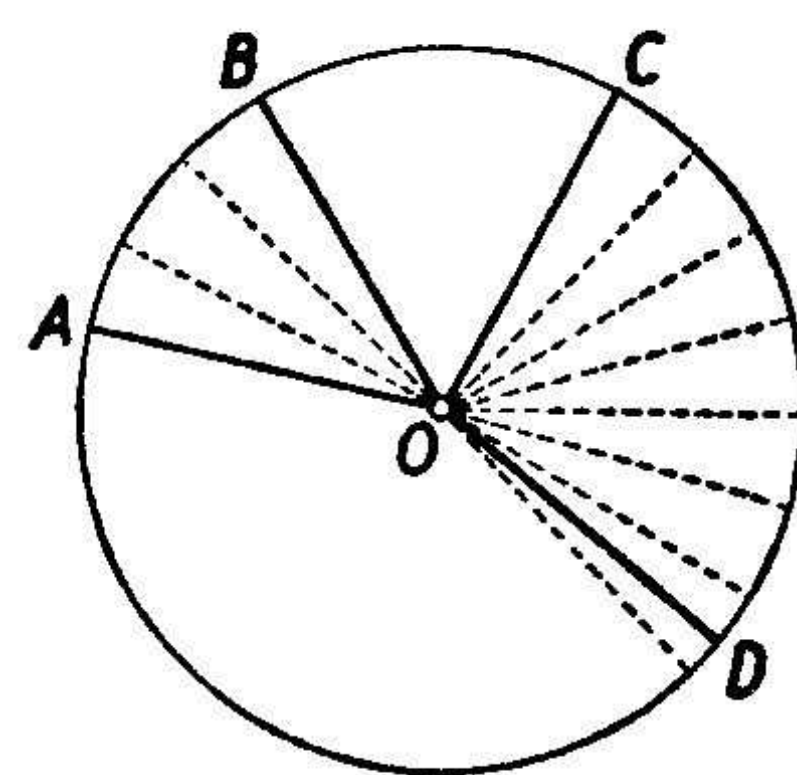
B2 Véges sok konvex ív egymáshoz fűzésével adódó vonal ívhosszának a konvex ívek hosszának összegét nevezzük. Ezzel a definícióval a kerület fogalmát is általánosítottuk. Ez az új definíció utolsó tételünk szerint fedi a régit. Az is nyomban megállapítható, hogy szakaszunk mindkét tétele helyes marad, ha azokat az új definíciót elfogadva véges sok konvex ívből összerakott görbére, mondjuk ki.

Első tételünk alapján az ívhossz fogalmát még tovább, véges sok konvex ívből össze nem rakható görbékre is általánosítani lehet. Ilyen általánosítással az analízis és a differenciálgeometria foglalkozik.

B3 A differenciálgeometria általánosságban mindenféle alakzat metrikus tulajdonságával foglalkozik, és legfőbb segédeszközként az aritmetikai és a geometriai határátmenetet használja. Határátmenettel alakzatokat is definiál (vö. 15.2 B1), és az alakzatokhoz határátmenettel rendelt mértékeket vizsgál. Módszeréből következik, hogy erősen összefonódik az analízissel. Nagymértékben felhasználja az analízist, az analízis egyes fejezeteinek geometriai köntöst ad, és az analízist számos vizsgálati tárggyal gazdagítja.

Ebben az elemi jellegű könyvben is szerepelnek határátmenettel definiált mértékek, infinitézimális fogalmak: az ívhossz, a terület, a térfogat és a felszín (vö. 15.2 B2). Mondhatjuk, hogy ezek már a differenciálgeometriához tartoznak. Valóban a differenciálgeometria foglalkozik ezekkel a fogalmakkal teljes általánosságban. Mi megelégszünk azzal, hogy az ilyen infinitézimális fogalmakat — miként a kerületnél és az ívhossznál is tettük — az általunk részletesen vizsgált alakzatokat felölelő, egyszerű tárgyalást megengedő, szűk körben vezessük csak be.

19.8 A körív hosszának tárgyalásánál felhasználjuk azt, hogy egy körben az egyenlő középponti szögekhez tartozó, egybevágó körívek hossza egyenlő, és hogy egymáshoz csatlakozó ívek hosszának összege az általuk alkotott teljes ív hossza. A körív jelével egyben a körív hosszát is jelöljük.



113. ábra

Tétel. Egy kör íveinek hossza középponti szögükkel arányos.

Bizonyítás. Legyen n tetszőleges természetes szám. Az AB körív középponti szögét n egyenlő részre osztjuk (113. ábra). Az így kapott szöget felmérjük a CD ív középponti szögére az OC szártól kezdve annyiszor, ahányszor csak tudjuk. Ha k -szor mérhettük fel, akkor

$$k \frac{AOB}{n} \leq COD < (k+1) \frac{AOB}{n}.$$

A körívek hosszára fentebb kimondottakból következik, hogy

$$k \frac{AB}{n} \leq CD < (k+1) \frac{AB}{n}.$$

Egyenlőtlenségeinket AOB -gel és AB -vel osztva azt kapjuk, hogy a COD/AOB , CD/AB hányadosok nem kisebbek $\frac{k}{n}$ -nél, viszont kisebbek

$\frac{k+1}{n}$ -nél. E hányadosok különbsége tehát $\frac{1}{n}$ -nél kisebb. Minthogy n tetszőlegesen nagy lehet, a két hányados egyenlő. —

Tétel. Az r sugarú kör α középponti szöghöz tartozó ívének hossza αr , ha a középponti szöget ívmértékkel mérjük.

Ha a szöget fokokban adjuk meg, a képlet bonyolultabb. Ha $\alpha = n^\circ$, akkor az ívhossz $\frac{\pi n r}{180}$ (vö. 3.3 B1):

Bizonyítás. Minthogy a körív hossza a középponti szöggel arányos, a keresett i ívhosszra

$$i : 2\pi r = \alpha : 2\pi.$$

Ebből az aránypárból $i = \alpha r$ adódik. —

Tételünk szerint az egységsugarú körben az α ívmértékű szöghöz α hosszúságú ív tartozik. Megállapítottuk tehát, hogy az ívmérték annak a csúcs körül rajzolt egységsugarú körívnek a hossza, amelyik a szárakat a szögtartományon belül köti össze.

B1 Ha egy körív végpontjainak sorrendjét is megadjuk, azaz megmondjuk, melyik a kezdőpontja és melyik a végpontja, akkor irányított körívről beszélünk. Ha AB irányított ívet jelöl, akkor A a kezdőpontja. Az irányított köríveknek irányított középponti szögtartományok felelnek meg. Irányított síkban az irányított körívekhez előjeles ívhosszat rendelhetünk. Ehhez úgy jutunk, hogy az ívhosszat pozitív vagy negatív előjellel látjuk el aszerint, amint a megfelelő irányított középponti szögtartomány pozitív vagy negatív forgásszöget szolgáltat. Az irányított körívekkel az irányított szakaszokhoz hasonlóan számolhatunk.

Ha egymáshoz csatlakozó irányított íveket tekintünk, az is lehetséges, hogy ezek egészen vagy részben fedik egymást. Ha az így származtatott, egészen vagy részben többszörös íveket is az irányított ívekhez soroljuk, akkor elmondhatjuk, hogy bármely kör irányított íveinek az előjeles hossza tetszőleges valós érték lehet.

B2 Már jóval korábban is megtehettük volna, hogy egy kör íveit mérjük, de nem ívhosszúságukkal, hanem azáltal, hogy egy körívet egységül választunk. Ha megállapodnánk abban, hogy egybevágó ívekhez ugyanaz a mérték tartozzék, és két csatlakozó ívből összerakott ívnek a mértéke mindig a két részív mértékének összege legyen, akkor az egységívből kiindulva minden ívhez egy-egy pozitív valós számot rendelhetnénk mértékül. Ez az eljárás végeredményben azt jelentené, hogy egy kör íveit középponti szögükkel mérnők.

Nem jártunk el így, mert a kétféle körívmérés zavarólag hatna. Ez a belátás vezetett, amikor 15.3-ban nem beszéltünk egyenlő, nagyobb és kisebb körívekről.

B3 Tételünk bizonyításában szerepelt az, hogy egy szöget n egyenlő részre bontottunk fel, s ennek lehetőségét a köraxióma nem biztosítja. Még sincs itt szükség a köraxiómánál többre, mert a bizonyításban n szerepét 2^n is játszhatja, és a szögek ismételt felezésének lehetőségét a köraxióma biztosítja.

B4 Ha egy körívbe írt poligonok finomodó sorozatot alkotnak abban az értelemben, hogy a poligonok leghosszabb oldalainak a sorozata is 0-hoz tart, akkor a poligonok hossza a körív hosszához tart (vö. 19.5 B2).

Ennek igazolásához, 19.3 tételére és az ívhossz definíciójára hivatkozva, elég azt bizonyítanunk, hogy ha a beírt poligonokat a körív h húrával lezárjuk, akkor az ív és húr határolta S körszelethez tartó sokszögsorozathoz jutunk. Szorítkozhatunk itt azokra a poligonokra, amelyeknek valamennyi oldala h -nál rövidebb. Egy ilyen oldal a kört két ívre bontja, s ezek rövidebbike 15.3 szerint nem tartalmazhatja h végpontjait. Igaz ezért, hogy ez a poligonoldal az általa határolt körszeletek közül a kisebbiket választja el a poligon és húr határolta sokszögtől, azt tehát, amelynek a pontjai közül a poligonoldal felezőpontja van a legközelebb a kör O középpontjához. Ha mármost az S körszelet egy belső P pontját tekintjük, akkor megállapíthatjuk, hogy ha valamely beírt poligon és húr határolta sokszög a P pontot nem tartalmazza, akkor P valamelyik poligonoldal által a sokszögtől elválasztott körszeletben van, messzebb van tehát O -tól, mint a poligonoldal valamelyikének a felezőpontja. A szóban forgó sokszögsorozatban csak véges sok ilyen sokszög lehet, hiszen a leghosszabb oldal O -hoz tartása miatt a legközelebbi oldalfelezőpontnak O -tól mért távolsága a körsugarhoz tart, és ezért csak véges sokszor lehet az OP távolságnál kisebb. Sokszögsorozatunk tehát valóban S -hez tart.

Megemlítjük, hogy a most bizonyított állítás nemcsak körívre, hanem tetszőleges konvex ívre, sőt csatlakozó konvex ívekből összerakott nyílt (azaz két végpontot összekötő) vonalakra is teljesül, de ennek bizonyításával már nem foglalkozunk. Beírt poligonok finomodó sorozatának a segítségével ki is lehet terjeszteni az ívhossz fogalmát további görbékre. Az analízis és differenciálgeometria a 19.7 B2-ben említett módszer mellett ezt a módszert is használja.

20. § Terület

Először a sokszögek, majd általában a síkidomok területével foglalkozunk.

20.1 Minden sokszöghöz rendelhetünk egy valós számot, amelyet *területnek* nevezünk, s amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

1. Minden sokszög területe pozitív szám.
2. Egybevágó sokszögek területe egyenlő.
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk, e kettő területének összege az eredeti sokszög területével egyenlő.
4. Az egységnégyzet területe 1.

Az utolsó megállapítás szerint a terület ismeretéhez a hosszegység ismeretére van szükség. Ha más hosszegységet, illetve területegységet választunk, akkor minden terület osztandó az újonnan területegységül választott sokszög területével.

Ebből a megállapításból következik, hogy nem függ a területegység megválasztásától az olyan kijelentések helyessége, hogy két sokszög területe egyenlő, hogy az egyik a másiknál kisebb vagy nagyobb, vagy hogy egy sokszög területe más sokszögek területének összege, különbsége, fele, kétszerese stb.

A 3. követelmény teljesüléséből nyomban következik, hogy ugyanaz akkor is áll, ha egy sokszöget n sokszögre bontunk fel, ahol n akármelyik természetes számot jelentheti.

Ha egy sokszög egy tőle különböző másikat tartalmaz, akkor területe a tartalmazotténál nagyobb, hiszen a tartalmazott sokszög területének, s a tartalmazott sokszög elhagyása után maradó sokszög területének összegével egyenlő.

Az $A_1 A_2 \dots A_n$ sokszög területét a következőkben $T(A_1 A_2 \dots A_n)$ jelöli.

A Szemléletesen úgy juthatunk a területhez, hogy az adott alakú homogén lemez súlyát az egységnégyzet alakúéval elosztjuk.

B1 Mi csak kijelentettük, hogy a sokszögekhez egy számot rendelhetünk, amelyet területnek nevezünk, s amelyik bizonyos feltételeket kielégít. Bár a szemlélet alátámasztja ezt, mégis szükség van annak igazolására, hogy e hozzárendelés lehetséges, és csak egyféleképpen lehetséges. Ezt rövidesen meg is tesszük (20.4 B). Tárgyalásunknak addig is meg van az értelme: azzal foglalkozunk, hogy ha van olyan hozzárendelés, amely négy feltételünket kielégíti, akkor a hozzárendelt értékekre vonatkozólag milyen megállapításoknak kell teljesülniük. Ha majd belátjuk, hogy egyetlenegy kívánt tulajdonságú hozzárendelés van, akkor tudjuk majd, hogy korábbi megállapításaink minden feltétel nélkül teljesülnek.

B2 Görbe vonallal határolt síkidomok területéről itt még nem beszélünk. Erről is szó lesz (lásd 20.6).

20.2 Először a téglalap területével foglalkozunk.

Tétel. Ha két téglalapnak egy-egy oldala egyenlő, területük aránya megegyezik az egyenlő oldalakhoz csatlakozó oldalak arányával.

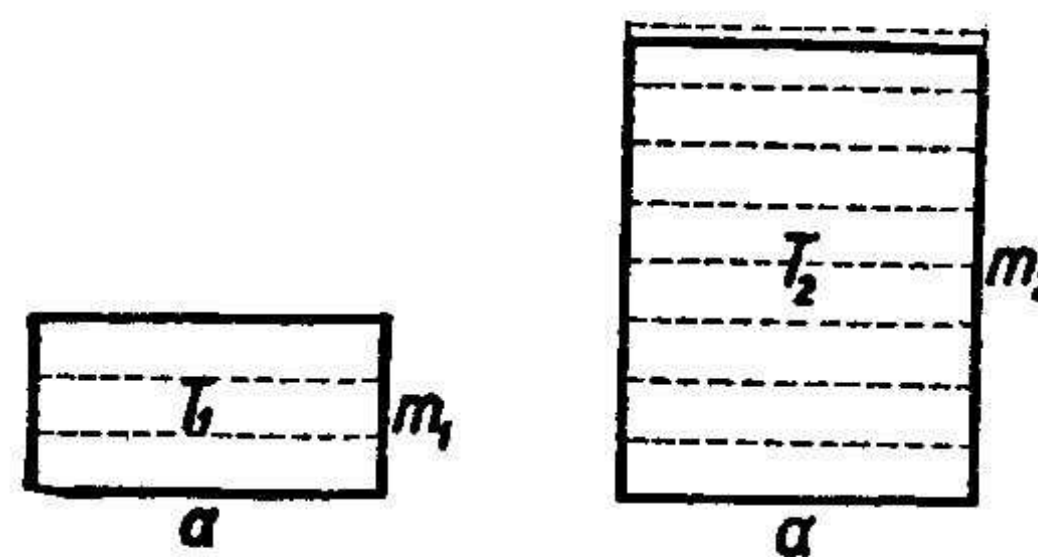
Ha a téglalap egyik oldalát *alapnak* tekintjük, akkor a csatlakozó oldalak a hozzá tartozó *magasságot* adják meg. Tételünk ezért így is fogalmazható: egyenlő alapú téglalapok területének aránya magasságuk arányával egyenlő.

Bizonyítás. Legyen n tetszőleges természetes szám. Osszuk fel az első téglalapnak az alapról merőleges oldalát n egyenlő részre (114. ábra). Mérjük fel e részt a második téglalap magasságát adó oldalára az egyik végponttól kezdve, ahányszor csak lehetséges. Ha ez k -szor lehetséges, akkor a magasságokra

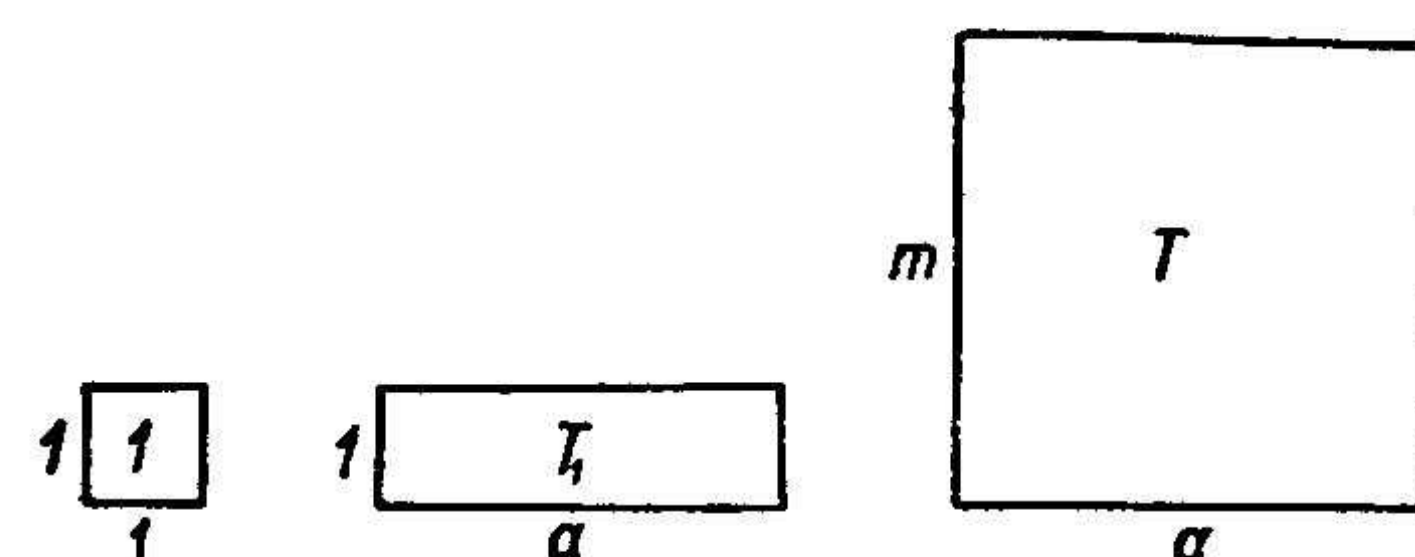
$$k \frac{m_1}{n} \leq m_2 < (k+1) \frac{m_1}{n}.$$

Az osztópontokon át a téglalapok alapjával párhuzamosakat húzunk. E párhuzamosok a téglalapokból egybevágó, téglalap alakú sávokat vágnak le, mert oldalaik páronként egyenlők. Ezért e sávok területe is egyenlő, és a téglalapok területeire

$$k \frac{T_1}{n} \leq T_2 < (k+1) \frac{T_1}{n}.$$



114. ábra



115. ábra

Egyenlőtlenségeinkből (m_1 -gyel és T_1 -gyel való osztás útján) következik, hogy az

$$\frac{m_2}{m_1}, \quad \frac{T_2}{T_1}$$

hányadosok mindegyike kisebb $\left(\frac{k}{n} + \frac{1}{n}\right)$ -nél, s nem kisebb $\frac{k}{n}$ -nél. Ezért

különbségük $\frac{1}{n}$ -nél kisebb. Minthogy n tetszőleges természetes szám lehet,

a felírt hányadosok különbsége csak 0 lehet, s így $T_1 : T_2 = m_1 : m_2$. —

Tétel. A téglalap területe két szomszédos oldal szorzatával egyenlő.

A már bevezetett szóhasználatnál: a téglalap területe az alap és magasság szorzata.

Bizonyítás. Jelölje a és m téglalap alapját és magasságát. Tekintsük azt a téglalapot, melynek alapja a és magassága 1 (115. ábra). Ennek T_1 területe az egységnégyzettel való összevetésből az előző tétel szerint $T_1 : 1 = a : 1$, tehát $T_1 = a$. Ha viszont ezt a téglalapot a vizsgált téglalappal vetjük össze, újból az előző tétel szerint $T : T_1 = m : 1$, tehát $T = T_1 m = am$. —

A Ha a hosszegységet megváltoztatjuk, és minden hossz mérőszáma 2-szeres vagy 3-szoros lesz, akkor a terület mérőszáma utolsó tételünk értelmében 4-szer vagy 9-szer akkora lesz. Ezt a tényt fejezzük ki azzal, hogy a terület dimenziója „hosszúság a négyzetben”. Ez az oka annak is, hogy ha a hosszegység jele cm vagy m , akkor a területegységet cm^2 vagy m^2 jelöli. Ez a jelölésmód a gyakorlatban nagyon előnyös, mert pl. az $1 m = 100 cm$ összefüggésből $1 m^2 = 10\,000 cm^2$ „négyzetreemeléssel” keletkezik.

Az egységek megadásáról hasonlóan mondhatunk, mint amit 2.2 A1-ben mondtunk. A gyakorlati életben erre feltétlenül szükség van, viszont a geometriában a területegységet is eleve adottnak tekintjük, és a terület mérőszáma mellett a területegységet nem jelezzük.

Még ha nevezett mennyiségekkel is dolgozunk, azaz a mennyiség megadásába az egység jelzését beleértjük, akkor is mondhatjuk, hogy a terület két hosszúság szorzata. Ezt alátámasztja az, amit az előbb a hosszúságegységek „szorzásáról” mondtunk.

Megemlítjük végül, hogy felesleges volna azt mondani, hogy a téglalap területe két szomszédos oldal hosszának a szorzata, hiszen az oldal szó nemcsak szakaszt, hanem hosszúságot is jelent.

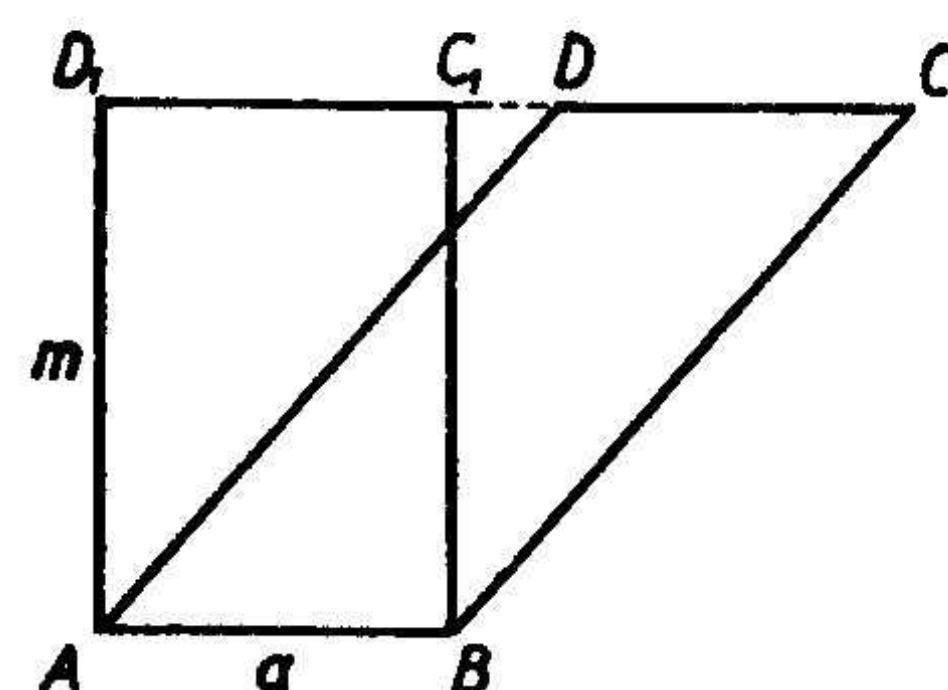
20.3 Tétel. A paralelogramma területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatával egyenlő.

Tételünk az előző tételt is magában foglalja. A paralelogramma alapjául a négy oldal bármelyikét választhatjuk. Az ehhez tartozó magasság a szemközti oldalnak az alap egyenesétől való távolsága.

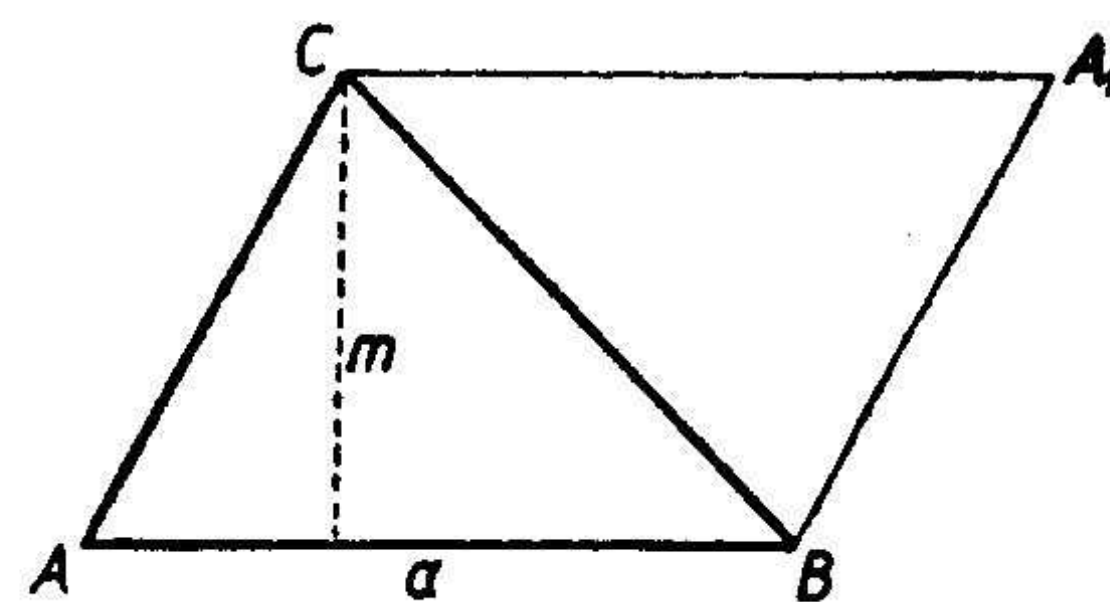
Bizonyítás. Tekintsük az $ABCD$ paralelogramma mellett azt az ABC_1D_1 téglalapot is, melynek alapja ugyanaz az AB szakasz, s amelynek C_1D_1 oldala a CD egyenesen van (116. ábra). A pontokat úgy jelöljük, hogy a DC szakasz a D_1C_1 félegyenesen legyen.

Az $ABCD_1$ trapéz AD és BC_1 két-két részre vágja. E részekre

$$T(ABCD_1) = T(ABCD) + T(ADD_1) = T(ABC_1D_1) + T(BCC_1).$$



116. ábra



117. ábra

Az $ADD_1\Delta$ és $BCC_1\Delta$ egybevágó, mert az AB eltolás az első a másodikba viszi. Így tehát $T(ADD_1) = T(BCC_1)$, és egyenletünk alapján $T(ABCD) = T(ABC_1D_1) = am$.

Tétel. A háromszög területe az alap és a hozzá tartozó magasság szorzatának felével egyenlő.

Összhangban van ez a tétel 18.1 tételével: bármelyik oldalt választjuk is alapnak, a számított terület ugyanannyi.

Bizonyítás. Az $ABC\Delta$ -et BC felezőpontjára tükrözve az eredetivel egybevágó $A_1CB\Delta$ -et kapunk (117. ábra). E két háromszög együtt egy olyan paralelogrammát alkot, melynek AB alapja s ehhez tartozó magassága egyben az $ABC\Delta$ -nek is alapja és magassága. Ennek az alapnak és magasságnak a szorzata ezek szerint a készített paralelogramma területét, tehát háromszögünk területének a kétszeresét adja.

Tételünkéből következik, hogy egy rögzített oldalon nyugvó és adott területű háromszögek harmadik csúcsának mértani helye két olyan párhuzamos egyenes, amelynek az adott oldal egyenese a középpárhuzamosa.

20.4 Bármely sokszög területét ki tudjuk számítani, ha előbb háromszögekre bontjuk, s e háromszögek területét összeadjuk. Ez minden sokszögnél lehetséges.

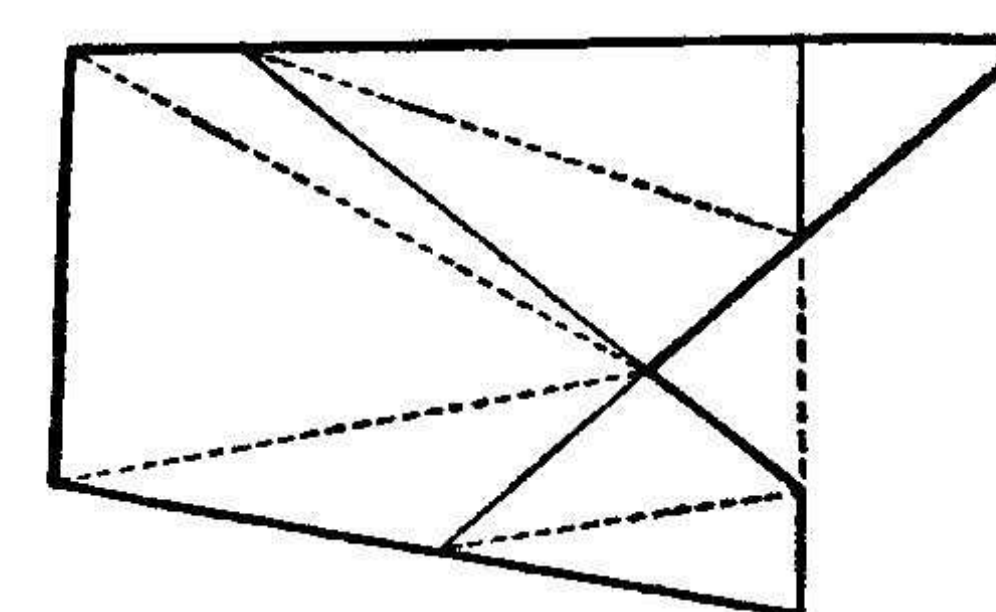
Tétel. Minden sokszög felbontható háromszögekre.

Bármily nyilvánvaló is ennek helyessége, bizonyítással kell meggyőződnünk arról, hogy kivétel nincs.

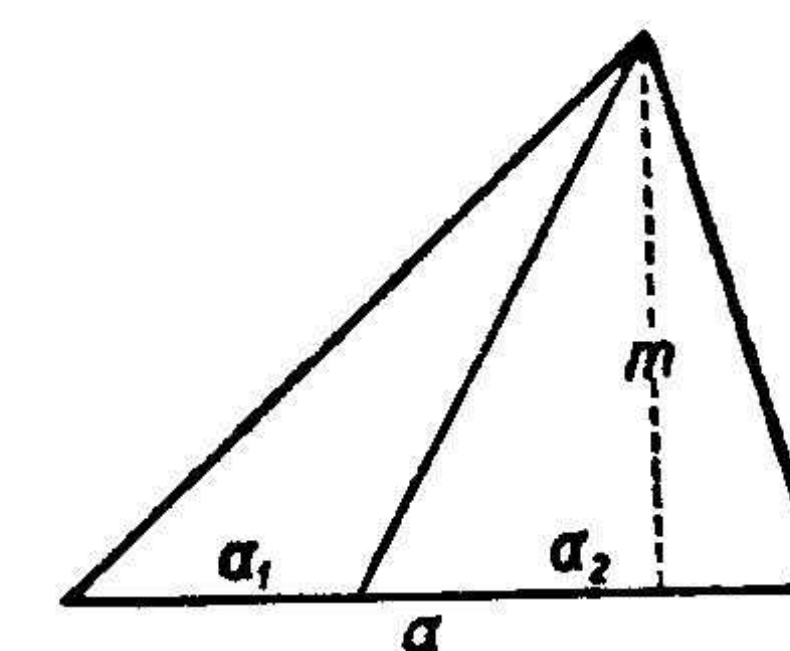
Bizonyítás. a) Konvex sokszögeknél elegendő egy csúcsot a többivel összekötni, s ezzel a sokszöget máris háromszögekre bontottuk.

b) Konkáv sokszögnél (akár többszörösen összefüggő sokszögnél is) valamennyi oldal-egyeneset meghúzva a sokszöget konvex sokszögekre daraboljuk (118. ábra), hiszen egyetlen sokszögdarabot sem metszhet annak valamelyik oldalegyenese. A kapott konvex darabokat viszont a) szerint háromszögekre darabolhatjuk tovább.

B* Beláttuk, hogy ha egy hozzárendelés 20.1 követelményeit kielégíti, akkor egy sokszöghöz azt az értéket rendeli, amelyikhez a sokszög háromszögekre való felbontása révén jutunk, mégpedig függetlenül attól, hogy a felbontást hogyan végezzük. Nincs ezért két különböző, a feltételeinket kielégítő hozzárendelés, hiszen ugyanannak a sokszögnek ugyanolyan feldarabolása csak egy értéket ad.



118. ábra



119. ábra

Még nem tudjuk azonban, hogy van-e olyan hozzárendelés, amely kielégíti 20.1 követelményeit. Ezt igazoljuk most. Minden sokszöghöz egy-egy számot fogunk hozzárendelni, s kimutatjuk, hogy ezekre négy feltételünk teljesül. A bizonyításhoz hosszabb gondolatsor vezet el.

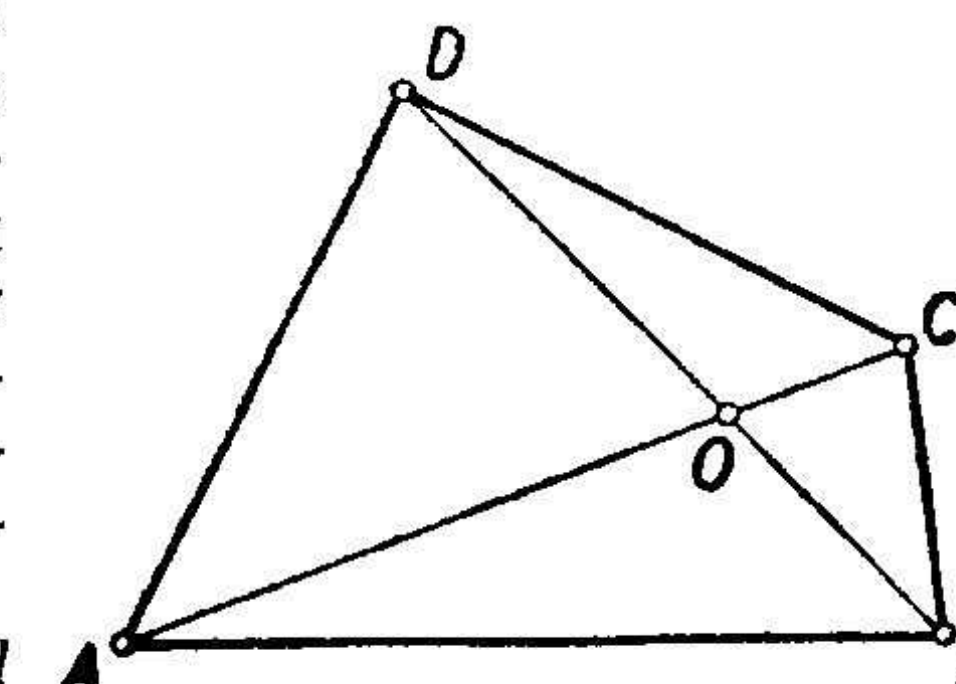
a) Háromszögekhez hozzárendeljük egy oldal s a hozzá tartozó magasság szorzatának a felét. 18.1 szerint ez egyértelműen meghatározott szám.

b) Ha egy háromszöget egyik csúcsából kiinduló szakasszal két háromszögre osztunk, e két háromszöghöz rendelt szám összege az eredeti háromszöghöz rendelt számmal egyenlő, ugyanis a felosztott oldal darabjait választva alapnak e hozzárendelt számok a 119. ábra jelölésével $\frac{a_1 m}{2}$, $\frac{a_2 m}{2}$, s ezeknek az összege valóban $\frac{am}{2}$.

c) Ha egy konvex négyszöget egy átlóval két háromszögre vágunk, e két háromszöghöz rendelt szám összege nem függ attól, hogy a négyszög melyik átlóját választottuk. Jelölje O az $ABCD$ konvex négyszög átlóinak metszéspontját (120. ábra). Az $ABC\Delta$ -höz rendelt szám b) szerint az $ABO\Delta$ -höz és a $BCO\Delta$ -höz rendelt szám összege, és ugyanígy az $ACD\Delta$ -höz rendelt szám a $CDO\Delta$ -höz és a $DAO\Delta$ -höz rendelt szám összege. Ha tehát az AC átlóból indulunk ki, akkor az O pont és a négy oldal által meghatározott négy háromszöghöz rendelt szám összegéhez jutunk. Ha ezt a megállapítást a BD átlóra alkalmazzuk, akkor ugyanehhez az eredményhez jutunk.

d) Ha egy konvex sokszöget valamelyik csúcsából kiinduló átlókkal háromszögekre osztunk, akkor e háromszögekhez rendelt számok összege nem függ attól, hogy melyik csúcsot választottuk a felosztás alapjául. Ezt az állítást az oldalszámra vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Háromszögekre a tétel semmitmondó. Négyszögekre már c) tartalmazza állításunkat. Tekintsünk tehát egy n -szöget, legyen $n > 4$, és tegyük fel, hogy állításunk n -nél kevesebb oldalú sokszögekre helyes.

Elég azt bizonyítanunk, hogy ugyanazt az összeget kapjuk, ha két felosztásnál két nem szomszédos csúcsot választunk a felosztás alapjául. Szomszédos csúcsokhoz ugyanis $n > 4$

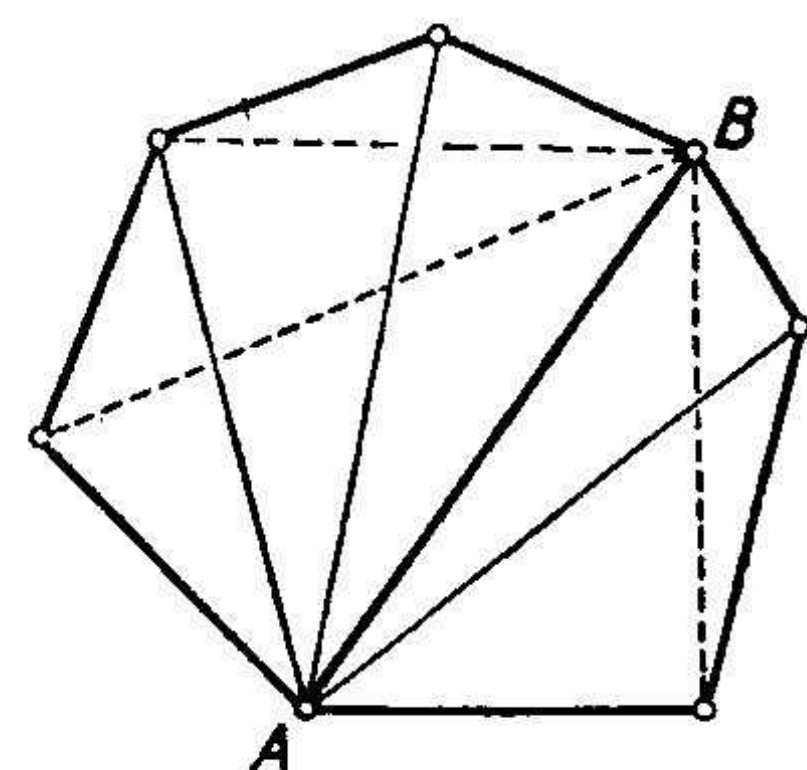


120. ábra

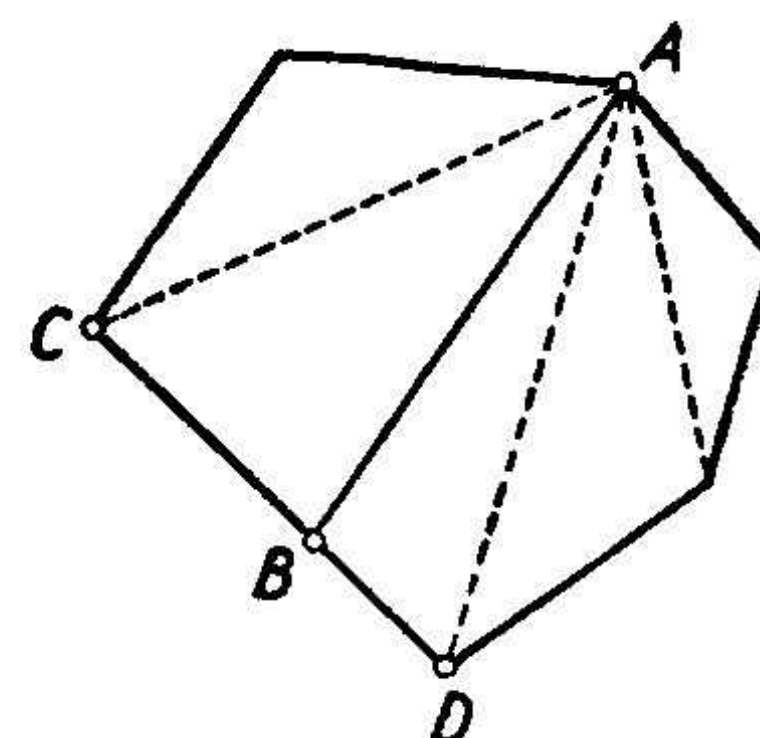
miatt található olyan csúcs, amelyik ezeknek egyikével sem szomszédos, és e harmadik csúcs közvetítésével állításunk helyessége a szomszédos csúcsokra is adódik majd.

Legyen tehát az A és B pont n -szögünknek két nem szomszédos csúcsa (121. ábra). Az AB átló n -szögünket két n -nél kevesebb oldalú sokszögre bontja. Az A -ból és B -ből induló átlók olyan háromszögekre vágják az n -szöget, amelyek egyben a mondott két részsokszög feldarabolását is szolgáltatják. A két háromszögsorozat mindegyike tehát két-két háromszög-csoportra bomlik, s e csoportok páronként ugyanannak a részsokszögnek a feldarabolását adják. Indukciós feltevésünk szerint két ilyen csoport háromszögeihez hozzárendelt számok összege egyenlő. Egyenlők akkor az A -hoz és B -hez tartozó teljes háromszögsorozatokhoz rendelt számok összegei is, mert két-két, páronként egyenlő szám összegeként számíthatók ki.

e) Háromnál több oldalú konvex sokszöghöz hozzárendeljük az olyan háromszögekhez rendelt számoknak az összegét, amelyekre a sokszög valamelyik csúcsából induló átlók a sokszöget feldarabolják. d) szerint ez egyértelműen meghatározott szám.

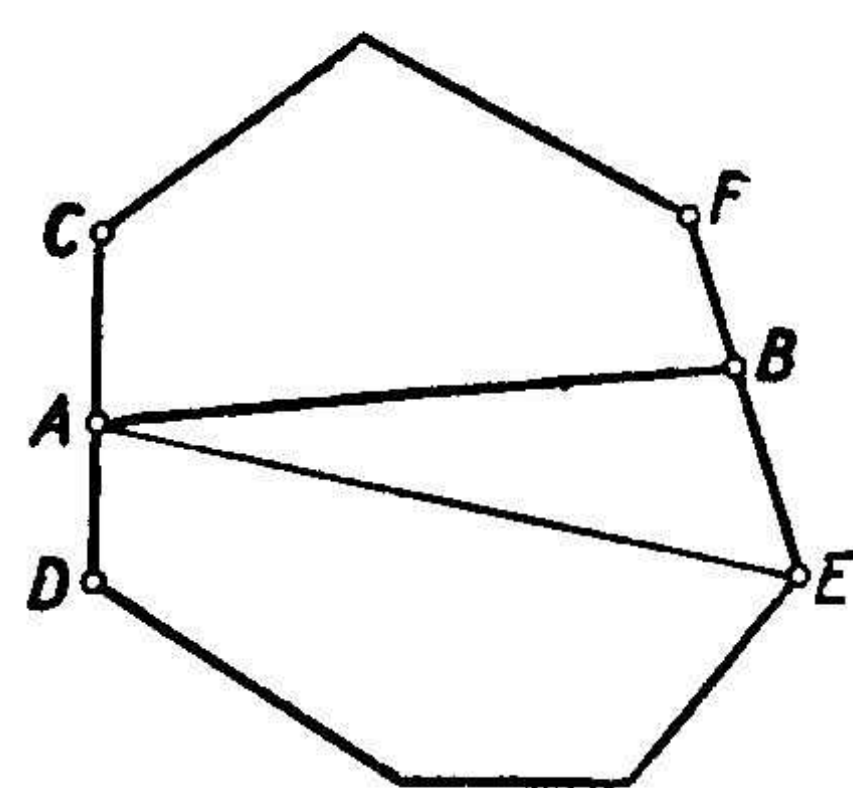


121. ábra



122. ábra

f) Ha egy konvex sokszöget egy csúcsból induló szakasszal két sokszögre vágunk, a keletkező két konvex részsokszöghöz rendelt szám összege az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő. Ha a kettévágó AB szakasz átló, akkor állításunk közvetlenül adódik a hozzárendelt számoknak A -ból induló átlók segítségével való kiszámításából. Legyen tehát az A csúcsból induló AB szakasz B végpontja egy CD oldal belső pontja (122. ábra). Bontsuk fel a két részsokszög közül azokat, amelyek nem háromszögek, A -ból induló átlókkal háromszögekre. Valamennyi A csúcsú háromszöghöz rendelt szám összege e) szerint a két részsokszöghöz rendelt szám összegével egyenlő. Ugyanezt az összeget úgy is számíthatjuk, hogy az ABC , ABD háromszögekhez rendelt számok helyett, b)-re hivatkozva, az ACD -höz rendelt számot szerepeltetjük. Ha így teszünk, akkor a szóban forgó összeg e) szerint az eredeti sokszöghöz rendelt számot adja, ez tehát valóban a részsokszögekhez rendelt számok összegével egyenlő.

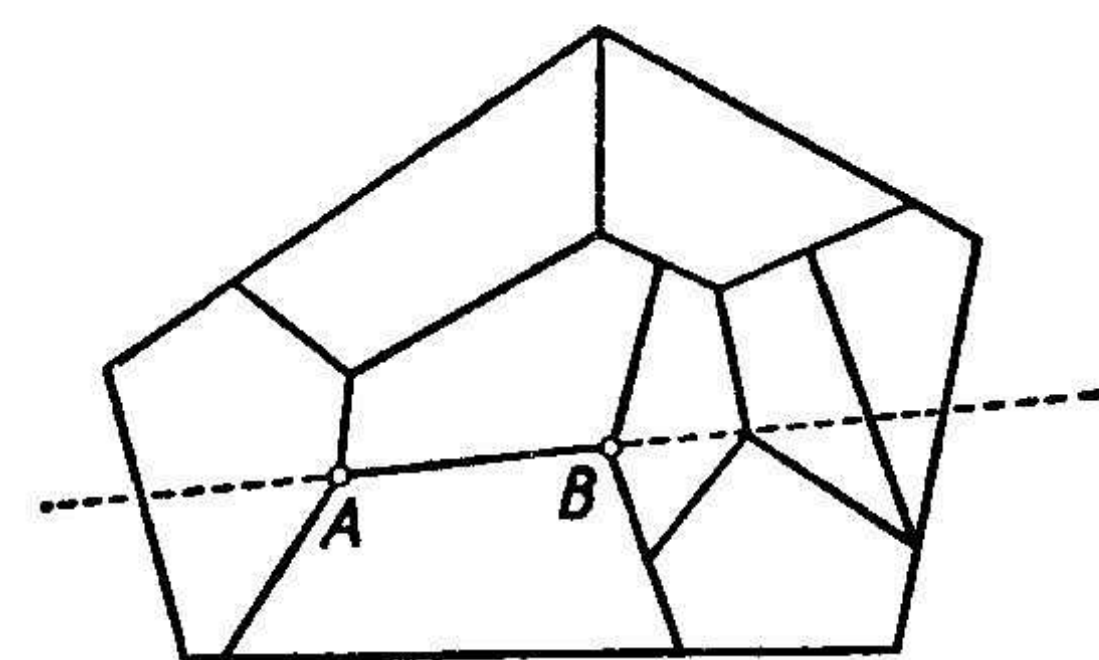


123. ábra

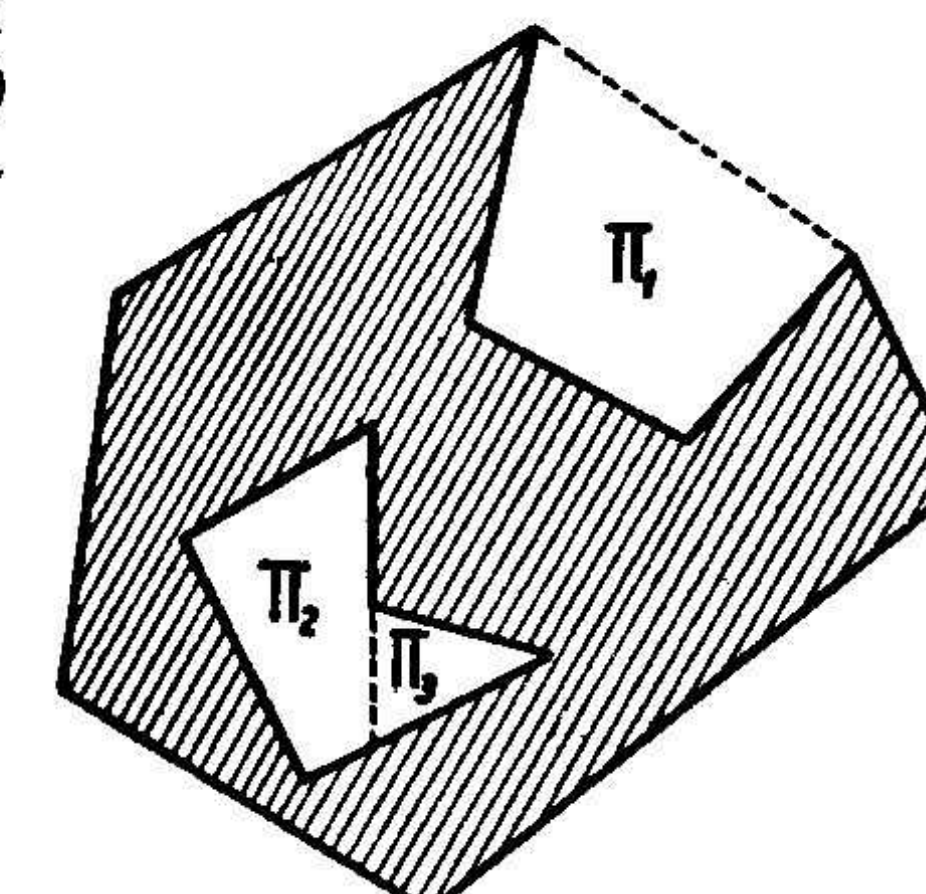
g) Ha egy konvex sokszöget egy szakasszal két sokszögre vágunk, a keletkező két konvex részsokszöghöz rendelt szám összege az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő. Elég állításunkat arra az esetre bizonyítani, amikor a kettévágó AB szakasz végpontjai egy CD és egy EF oldal belső pontjai (123. ábra), hiszen a többi esetre vonatkozóan állításunk helyességét már f) kimondta. Az E és F csúcsok mindegyike nem lehet a CD oldalon. Válasszuk a jelölést úgy, hogy ez E -re igaz legyen, hogy tehát AE a sokszöget szintén kettévágja. Egyszerűség kedvéért a keletkező sokszögek jelölésekor nem sorolunk fel minden csúcsot. f) szerint a teljes sokszöghöz rendelt szám az ADE és $ACFBE$ sokszögekhez rendelt számok összege. Az utóbbi ugyan-csak f) szerint az $ACFB$ sokszöghöz és az ABE -höz rendelt számok összegével egyenlő. Az ABE -höz s az ADE sokszöghöz rendelt számok összege ismét csak f) szerint az $ADEB$ sokszöghöz rendelt számot adja. Ezek szerint a teljes sokszöghöz rendelt szám valóban az $ADEB$ és $ACFB$ sokszögekhez rendelt számoknak az összege.

h) Ha egy konvex sokszöget konvex sokszögekre darabolunk fel, e darabokhoz rendelt számok összege az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő. Állításunkat a darabok számára vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha csak két darab van, akkor állításunk g) szerint helyes, mert a két darab csak egy szakasz mentén érintkezhetik, hiszen egy ilyen közös határszakasz egyenese

elválasztja egymástól a két konvex darabot. Tekintsük tehát egy konvex sokszögnek k konvex darabra való feldarabolását, és tegyük fel, hogy k -nál kevesebb darabra való feldarabolásokra állításunk igaz. Legyen AB valamelyik darabnak egy olyan oldala, amelyik nincs az eredeti sokszög határán (124. ábra). Az AB egyenessel az eredeti sokszöget s esetleg egyik-másik darabot is kettészeli. A darabokhoz rendelt számok vizsgált összegét g) alapján úgy számíthatjuk, hogy a kettészelt darabok helyett az ezekből keletkező két darabrészt vesszük figyelembe. Az AB egyenes által határolt mindkét félsíkban e sokszögek közül k -nál kevesebb van, mert az AB szakaszra egyik oldalról támaszkodó darabnak még része sincs az AB egyenes másik oldalán. Sokszögeink közül az egy félsíkban elhelyezkedőkhöz rendelt számok összege az indukciós feltevés szerint a félsík és az eredeti sokszög közös részéhez rendelt számmal egyenlő. A vizsgált összeg ezek szerint az eredeti sokszög két részéhez rendelt szám összegével, azaz g) szerint az eredeti sokszöghöz rendelt számmal egyenlő.



124. ábra



125. ábra

i) Ha egy sokszöget kétféleképpen vágunk szét konvex darabokra, a darabokhoz rendelt számok összege mindkét esetben ugyanannyi. Ha az eredeti sokszög konvex, állításunk h) miatt igaz. A hangsúly most a konkáv sokszögeken van, s itt még a többszörösen összefüggő sokszögekre is gondolunk. Állításunk bizonyítása végett tekintsük a sokszög konvex burkát. Azokat a sokszögeket, amelyek a konvex burokból megmaradnak, ha a sokszöget elhagyjuk, $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ konvex sokszögekre daraboljuk (125. ábra). Akárhogyan bontjuk is fel konvex darabokra az eredeti sokszöget, a darabokhoz rendelt számok összege ugyanannyi, mert ezt az összeget a $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_k$ sokszögekhez rendelt számokkal növelve h) miatt a konvex burokhoz rendelt számot kell megkapnunk.

j) Mindenfajta sokszöghöz hozzárendeljük a sokszögből valamilyen felbontás révén keletkező konvex darabokhoz rendelt számok összegét. i) szerint ez egyértelműen meghatározott szám. Konvex sokszögekhez h) szerint ugyanazt a számot rendeltük most, mint amit korábban a) és e) azokhoz rendelt.

Miután minden sokszöghöz egy-egy egyértelműen meghatározott számot rendeltünk, be kell látnunk, hogy az így hozzárendelt számok rendelkeznek a 20.1-ben szereplő négy tulajdonsággal.

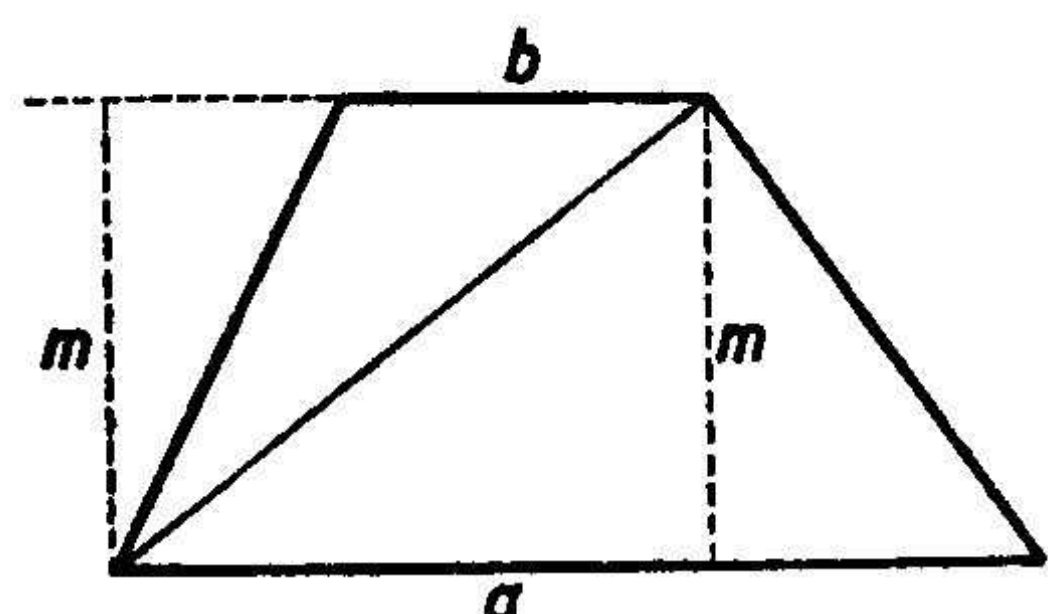
1. Minden sokszöghöz pozitív számok összegét, tehát pozitív számot rendeltünk.
2. Egybevágó sokszögeket egybevágó konvex sokszögekre s ezeket egybevágó háromszögekre darabolhatjuk. Egybevágó sokszögekhez tehát egyenlő számokat rendeltünk.
3. Ha egy sokszöget két sokszögre bontunk fel, s mindkettőt konvex darabokra bontjuk tovább, akkor j) szerint mindezekhez a darabokhoz rendelt számok összege egyrészt a két részsokszöghöz rendelt szám összegét, másrészt az eredeti sokszöghöz rendelt számot adja. A két részsokszöghöz rendelt szám összege eszerint a teljes sokszöghöz rendelt számmal egyenlő.
4. Az egységnégyzetet egy átlója két egységbefogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögre bontja. E háromszögekhez a) szerint $\frac{1}{2}$ -et, tehát az egységnégyzethez e) szerint 1-et rendeltünk.

Beláttuk tehát, hogy minden sokszöghöz tudunk 20.1 követelményeit kielégítő módon egy-egy számot rendelni, s hogy e hozzárendelés más módon nem lehetséges. Az így hozzárendelt számokat nevezzük területnek.

20.5 Speciális sokszögek területének számítására vonatkozó szabályokat említünk.

Tétel. A trapéz területe a középvonal s a magasság szorzatával egyenlő.

A trapéz területét megkapjuk tehát, ha a párhuzamos oldalak számtani közepét (összegük felét) a magassággal megszorozzuk.



126. ábra

Bizonyítás. Egy átló a trapézt két háromszögre vágja (126. ábra). Ezek a háromszögek a trapéz alapjain nyugszanak, és ezekhez az alapokhoz tartozó magasságuk a trapéz magasságával egyenlő. Ha tehát a közös magassággal az alapok felét szorozzuk, akkor a két háromszög területét kapjuk meg, és az alapok felének összegét, vagyis összegük felét szorozva a trapéz területéhez jutunk. —

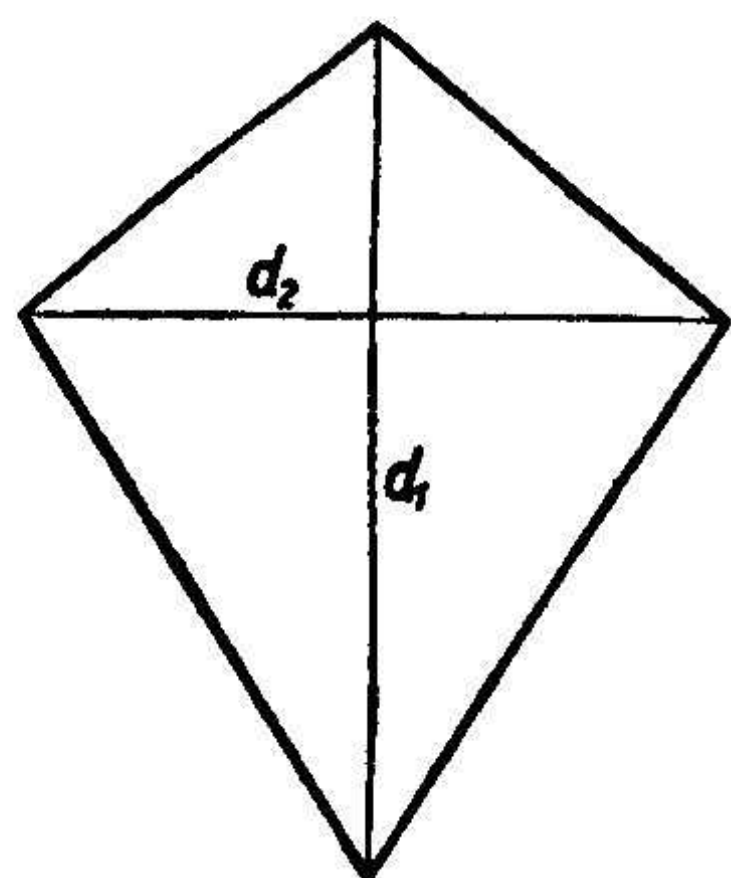
A bizonyított tétel tartalmazza a paralelogramma területére vonatkozó szabályt. Határesetként tartalmazza a háromszög területképletét is. A háromszög területére is mondhatjuk, hogy a középvonal és a magasság szorzatával egyenlő.

Tétel. A deltoid területe átlói szorzatának felével egyenlő.

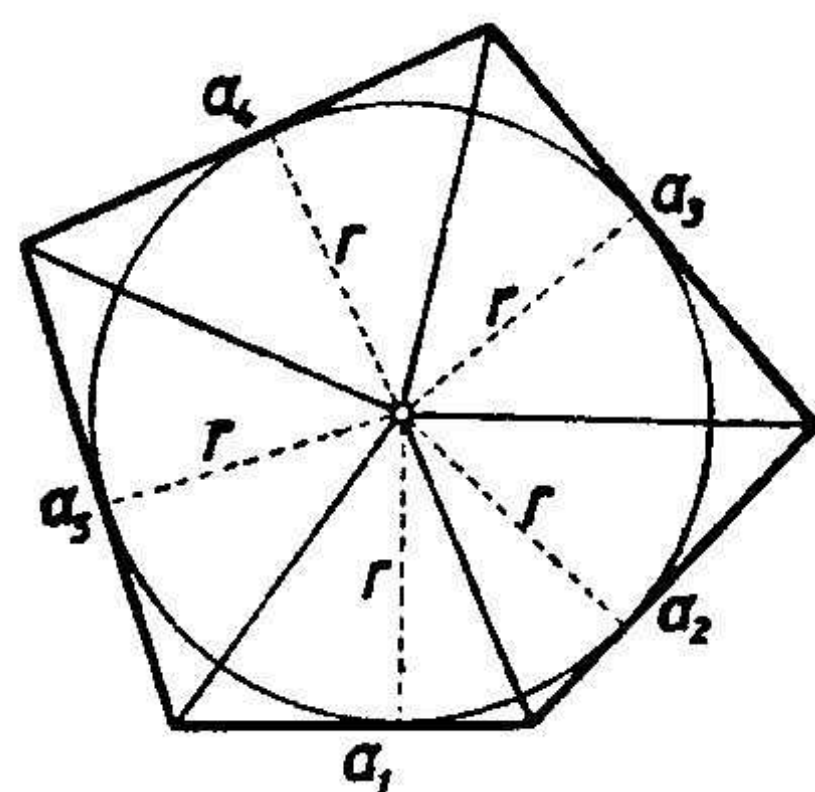
Ez a tétel természetesen a rombuszra, s így a négyzetre is vonatkozik.

Bizonyítás. A deltoid egyik átlója a másikat merőlegesen felezi (127. ábra). Ezért ez az átló a deltoidot két olyan háromszögre bontja, amelyeknek ehhez az átlóhoz mint alaphoz tartozó magassága a másik átlónak a fele. Egy ilyen háromszög területe tehát az átlók felének a szorzata, s a deltoid területe ennek kétszerese. —

Tétel. Egy kör köré írt sokszög területe feleakkora, mint a sokszög kerületének és a kör sugarának a szorzata.



127. ábra



128. ábra

Bizonyítás. A kör középpontját a sokszög csúcaival összekötve a sokszöget olyan háromszögekre bontjuk, amelyeknek alapja a sokszög egy-egy oldala, s magasságuk a kör sugara (128. ábra). Ha tehát a sugár felével az egyes oldalakat megszorozzuk, akkor az egyes háromszögek területét kapjuk meg. Ha pedig a sugár felével az oldalak összegét, a kerületet szorozzuk meg, akkor a teljes területhez jutunk. —

Vonatkozik e tétel a kör körül írt szabályos sokszögekre is, s így az r sugarú kör köré írt a oldalú szabályos n -szög területe $k = na$ miatt $\frac{1}{2} nar$.

Tétel. Hasonló sokszögek területének aránya hasonlóságuk arányának négyzetével egyenlő.

Bizonyítás. Háromszögekre 17.6 második tétele szerint a tétel állítása helyes, hiszen területük a hasonlóság által egymáshoz rendelt távolságok szorzatának a fele. Ebből következik, hogy az állítás bármely két hasonló sokszögre teljesül, hiszen ezek hasonló háromszögekre bonthatók fel. —

20.6 Mielőtt a kör területéről szó volna, a terület fogalmának általánosításával kell foglalkoznunk, hiszen eddig csak sokszögek területe szerepelt. Itt most korlátos síkidomok területéről lesz szó.

Korlátos síkidomnak bizonyosan van külső sokszöge a korlátosság miatt. Bármely belső sokszög területe a külső sokszögek területének alsó korlátja, hiszen minden külső sokszög tartalmaz minden belső sokszöget.

A külső sokszögek területének van alsó határa, hiszen alulról korlátos, ti. pozitív számhalmazról van szó. Ez az érték egy külső sokszög területénél sem nagyobb, és egy belső sokszög területénél sem kisebb.

Beláttuk, hogy minden korlátos síkidomhoz található olyan nem negatív érték, amelynél sem kisebb területű külső sokszög, sem nagyobb területű belső sokszög nincs. Ha csak egy ilyen érték van, azt a síkidom területének nevezzük.

Sokszögekre az új definíció is ugyanazt adja, mint amit eddig területnek neveztünk.

Ha a külső sokszögek területének az alsó határa 0, akkor van terület, és ez is 0, hiszen minden más nem negatív értékhez található kisebb területű külső sokszög. Ilyenkor természetesen egyetlen belső sokszög sincs. A 0 területű síkidomok közé tartozik az üres alakzat is.

Ha van belső sokszög, akkor a külső sokszögek területének az alsó határa pozitív, mert bármely belső sokszög területe alsó korlát. Ilyenkor a terület létezése azt jelenti, hogy a belső sokszögek területének a felső határa a külső sokszögek területének az alsó határával egyenlő, és közös értékük a területet adja meg. Ez csak átszövegezése annak a követelésnek, amit a terület definíciója kimond.

Az elmondottakból következik, hogy ha bármely pozitív ε -hoz található egy-egy ε -nál kisebb területkülönbségű külső és belső sokszög, akkor a szóban forgó síkidomnak van területe. Ugyanígy beszélhetünk volna $(1 + \varepsilon)$ -nél kisebb területarányú külső és belső sokszögekről is.

Megállapíthatjuk azt is, hogy van terület, ha van külső és belső sokszögekből álló sokszögpároknak olyan sorozata, amelynél az egyes párokra számított területarány 1-hez tart, s hogy ilyenkor a sorozat külső sokszögeinek a területe, valamint belső sokszögeinek a területe is a szóban forgó síkidom területéhez tart. Itt 1-hez tartó területarány helyett 0-hoz tartó területkülönbségről is beszélhetünk volna, és akkor azt is megengedhetjük, hogy a belső sokszög szerepét az üres alakzat játssza.

Nyomban belátható, hogy az előző két bekezdés minden állítása változatlanul helyes akkor is, ha külső és belső sokszögek helyett területtel rendelkező, tartalmazó és tartalmazott síkidomokról beszélünk.

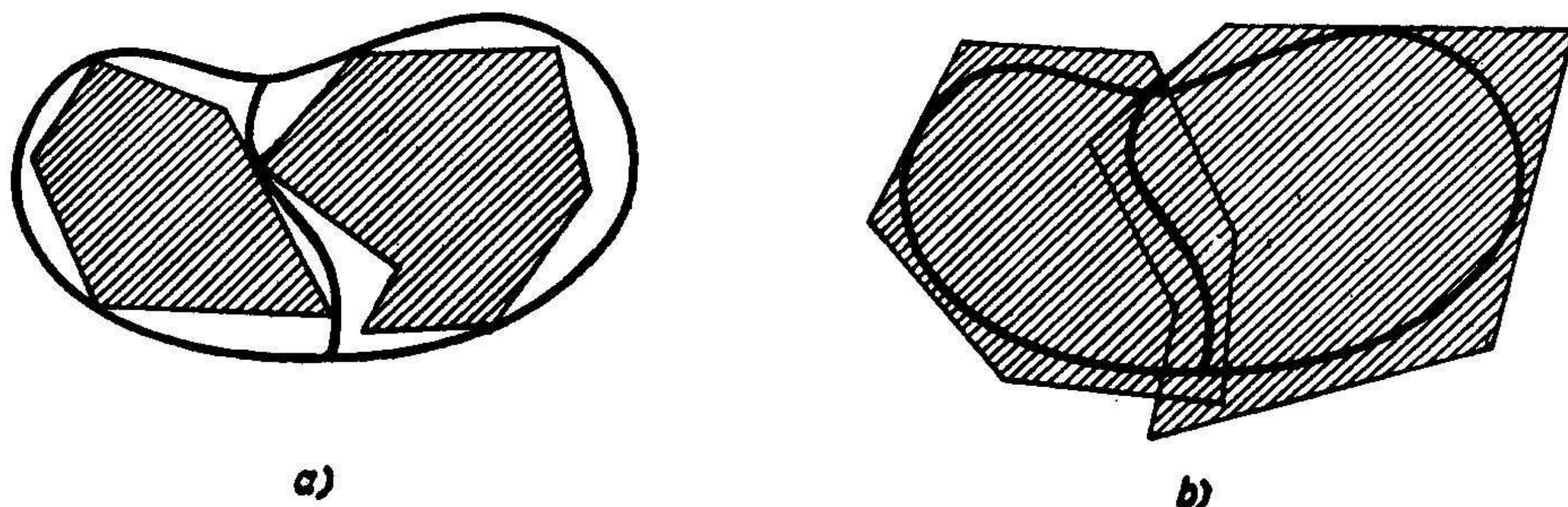
Tétel. Ha egy síkidomot két olyan síkidomra bontunk fel, amelyeknek van területe, akkor van területe az eredeti síkidomnak is, és ez a két részidom területének összegével egyenlő.

Tételünk egyaránt vonatkozik síkidomok olyan felbontására, amelynél a két részidomnak nincs közös pontja, valamint síkbeli tartományok olyan felbontására, amelynél a két résztartománynak nincs közös belső pontja (vö. 5.3). Tételünket kettő helyett véges sok részidomra is kimondhattuk volna, hiszen a kettőre kimondott tétel ismételt alkalmazásának nincs akadálya.

Bizonyítás. Jelölje T_1 és T_2 a két részidom területét. Legyen ε egy tetszőleges pozitív szám. A terület fogalmából következik, hogy a részidomokhoz olyan B_1, B_2 belső sokszögek (esetleg üres alakzatok) tartoznak, amelyeknek területe rendre nagyobb, mint $T_1 - \varepsilon$ és $T_2 - \varepsilon$, s hogy vannak olyan K_1, K_2 külső sokszögek, amelyeknek területe rendre kisebb, mint $T_1 + \varepsilon$ és $T_2 + \varepsilon$.

B_1 és B_2 egyesítése az eredeti síkidom (talán nem összefüggő) belső sokszögét adja (129a ábra). Ennek területe B_1 és B_2 területének összege, hiszen a B_1 , B_2 sokszögek nem borulhatnak egymásra. A készített belső sokszög területe eszerint nagyobb, mint $T_1 + T_2 - 2e$.

K_1 és K_2 egymást egészben vagy részben fedheti is. Egyesítésük az eredeti sokszög külső sokszöge (129b ábra), és területe nem nagyobb, mint K_1 és K_2 területének összege, tehát kisebb, mint $T_1 + T_2 + 2e$.



129. ábra

Ezek szerint az eredeti idomnak van $4e$ -nél kisebb területkülönbségű belső és külső sokszöge, van tehát területe is. Ez a terület nagyobb, mint $T_1 + T_2 - 2e$ és kisebb, mint $T_1 + T_2 + 2e$, s ezért csak $T_1 + T_2$ lehet. —

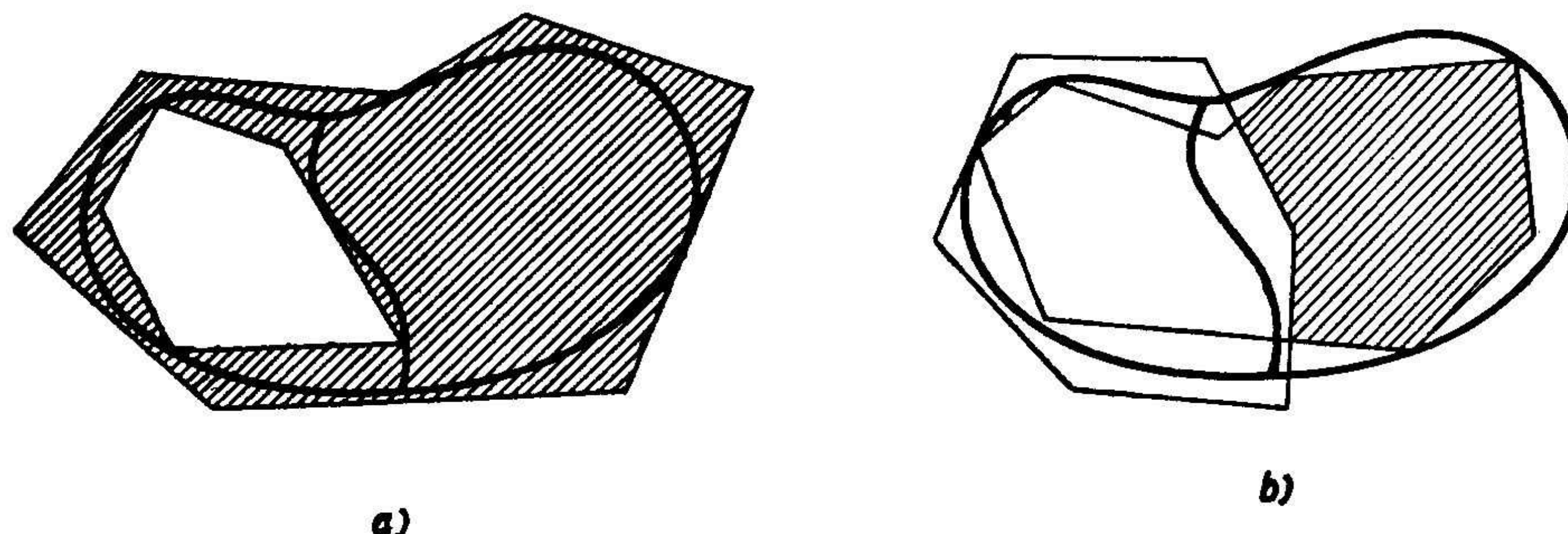
Tétel. Ha egy síkidomot két síkidomra bontunk fel, és az eredeti síkidomnak, valamint az egyik részidomnak van területe, akkor van területe a másik részidomnak is.

A másik részidom területe az előző tétel szerint csak a két terület különbsége lehet. Tételünk azt is kimondja tehát, hogy ha egy síkidom egy másikat tartalmaz, és mindkettőnek van területe, akkor a tartalmazott idom területe nem lehet a tartalmazó idom területénél nagyobb. A felbontást illetően ismét gondolunk mind a két, az előző tétel kimondása után részletezett esetre.

Bizonyítás. Okoskodásunkban sokszögekről szólnunk, de megengedjük, hogy köztük üres alakzatok is szerepelhessenek.

Jelölje T az eredeti idom területét és T_1 az első részidomét. Legyen e egy tetszőleges pozitív szám. A terület fogalmából következik, hogy e két idomhoz tartozik olyan B és B_1 belső sokszög, amelyeknek területe rendre nagyobb, mint $T - e$ és $T_1 - e$, s hogy vannak olyan K , K_1 külső sokszögek, amelyeknek területe rendre kisebb, mint $T + e$ és $T_1 + e$.

Ha K -ból a B_1 sokszöget elhagyjuk, a második részidom olyan külső sokszögehez jutunk (130a ábra), melynek területe kisebb, mint $T - T_1 + 2e$.



130. ábra

Ha B -ből elhagyjuk a B és K_1 sokszögek közös részét, akkor a második részidom belső sokszögehez jutunk (130b ábra). Minthogy a B -ből elhagyott sokszög területe nem lehet K_1 területénél nagyobb, az elhagyással kapott belső sokszög területe nagyobb, mint $T - T_1 - 2e$.

Ezek szerint a második részidomnak van $4e$ -nél kisebb területkülönbségű külső és belső sokszöge, s így van területe is. —

Tétel. Korlátos konvex síkidomnak van területe.

Bizonyítás. a) Egy korlátos konvex síkidomot tekintünk. A korlátosság miatt van olyan sáv, amely ezt a síkidomot tartalmazza. Messzük el síkidomunkat a sáv határaitól merőlegesen, egymástól rendre h távolságra levő egyenesekkel. A keletkező véges sok párhuzamos húr, közül egy leghosszabbat választunk ki. Ezt a leghosszabb húr a sáv határaiig meghosszabbítva egy d szakaszhoz jutunk (131. ábra).

Két-két szomszédos húr konvex burka trapéz, és ezeknek a trapézoknak az egyesítése egy a síkidomunkba írt B sokszög.

Tükrözzük most e trapézok mindegyikét a d -től távolabb elhelyezkedő alapjuk felezőpontjára. A tükrözött trapézok a d középvonalú, $2h$ magasságú téglalappal együtt egy K sokszöget alkotnak. Ezek szerint K és B területkülönbsége $2dh$.

Állítjuk, hogy K külső sokszög. Ebből nyomban következik majd, hogy konvex síkidomunknak van területe, hiszen h önkényesen választható meg, s ezért $2dh$ kisebbé tehető bármely pozitív értéknél.

b) Bebizonyítjuk, hogy K valóban külső sokszög. Elég ehhez azt bizonyítanunk, hogy a tükrözött trapézokat tartalmazó, h szélességű sávokban nincs a konvex síkidomnak a tükrözött trapézok által le nem fedett pontja. A sávokhoz csak d -től távolabbi határvonalukat számítjuk hozzá.

Legyen tehát $A_1A_2B_2B_1$ egy beírt trapéz, amely a B_1B_2 alap felezőpontjára tükrözve a $B_1B_2C_2C_1$ trapézt adta (132. ábra). Tekintsük a B_1B_2 , C_1C_2 egyenesek által határolt sáv olyan P pontját, amelyet a $B_1B_2C_2C_1$ trapéz nem tartalmaz, és nincs a B_1B_2 egyenesen. Azt kell bizonyítanunk, hogy P nem tartozik konvex síkidomunkhoz.

Ha a P pontot a $B_1B_2C_2C_1$ trapéztól pl. a B_1C_1 szár egyenesére választja el, akkor P annak a szögtartománynak belső pontja, amelyet a B_1C_1 félegyenes és B_1B_2 meghosszabbítása határol.

A B_1B_2 és d szakasz konvex burka trapéz, amelyen A_1A_2 az alapjaival párhuzamosan halad át. Ezért A_1A_2 nem lehet e trapéz nem hosszabbik alapjánál, a B_1B_2 szakasznál rövidebb. Ha tehát egy $A_2B_2B_1D$ parallelogrammát szerkesztünk, ennek D csúcsa az A_1A_2 szakaszon van. Minthogy A_2B_2 -vel B_1C_1 és B_1D is párhuzamos, D a B_1C_1 egyenesen van, és P a DB_1B_2 csúcsháromszögén belül helyezkedik el. Ezért a PB_1 egyenes a DB_1 szakaszt egy Q pontban metszi. Minthogy Q a konvex síkidom belsejében, B_1 pedig a határán van, a Q -tól B_1 által elválasztott P pont valóban külső pont. —

Tétel. Ha valamely konvex síkidom konvex belső síkidomjainak egy sorozata a konvex síkidomhoz tart, akkor területük is tart annak területéhez.

Emlékeztetünk arra, hogy a tételben említett konvergenciáról 19.3-ban már szó volt.

Bizonyítás. A vizsgált területssorozatnak a korlátosság miatt van torlódási értéke. Ez az adott konvex síkidom területénél nagyobb nem lehet. Legyen B egy az adott konvex síkidom belsejében elhelyezkedő sokszög. Elég megmutatnunk, hogy a vizsgált területssorozatnak nincs B területénél kisebb torlódási értéke, mert ebből már következik, hogy a torlódási érték az adott síkidom területénél sem lehet kisebb (lásd B2), hogy tehát az adott síkidom területe az egyetlen torlódási érték.

A konvergáló idomsorozatban véges soknak a kivételével minden elem tartalmazza B valamennyi csúcsát, tehát ezek konvex burkát és a B sokszöget is. Ezért a területsorozat elemei véges soknak a kivételével legalább akkorák, mint B területe, tehát ennél kisebb torlódási értékük valóban nem lehet. —

A Görbe vonallal határolt síkidomok területével elsők ARCHIMEDES foglalkozott. Azt a területfogalmat, amelyet e szakaszban bevezettünk, a síkidomok PEANO—JORDAN-féle mértékének* nevezik. A területfogalom további messzemenő általánosítása LEBESGUE* nevéhez fűződik.

B1 A területfogalom e szakaszban adott általánosítása után megállapíthatjuk, hogy a terület a 20.1-ben sokszögekre kimondott követelményeket már csak némi módosítással elégíti ki. Az első követelmény teljesülése helyett most csak ennyit mondhatunk: ha egy síkidomnak van területe, akkor az pozitív. A második követelmény is csak akkor teljesül, ha az egybevágó idomok egyikéről tudjuk, hogy van területe. A harmadik követelmény teljesülése helyett csak e szakasz első két tételét mondhatjuk ki.

Nem semmitmondó az a megszorítás, hogy egy síkidomnak van területe. Nincs területe pl. annak a síkidomnak, amelyet egy egységnégyzetnek az egyik oldaltól racionális távolságra elhelyezkedő pontjai alkotnak. Ennél a síkidomnál a külső sokszögek területének alsó határa nyilván 1, viszont belső sokszög nincs.

B2 Azt állítjuk, hogy ha egy síkidomnak pozitív területe van, akkor ez a síkidom belsejében elhelyezkedő sokszögek területének a felső határa. Sokszögekre vonatkozólag ez nyilvánvalóan helyes, és ebből következik, hogy a szóban forgó felső határ nem lehet a belső sokszögek területének felső határánál, azaz a területnél kisebb. Nem lehet azonban nagyobb sem, hiszen a síkidom belsejében elhelyezkedő sokszögek is belső sokszögek.

Eredményünkből következik, hogy ha egy síkidomnak van területe, akkor ugyanakkora a területe a síkidom belsejének is. Nem kellett itt megkövetelnünk, hogy a síkidom területe pozitív legyen, mert az üres alakzat területe 0. Szakaszunk második tétele alapján kimondhatjuk tehát azt is, hogy ha egy síkidomnak van területe, akkor van területe annak az alakzatnak is, amelyet a síkidom belsejének elhagyásával kapunk, s hogy ez a terület 0.

Ha egy síkidom területe 0, akkor az általa tartalmazott síkidomok mindegyike 0 területű, hiszen külső sokszögek területének alsó határa csak 0 lehet. Az imént mondottak alapján kimondhatjuk tehát, hogy ha egy síkidomnak van területe, és belőle a belsejéhez nem tartozó pontokat elhagyunk, akkor ugyanakkora területű alakzathoz jutunk.

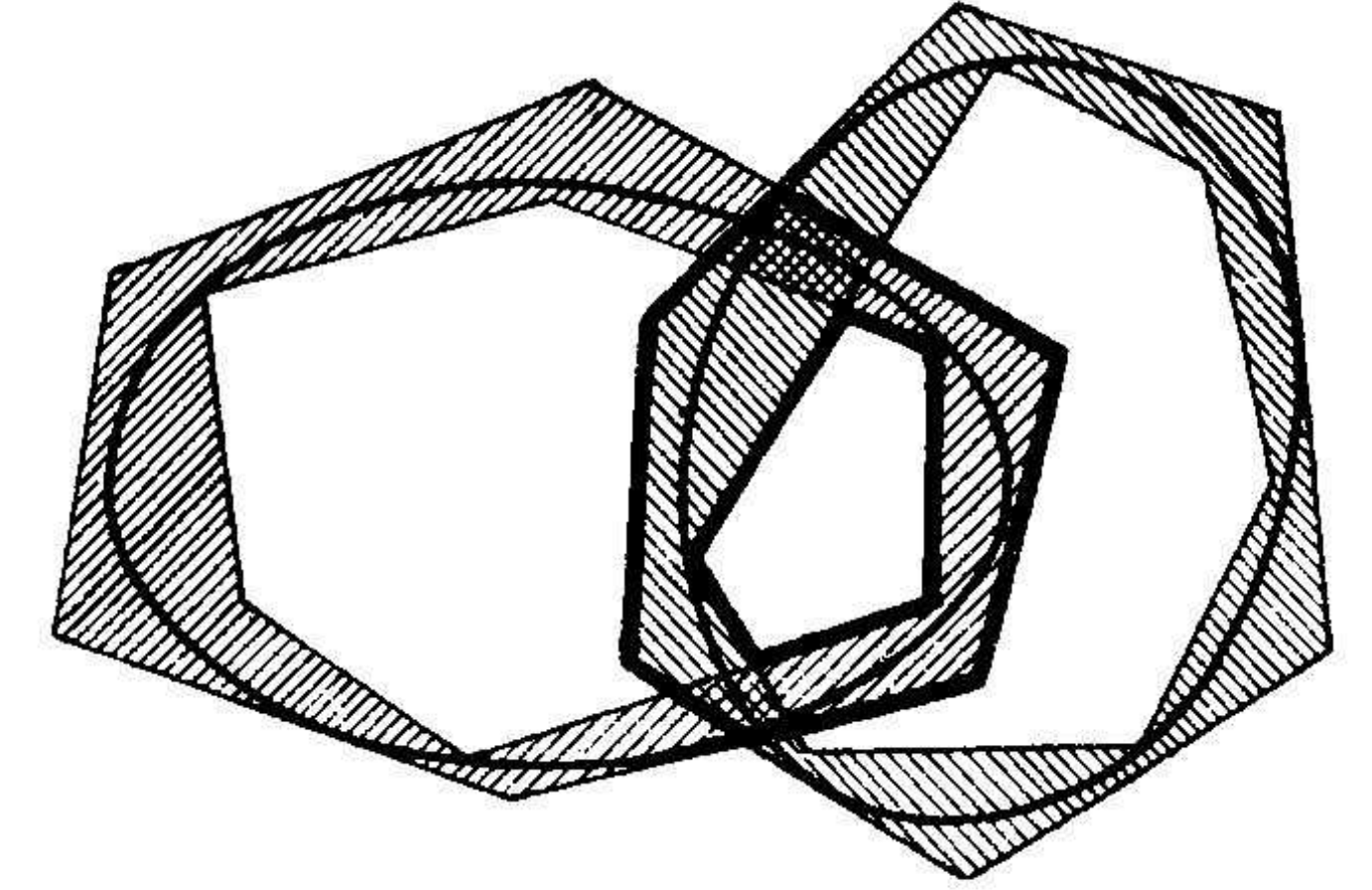
Okoskodásunk többek között bizonyítja, hogy a sokszögvonal, a szakasz, a körvonal és a körív területe 0, hogy továbbá a nyílt sokszög és a nyílt körlemez területe a zártakéval egyenlő. Rávilágít okoskodásunk arra is, hogy szakaszunk első két tételében miért érthettük a felbontást kétféleképpen. E két tétel kimondásakor szólhattunk volna két olyan síkidom egyesítéséről, amelyeknek nincs közös belső pontja. A tételekre adott bizonyítás akkor is követhető, ha azokat ilyen általánosabb alakban mondjuk ki.

B3 Szakaszunk utolsó tételével kapcsolatban megemlítjük, hogy azt valamivel általánosabban konvex síkidomok helyett tetszőleges (területtel rendelkező) síkidomokra is kimondhatnók és ugyanúgy bizonyíthatnók. Megelégedtünk azonban a konvex esettel, mert csak erre lesz szükségünk (lásd 27.9).

Megmutatjuk viszont, hogy minden konvex síkidomhoz található beírt poligonoknak a konvex síkidomhoz tartó sorozata, így tehát azt is, hogy szakaszunk utolsó tétele módot nyújt minden konvex síkidom területének konvex sokszögek területének határértékeként való meghatározására. Ha ugyanis a harmadik tételünk bizonyításában felhasznált beírt sokszög szerkesztését változtatlan állású párhuzamosokkal és olyan h_1, h_2, \dots értékekkel ismétljük meg, amelyeknek sorozata 0-hoz tart, akkor kívánt tulajdonságú sokszögsorozathoz jutunk. Ennek igazolására elég meggondolnunk, hogy ha a P pont a konvex síkidom belsejében van, és a P ponton át a párhuzamosokra merőleges AB húr halad, akkor a P pontot mindazok az általunk szerkesztett sokszögek tartalmazzák, amelyeknél h szerepét a PA és PB távolságoknál kisebb érték játssza.

* G. Peano, 1858—1932, a torinói egyetem tanára. C. Jordan (ejtsd: zsordan), 1838—1922, a párizsi műegyetem tanára. H. Lebesgue (ejtsd: löbeg), 1875—1942, a párizsi egyetem tanára.

B4 Állítjuk, hogy ha két síkidomnak van területe, akkor van területe a közös részüknek is. A bizonyítás során sokszögekkel dolgozunk, de számolunk azzal, hogy ezek üres alakzatok is lehetnek. Legyen a két síkidom egy-egy ε -nál kisebb területkülönbséget adó külső és belső sokszöge K_1 és B_1 , valamint K_2 és B_2 . Nyilvánvaló, hogy a K_1, K_2 sokszögek K közös része a két síkidom közös részének külső sokszöge, s hogy ugyanígy a B_1, B_2 sokszögek B közös része a síkidomok közös részének a belső sokszöge (133. ábra). Jelölje D_1, D_2 és D azokat a sokszögeket, amelyekhez úgy jutunk, hogy a K_1, K_2, K külső sokszögekből rendre a B_1, B_2, B belső sokszögeket elhagyjuk. K_1 és K_2 mindegyike tartalmazza tehát D minden pontját, viszont D bármely belső pontjára áll, hogy vagy B_1 , vagy B_2 nem tartalmazza azt. Igaz ezért, hogy D belső pontjai hozzátartoznak vagy D_1 -hez, vagy D_2 -hez, hogy tehát D_1 és D_2 egyesítése tartalmazza a D sokszöget. Ebből következik, hogy D területe, azaz K és B területkülönbsége D_1 és D_2 területének összegénél, 2ε -nál kisebb. Ez pedig azt jelenti, hogy síkidomaink közös részének valóban van területe.



133. ábra

A most bizonyított tényből következik, hogy ha két síkidomnak van területe, akkor van területe az egyesítésüknek is. Ehhez elég szakaszunk első két tételére, valamint arra hivatkoznunk, hogy ha a két síkidom közös részét az egyikből elhagyjuk, és a maradék részt a másikhoz hozzáillesztjük, akkor a két síkidom egyesítéséhez jutunk.

Megállapíthatjuk ezek után, hogy ha területtel rendelkező síkidomokból indulunk ki, akkor mindazok a műveletek, amelyekről 5.3-ban szóltunk, olyan síkidomokat adnak, amelyeknek megint csak van területük. Minthogy könyvünk egészében csak olyan korlátos síkidomokat tárgyalunk, amelyekhez korlátos konvex síkidomokból kiindulva 5.3 műveleteinek segítségével eljuthatunk, eredményünk azt jelenti, hogy ebben a könyvben csak területtel rendelkező korlátos síkidomokról van szó.

B5 Nem foglalkozunk azzal a kérdéssel, hogy általában milyen síkidomoknak van területe. Ez a vizsgálat a mértékelmélethez vezet, amely az analízis keretei közé illeszkedik, és a határozott integrálok tárgyalását, valamint a területfogalom általánosításait is felöleli.

B6 Aki a terület tárgyalását az ívhosszával egybeveti, felvetheti a kérdést, miért nem jártunk el ezen a két helyen hasonló módon, hiszen az ívhosszt felső határként definiáltuk, és ezért az ívhossz létezése problémát nem okozott, viszont a területnél felső határról és egy másik alsó határról is szóltunk, és csak ezek egyezése esetén mondtuk, hogy van terület. Rávilágítunk itt arra, hogy ez az ellentét nem a tárgyalás önkényéből, hanem a tárgy természetéből fakad.

Mindenféle mérték bevezetésénél igen lényeges a mérték additivitásának vizsgálata. A terület additivitását szakaszunk első két tétele tisztázza. E fontos tételek bizonyítása arra épült, hogy a terület a belső sokszögek területének felső határa és egyben a külső sokszögek területének alsó határa is. Ha e két tulajdonságnak csak az egyike lett volna felhasználható, akkor a bizonyítás nem sikerülhetett volna. Ez azt mutatja, hogy a terület definíciójának említett kettőssége szükségszerű.

Kérdés marad, nem érhetjük-e el az összhangot azáltal, hogy a kerület és az ívhossz definíciójában is egy kettősséget vezetünk be. Ezt meg lehet éppen tenni, de ez a tárgyalást feleslegesen elbonyolítja, sőt jelentős nehézségekhez is vezet. Ha csak konvex síkidomok kerületére szorítkozunk, akkor azt az egyszerű definíciót adhatnók, hogy a kerület a belső konvex sokszögek kerületének felső határa és egyben a külső konvex sokszögek kerületének alsó határa is. Ennek a definíciónak az elfogadása megkívánná azonban, hogy a két határ egyezését minden konvex síkidomra bebizonyítsuk. Ez a felesleges munka lényegesen több nehézséggel járna, mint szakaszunk harmadik tételének a bizonyítása. A nehézséget tetézi, hogy érintőről, illetőleg támaszegyenésről szólhatunk ugyan, de nem tudjuk bizonyítani, hogy a határ minden pontjához tartozik ilyen egyenes, ha egyszer tartjuk magunkat 15.2 B1 elvi álláspontjához, hogy mi ebben a könyvben alakzatokat határhelyzetként nem vezetünk be.

Nem érdemes szót vesztegetni arra, hogy konvex ívek ívhosszában tárgyalásánál az említett nehézségek csak fokozódnak, sőt ott még a kettősséget tartalmazó definíció megválasz-

tása is gondot okoz. Minden leegyszerűsödne természetesen, ha a tárgyalást a körre és íveire korlátoznánk, de ez túlzottan nagy ár volna a mesterkelt összhang megteremtéséért.

Mindez arról győz meg bennünket, hogy szabatos tárgyalásban szükségszerű az az eltérés, amelyről szoltunk. Aki viszont, pl. pedagógiai okokból, a terület létezésének kérdését nem firtatja, az a területet, valamint a kerületet és az ívhosszt, egymással összhangban, beírt poligonok segítségével vezetheti be.

20.7 Tétel. Hasonló idomok területének aránya a hasonlóság arányának négyzetével egyenlő.

Sokszögekre nézve a tételt már 20.5-ben kimondtuk. A tétel úgy értendő, hogy ha egy síkidomnak van területe, akkor van az ahhoz hasonló is, és területük aránya a hasonlóság arányának négyzete.

Bizonyítás. Az egyik idom belső és külső sokszögeihez a hasonlóság a másik idom belső és külső sokszögeit rendeli. Minthogy ezek területének aránya a hasonlóság arányának négyzete, ugyanez a belső és külső sokszögek területeit elválasztó értékekre, azaz síkidomaink területére is igaz. —

Tétel. Az r sugarú kör területe πr^2 .

Bizonyítás. a) A körbe írt és a kör körül írt szabályos n -szög területének aránya hasonlóságuk miatt kerületeik arányának négyzetével egyenlő. Minthogy a kerületek aránya n növekedtével 1-hez tart, ugyanez területeik arányára is áll. Ebből következik, hogy a körnek van területe, s hogy a növekvő oldalszámú beírt és körülírt szabályos sokszögek területe a kör területéhez tart.

b) A körülírt szabályos sokszög területe a kerületének és a körsugár felének szorzata. Minthogy n növekedtével ez a kerület a kör kerületéhez tart, a körülírt szabályos sokszög területének határértéke, azaz a kör területe a kör kerületének és a sugár felének szorzata. —

Kiemeljük, hogy az egységsugarú kör területe π .

B 19.5 B2-ben már bebizonyítottuk, hogy ha a körbe írt, a középpontot tartalmazó sokszögek egy sorozatánál a leghosszabb oldalak 0-hoz tartanak, akkor ez a sokszögsorozat a körhöz tart. 20.6 utolsó tétele alapján kimondhatjuk tehát, hogy egy ilyen sorozat sokszögeinek területe a kör területéhez konvergál.

Ugyanehhez az eredményhez más úton is eljuthatunk. Mindjárt azt is bizonyítjuk, hogy a kör köré írt sokszögek területe is tart a kör területéhez, ha leghosszabb oldaluk hossza 0-hoz tart. Tekintsünk evégből egy a körbe írt, a középpontot tartalmazó és egy a kör köré írt sokszöget. A beírt sokszög tartalmazza azt a középpont körül írt kört, amelyik a beírt sokszög leghosszabb oldalát érinti. A körülírt sokszöget tartalmazza az a középpont körül írt kör, amelyik körünk érintőiből a körülírt sokszög leghosszabb oldalának kétszeresét metszi ki. A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy a most szerkesztett körök sugara az eredeti kör sugarától kevesebbel tér el, mint a sokszögek leghosszabb oldala. Ha tehát a leghosszabb oldalak 0-hoz tartanak, akkor a sokszögeinket közrefogó körök sugara az eredeti körsugárhoz konvergál, ezért a két kör területe és az általuk közrefogott sokszögterület is tart körünk területéhez. Okoskodásunk újból bizonyította azt is, hogy a körnek van területe, ami egyébként 20.6 harmadik tétele szerint is igaz.

20.8 Tétel. Egy kör körcikkeinek területe szögükkel arányos.

Bizonyítás. Előrebocsátjuk, hogy a körcikknek van területe, hiszen középponti szögének felezője két konvex síkidomra bontja fel, hogy továbbá egyenlő szögekhez az egybevágóság miatt egyenlő területű körcikkek tartoznak és hogy ha egy körcikket körcikkekre vágunk fel, akkor ezek területe az eredeti körcikk területét adja összegül. Egy kör AB és CD íveihez tartozó AOB és COD körcikkek $T(AOB)$ és $T(COD)$ területét vizsgáljuk (113. ábra).

Az AOB \sphericalangle -et n egyenlő részre osztjuk. A kapott szöget felmérjük a COD \sphericalangle -re, ahányszor csak lehetséges. Ha k -szor mérhettük fel, akkor

$$k \frac{AOB \sphericalangle}{n} \leq COD \sphericalangle < (k+1) \frac{AOB \sphericalangle}{n}.$$

Előrebocsátott megjegyzéseink értelmében hasonlót mondhatunk a körcikkek területéről is:

$$k \frac{T(AOB)}{n} \leq T(COD) < (k+1) \frac{T(AOB)}{n}.$$

Minthogy n akármelyik természetes szám lehet, egyenlőtlenségeinkből a már többször alkalmazott gondolatmenettel (vö. 17.2, 19.8, 20.2)

$$\frac{COD \sphericalangle}{AOB \sphericalangle} = \frac{T(COD)}{T(AOB)}$$

következik. —

Tétel. A körcikk területe feleakkora, mint a sugár és a határoló körív hosszának szorzata.

Ha tehát a körcikk szöge (ívmértékkel mérve) α , akkor 19.8 alapján a körcikk területe $\frac{1}{2} r^2 \alpha$. Tételünk a félkör területképletét, közvetve tehát a kör területképletét is magában foglalja.

Bizonyítás. Az α szögű, T területű körcikket összehasonlítjuk a 2π szöghöz körcikként tartozó teljes körlemezhez. Az előző tétel alapján

$$T : \pi r^2 = \alpha : 2\pi,$$

s ebből $T = \frac{1}{2} r^2 \alpha$ adódik. —

A körszelet területe mint egy körcikk s egy háromszög területének különbsége, illetve összege számítható.

A körcikket úgy képzelhetjük, mint egy „görbealapú háromszöget”, amelynek „alapja” a körív, „magassága” a sugár. Így területének képlete könnyen megjegyezhető.

21. § A háromszög-geometria elemei

A háromszöggel kapcsolatban több érdekes tulajdonságú pontot és kört vezethetünk be. Ilyen nevezetes pontokkal és körökkel foglalkozunk.

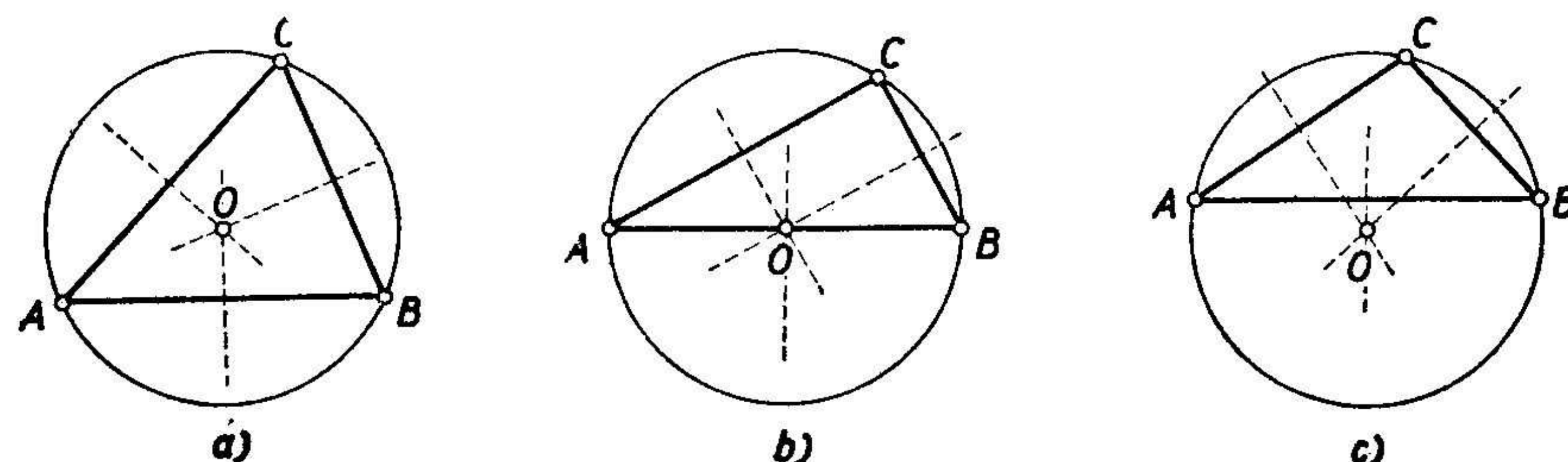
21.1 Tétel. a) Bármely háromszög köré egy és csak egy olyan kör írható, mely mindhárom csúcson áthalad.

b) Az oldalak felezőmerőlegesei egymást a háromszög köré írt kör középpontjában metszik.

Már megállapítottuk (vö. 15.6), hogy a kört három pontja egyértelműen meghatározza. Tételünk szerint bármely három nem egy egyenesen levő pont

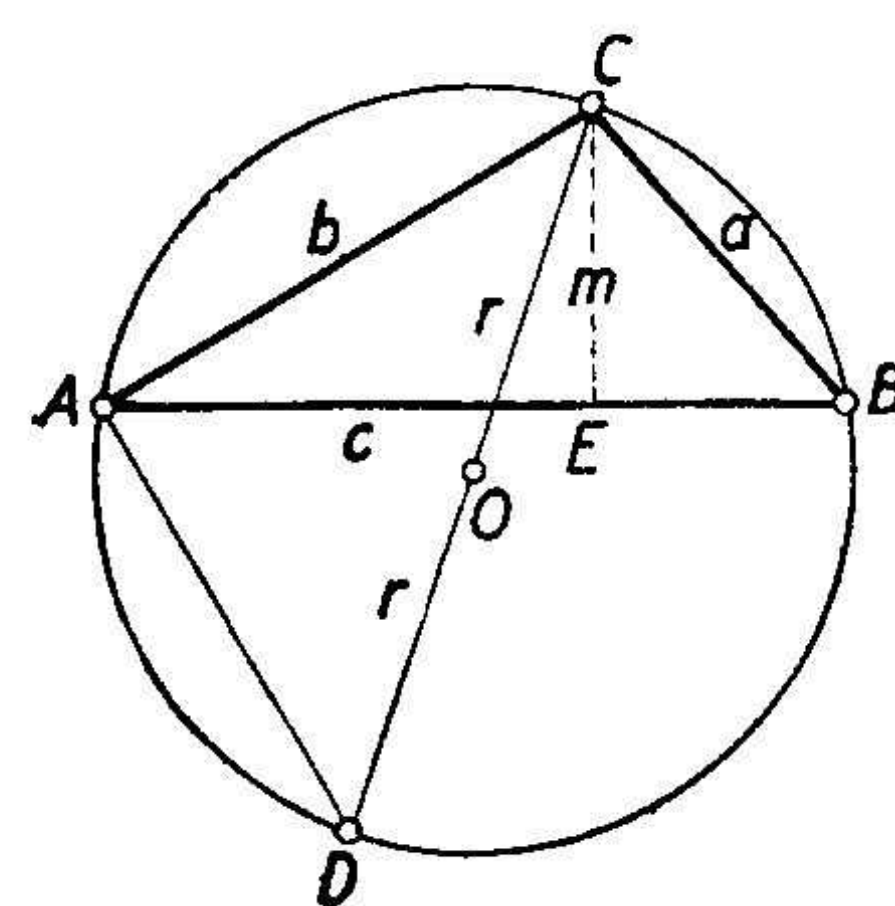
egyértelműen meghatároz egy kört. Mondhatjuk tehát, hogy három pont mindig meghatároz vagy egy egyenest, vagy egy kört.

Bizonyítás. Az AB és BC oldal felezőmerőlegese egy O pontban metszi egymást (134. ábra), hiszen ha párhuzamosak volnának, akkor a rájuk merőleges AB és BC egyező állású lenne. Minthogy O rajta van AB felezőmerőlegesén, $OA=OB$; minthogy O rajta van BC felezőmerőlegesén is, $OB=OC$. Ezek szerint $OA=OC$, és így O rajta van AC felezőmerőlegesén is. Mivel $OA=OB=OC$, az O körül ekkora sugárral írt kör mindhárom csúcson áthalad.



134. ábra

Már bebizonyítottuk, hogy az oldalak felezőmerőlegesei egy pontban metszik egymást, s hogy metszéspontjuk körül a háromszög köré kör írható. Csak azt kell még belátnunk, hogy más ilyen kör nincs. Ez viszont abból következik, hogy a kört három pontja egyértelműen meghatározza. —



135. ábra

Tétel. Az a, b, c oldalú, T területű háromszög köré írt kör sugara $r = \frac{abc}{4T}$.

Bizonyítás. Legyen az $ABC \triangle$ -nek B -nél hegyesszöge (135. ábra). Ezért a C -ből induló magasság E talppontja a BA félegyenes belső pontja, és a hegyes $CBE \angle$ a félkörnél kisebb AC íven nyugvó kerületi szög.

A CD átmérő meghúzása után keletkező BCE , DCA háromszögek hasonlóak, ugyanis egyrészt derékszögűek, minthogy CE magasság, és $CAD \angle$ átmérőn nyugvó kerületi szög, másrészt pedig $CBE \angle = CDA \angle$, mert ugyanazon az AC íven nyugvó kerületi szögek.

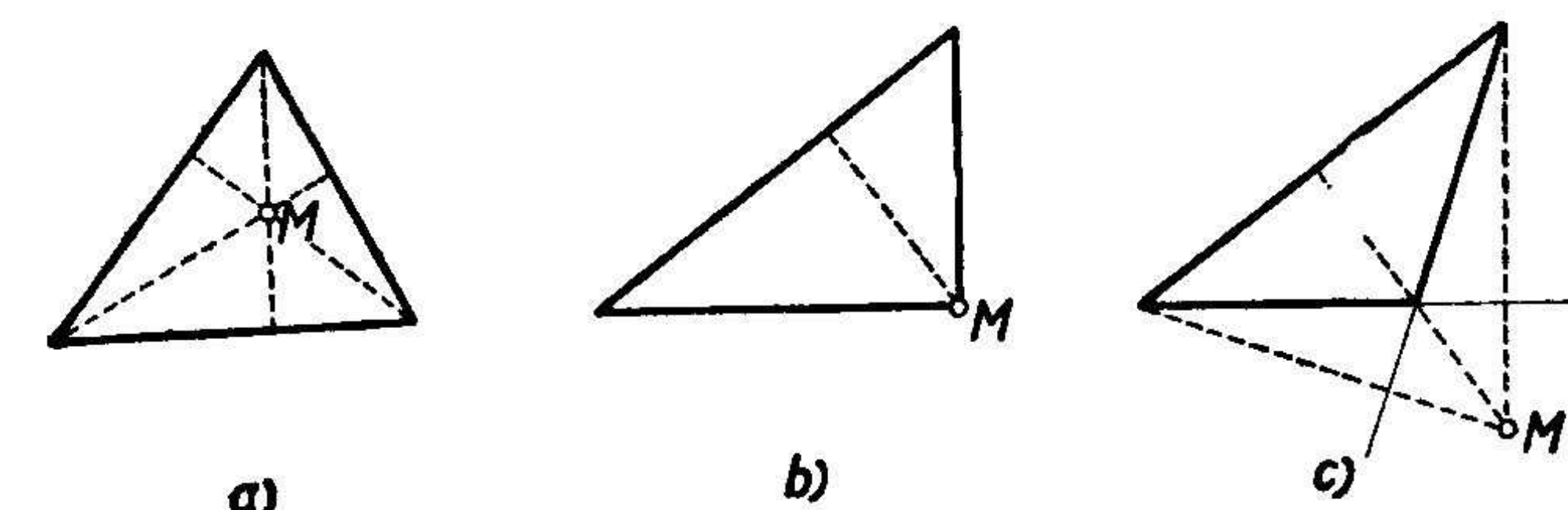
A hasonlóságból következőleg $a : m = 2r : b$, és így $r = \frac{ab}{2m}$. Ha itt az $m = \frac{2T}{c}$ összefüggést figyelembe vesszük, akkor a tétel állításához jutunk. —

B Az utolsó bizonyítást megnyújtotta az a kikötés, hogy B -nél hegyesszög van. Ha viszont nem alkalmaztunk volna ilyen megszorítást, akkor külön kellene foglalkoznunk azokkal az esetekkel, amikor E a B csúccsal azonos, és amikor E az AB szakasz B ponton túli

meghosszabbításán van. Ezekben az esetekben a bizonyítás csekély módosítására volna szükség. Általában előnyben szokás részesíteni az olyan tárgyalást, mely nem dolgozik esetek szétválasztásával (diszkusszió).

21.2 Tétel. Egy háromszög három magasságának egyenese egy ponton halad át.

E pontot a háromszög magasságpontjának (ortocentrum) nevezzük. A tételben a magasságszakaszokat tartalmazó egyenesekről kellett szólni, mert maguk a magasságszakaszok nem mindig haladnak át egy ponton (136. ábra).



136. ábra

Bizonyítás. Az $ABC \triangle$ csúcsain át a szemközti oldalakkal párhuzamosokat húzva az $A_1B_1C_1 \triangle$ -et kapjuk (137. ábra). A párhuzamosság miatt ABA_1C és $ABCB_1$ paralelogramma, és így $A_1C = BA = CB_1$, azaz C az A_1B_1 szakasz felezőpontja. Ezért az $ABC \triangle$ -nek C -ből vont magassága az $A_1B_1C_1 \triangle$ egyik oldalának felezőmerőlegese. Ugyanez áll akkor az $ABC \triangle$ mindhárom magasságára. Így tehát a magasságokat tartalmazó egyenesek az előző szakasz értelmében valóban egy ponton haladnak át. —

Megállapíthatjuk, hogy derékszögű háromszög magasságpontja a derékszög csúcsa, hegyesszögűé a háromszögön belül, tompaszögűé pedig a háromszögön kívül van. Ehhez elég arra hivatkoznunk, hogy egy magasság talppontja az oldalnak akkor és csak akkor belső pontja, ha ezen az oldalon hegyesszögek nyugszanak.

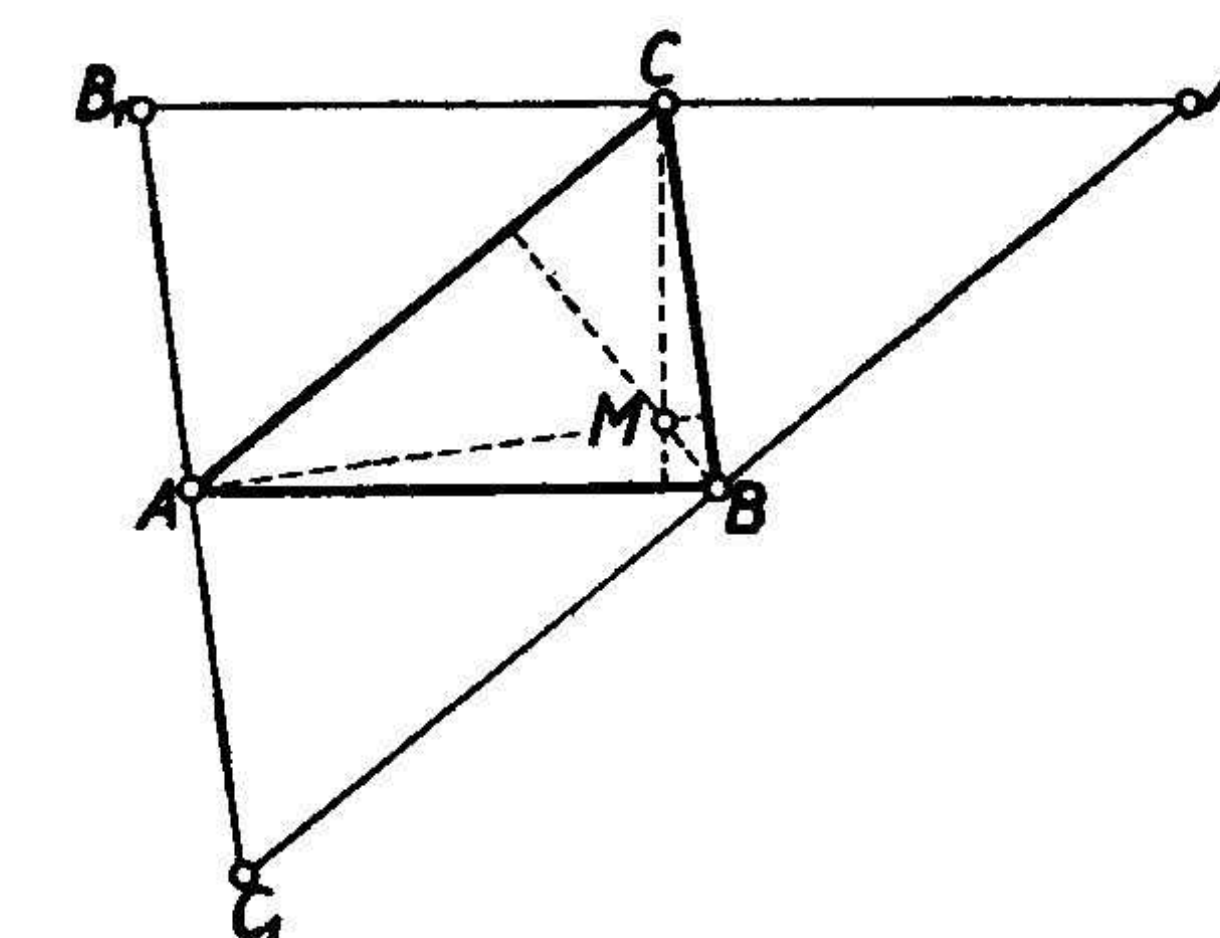
B Ha egy háromszög nem derékszögű, akkor csúcsai a magasságponttal együtt ortocentrikus pontnégyest alkotnak. Ez azt jelenti, hogy közülük bármely három olyan háromszöget határoz meg, amelynek a negyedik pont a magasságpontja. Kijelentésünk csak átfogalmazása e szakasz tételének.

21.3 A háromszög egy csúcsát a szemközti oldal felezőpontjával összekötő szakaszt a háromszög súlyvonalának nevezzük.

Tétel. a) A háromszög súlyvonalai egy ponton haladnak át.

b) E pont mindegyik súlyvonalnak (a csúctól távolabb és az oldalhoz közelebb eső) harmadolópontja.

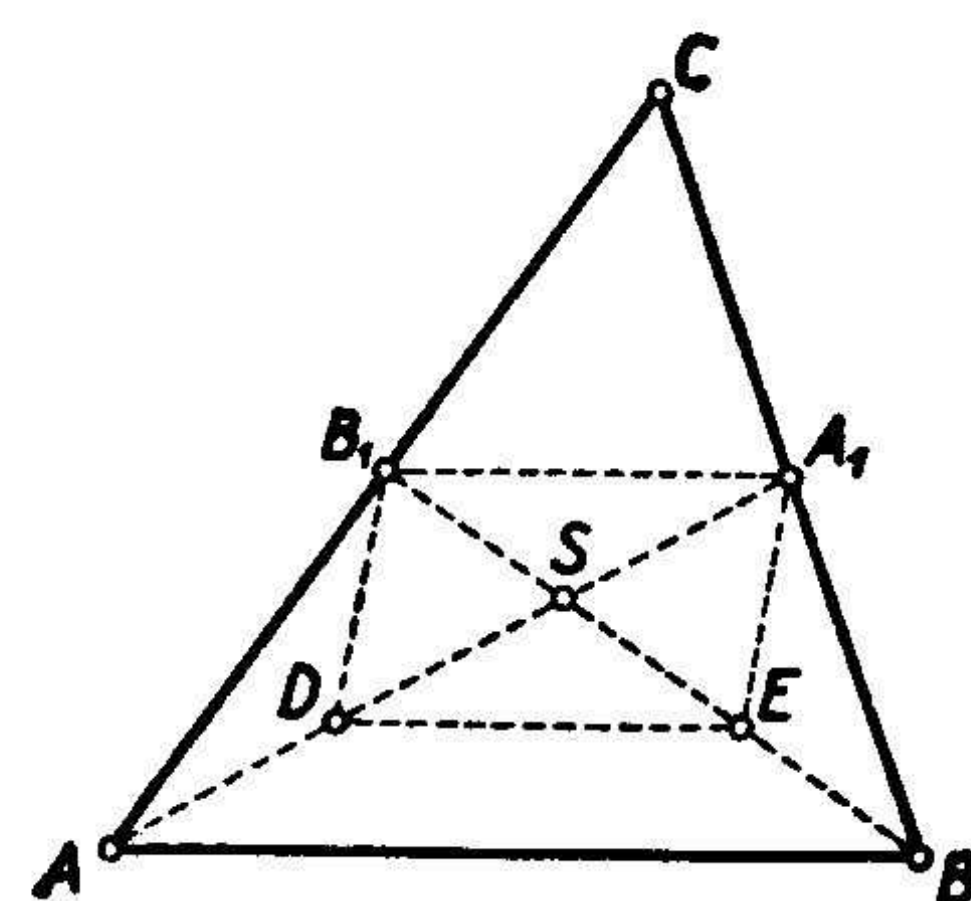
Ezt a pontot a háromszög súlypontjának (baricentrum) nevezzük. A súlypont nyilván mindig a háromszög belsejében van.



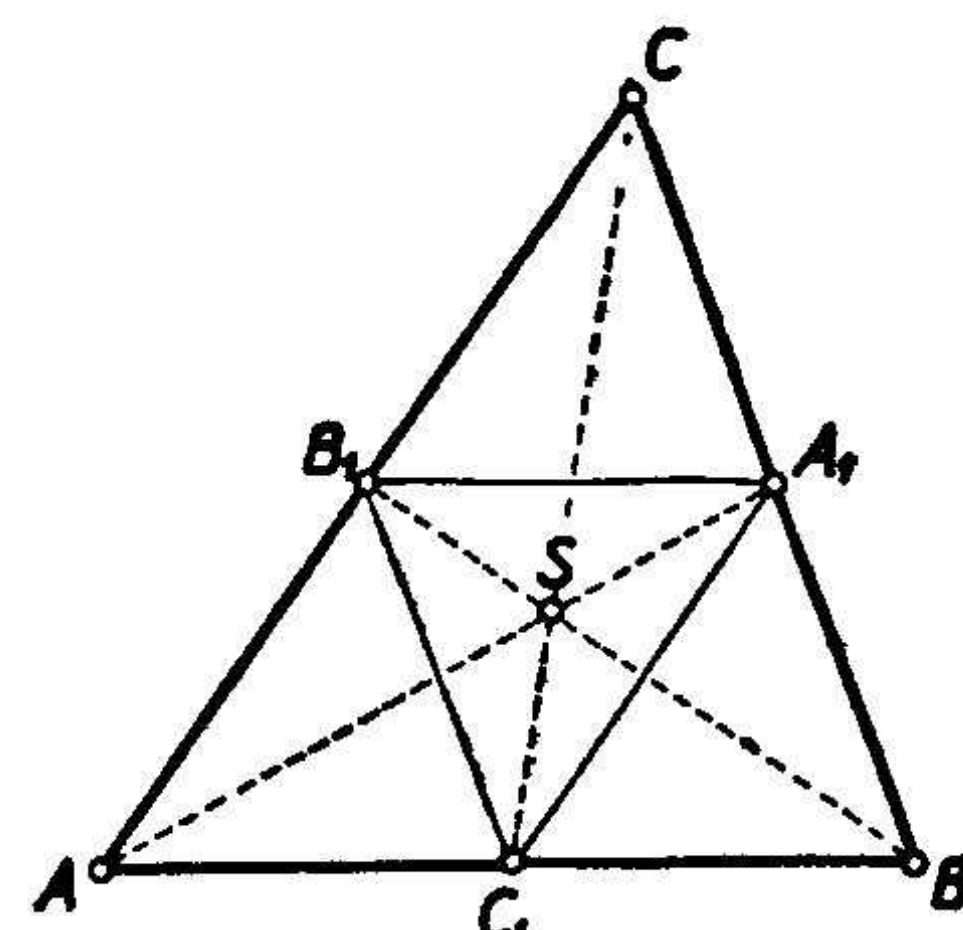
137. ábra

Első bizonyítás. Elég azt bizonyítani, hogy az AA_1 és BB_1 súlyvonalak S metszéspontja mindkét súlyvonalnak (az oldalhoz közelebb levő) harmadolópontja (138. ábra).

Legyen D és E az AS és BS szakasz felezőpontja. Minthogy B_1A_1 az $ABC\Delta$, DE pedig az $ABS\Delta$ középvonala, azért mindkét távolság párhuzamos AB -vel és feleakkora. Ezért DEA_1B_1 paralelogramma, és átlói felezik egymást. Következésképp $A_1S = SD = \frac{1}{2}SA$ és $B_1S = SE = \frac{1}{2}SB$. —



138. ábra



139. ábra

Második bizonyítás. Ismét azt bizonyítjuk, hogy az AA_1 és BB_1 súlyvonalak S metszéspontja e súlyvonalakat harmadolja (138. ábra). Az $ABS\Delta$ és $A_1B_1S\Delta$ hasonló, mert szögeik páronként csúcsszögek, illetve váltószögek. A hasonlóság arányszáma $\frac{1}{2}$, mert $A_1B_1 = \frac{1}{2}AB$. Így tehát $A_1S = \frac{1}{2}AS$

és $B_1S = \frac{1}{2}BS$. —

Harmadik bizonyítás. Az $ABC\Delta$ középvonalai olyan $A_1B_1C_1\Delta$ -et adnak (139. ábra), melynek oldalai az eredetiével párhuzamosak és feleakkorák. Ezért a háromszög az eredetihez párhuzamosan hasonló, és e hasonlóság arányszáma $\frac{1}{2}$. Van tehát S hasonlósági centrum

s erre $A_1S = \frac{1}{2}AS$, $B_1S = \frac{1}{2}BS$, $C_1S = \frac{1}{2}CS$. —

A Megemlítjük, hogy ha egy háromszög alakú homogén lemezt súlyvonalában vagy súlypontjában alátámasztunk, akkor a lemez egyensúlyban van. Az elnevezések innen erednek.

B1 Tételünk három bizonyítása egyre több előismeretet feltételezett. Az első a hasonlóságot sem használta, a harmadik a párhuzamos hasonlóságra épített.

B2 A háromszög köré írt kör középpontjának, a magasságpontnak s a súlypontnak viszonylagos elhelyezkedéséről később még szó lesz (lásd 35.3).

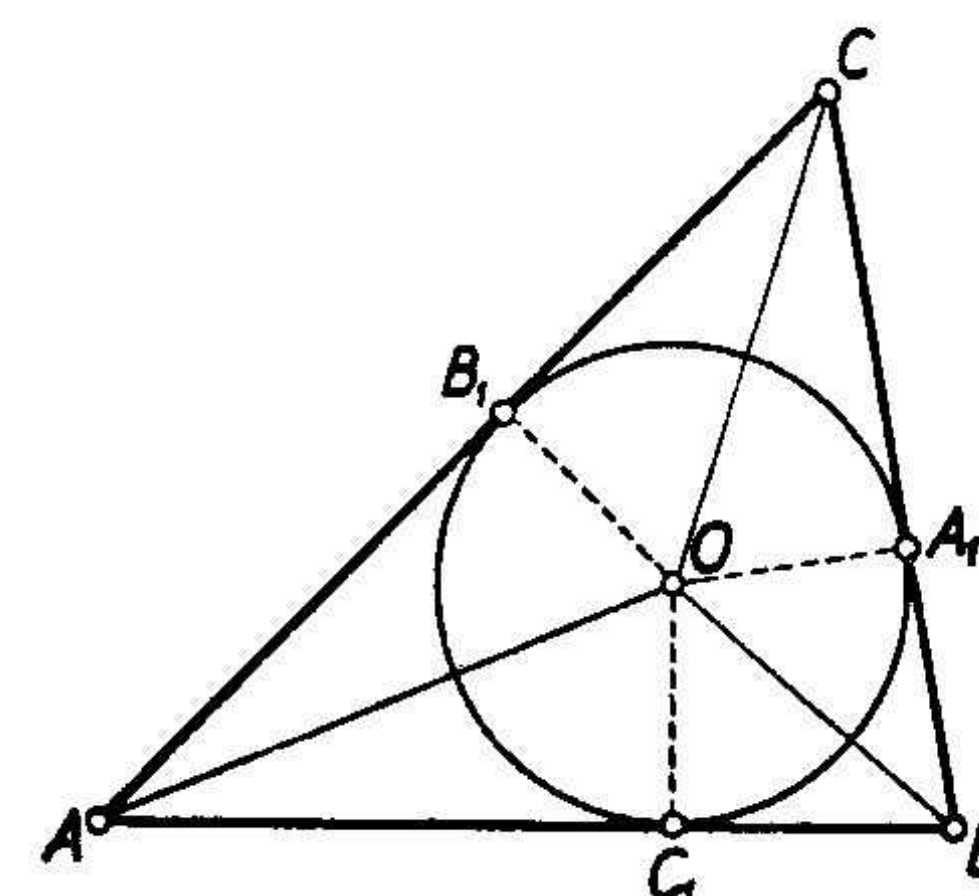
21.4 Tétel. a) Bármely háromszögbe egy és csak egy olyan kör írható, amely mind a három oldalt érinti.

b) A háromszög szögfelezői egymást a háromszögbe írt kör középpontjában metszik.

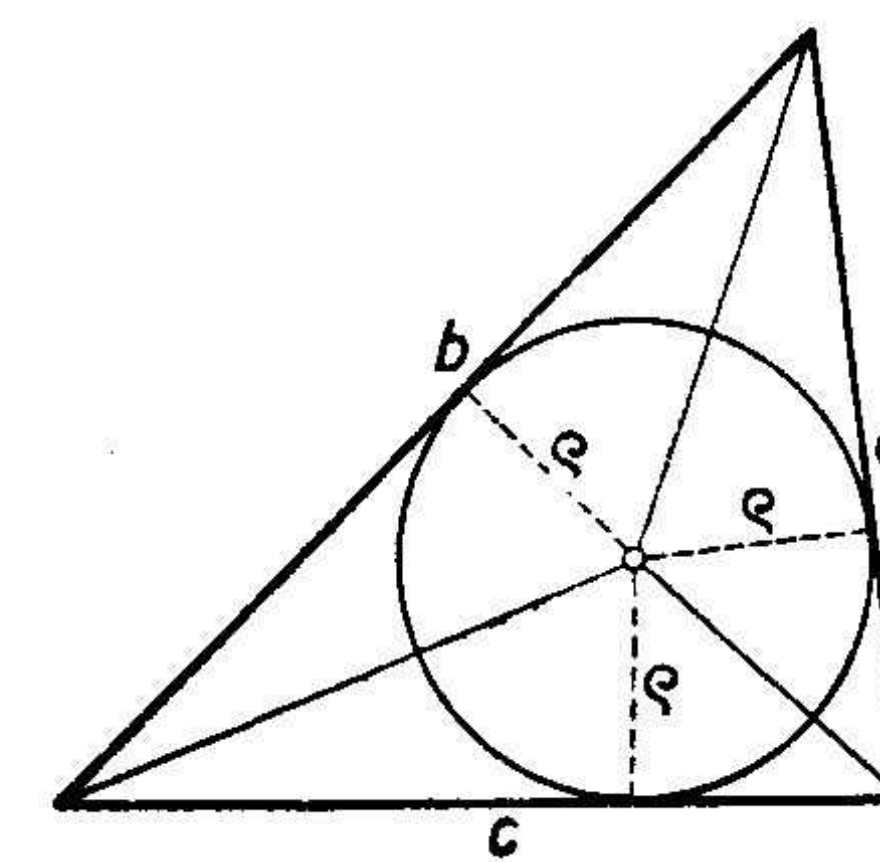
Bizonyítás. A háromszög A -ból és B -ből induló szögfelezője egymást egy O pontban metszi (140. ábra), mivel az AB oldallal bezárt szögek hegyesszögek. Minthogy a szögfelező pontjai a szártól egyenlő távolságra vannak, az O -ból a háromszögoldalakra bocsátott merőlegesekre vonatkozólag egyrészt $OA_1 = OC_1$, másrészt $OC_1 = OB_1$ is teljesül. Így tehát $OA_1 = OB_1$.

Ebből következik, hogy az O ponton az $ACB\angle$ felezője is áthalad, hiszen O a háromszög belsejében van. Mivel $OA_1 = OB_1 = OC_1$, az O körül ekkora sugárral írt kör mind a három oldalt érinti.

Már beláttuk, hogy a szögfelezők egy pontban metszik egymást, s hogy metszéspontjuk körül a háromszögbe kör írható. Csak azt kell még igazolnunk, hogy ez az egyetlen ilyen kör. Ez abból következik, hogy a háromszögbe írt kör középpontja szükségképpen rajta van a szögfelezőkön, hiszen a háromszög belsejében és az oldalaktól egyenlő távolságra van. A beírt kör középpontja tehát csak a szögfelezők metszéspontja, és sugara csak e metszéspontnak az oldalaktól való távolsága lehet (vö. 15.5 B1). —



140. ábra



141. ábra

Tétel. A T területű és $2s$ kerületű háromszögbe írt kör sugara

$$r = \frac{T}{s}.$$

Bizonyítás. Az a, b, c oldalú háromszöget a beírt kör középpontját a csúcsokkal összekötő szakaszok három háromszögre bontják (141. ábra). Ezeknek alapja az eredeti háromszögnek egy-egy oldala, és mindegyikben r az ehhez tartozó magasság. Így tehát a területekre

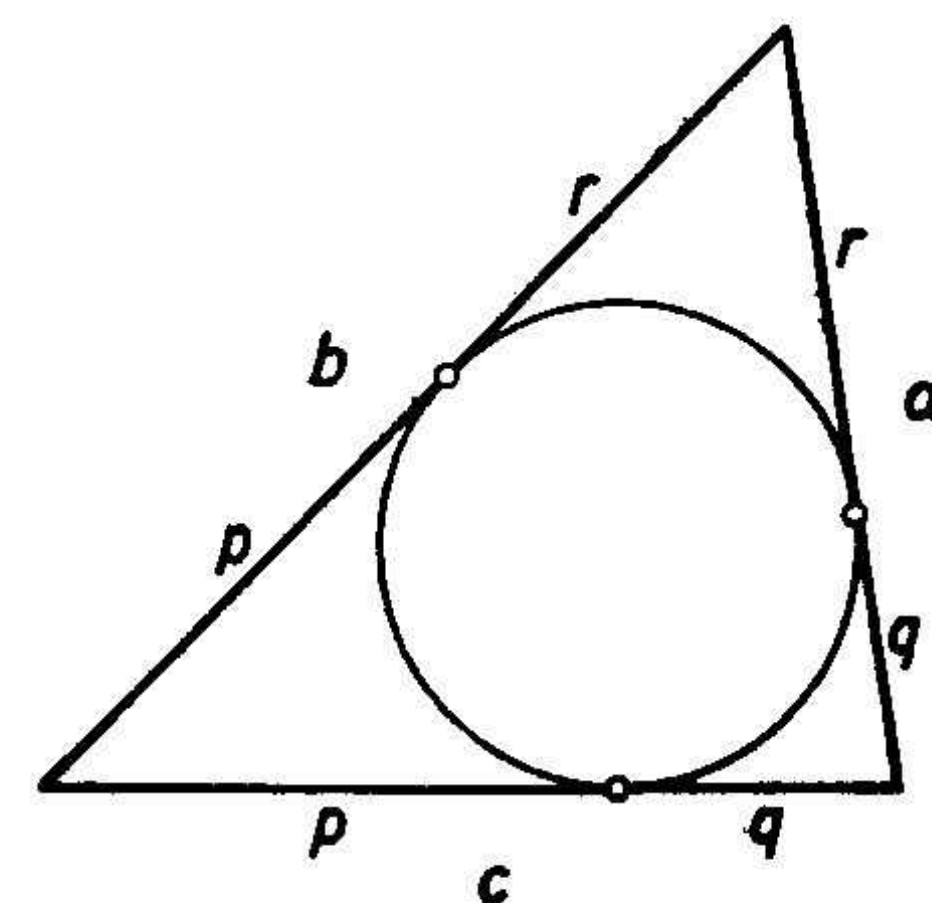
$$T = \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = sr. \quad \text{—}$$

Tétel. Az a, b, c oldalú háromszögbe írt kör érintési pontjai az oldalakat $s-a$, $s-b$, $s-c$ hosszúságú darabokra bontják, ahol s a háromszög kerületének felét jelöli.

Az a oldal darabjainak hossza pl. $s-b$ és $s-c$. Ezeknek összege valóban $(s-b) + (s-c) = 2s - b - c = a$.

Bizonyítás. Minthogy a körhöz egy pontból vont két érintő egyenlő, a vizsgált hat távolság közül az egy csúcsba futók páronként egyenlők. Ha ezeket

rendre p, q, r jelöli (142. ábra), akkor a teljes kerület $2s = 2p + 2q + 2r$. Innen pedig pl. $p = s - (q + r) = s - a$. —



142. ábra

B 21.1 és e szakasz első tétele kimondja, hogy minden háromszög „húrháromszög” és egyben „érintőháromszög” is. Ezeket a megnevezéseket éppen ezért nem használjuk.

21.5 Az olyan kört, amely a háromszög egyik oldalát és másik két oldalának meghosszabbítását érinti, a *háromszöghöz írt körnek* (hozzáírt kör, kívülről érintő kör) nevezzük. A beírt és hozzáírt köröket közös néven a *háromszöget érintő köröknek* mondjuk.

Tétel. A háromszög minden egyes oldalához egy-egy hozzáírt kör tartozik, amely ezt az oldalt érinti, s középpontja egy belső és két külső szög felezőjének közös pontja.

Bizonyítás. A háromszög BC oldalára támaszkodó két külső szög felezője egy O pontban metszi egymást, mert e szögfelezők a BC oldallal hegyesszöget zárnak be (143. ábra). Ugyanebből az okból kifolyólag az O -ból BC -re bocsátott merőleges A_1 talppontja a BC oldal belső pontja. Minthogy O a szögfelezőkön van, az O -ból az oldalegyenesekre bocsátott merőlegesekre $OA_1 = OB_1 = OC_1$.

Ebből következik, hogy O rajta van a BAC szögfelezőjén is, mert O e szögtartomány belsejében van, és hogy az O körül OA_1 sugárral írt kör mind a három oldalegyenest érinti. A B_1 és C_1 érintési pont az oldalak meghosszabbításán van, mert ezek A_1 -nek a külső szögfelezőkre vonatkozó tükröképei. A kapott kör tehát valóban a BC oldalt érintő hozzáírt kör. Más ilyen kör nincs, hiszen középpontjának szükségképpen a szerepeltetett szögfelezőkön kell lennie. —

Tétel. A T területű, $2s$ kerületű háromszög a oldalát érintő hozzáírt körének sugara

$$\varrho_a = \frac{T}{s - a}.$$

Hasonló képlet érvényes természetesen a ϱ_b és ϱ_c sugarakra is.

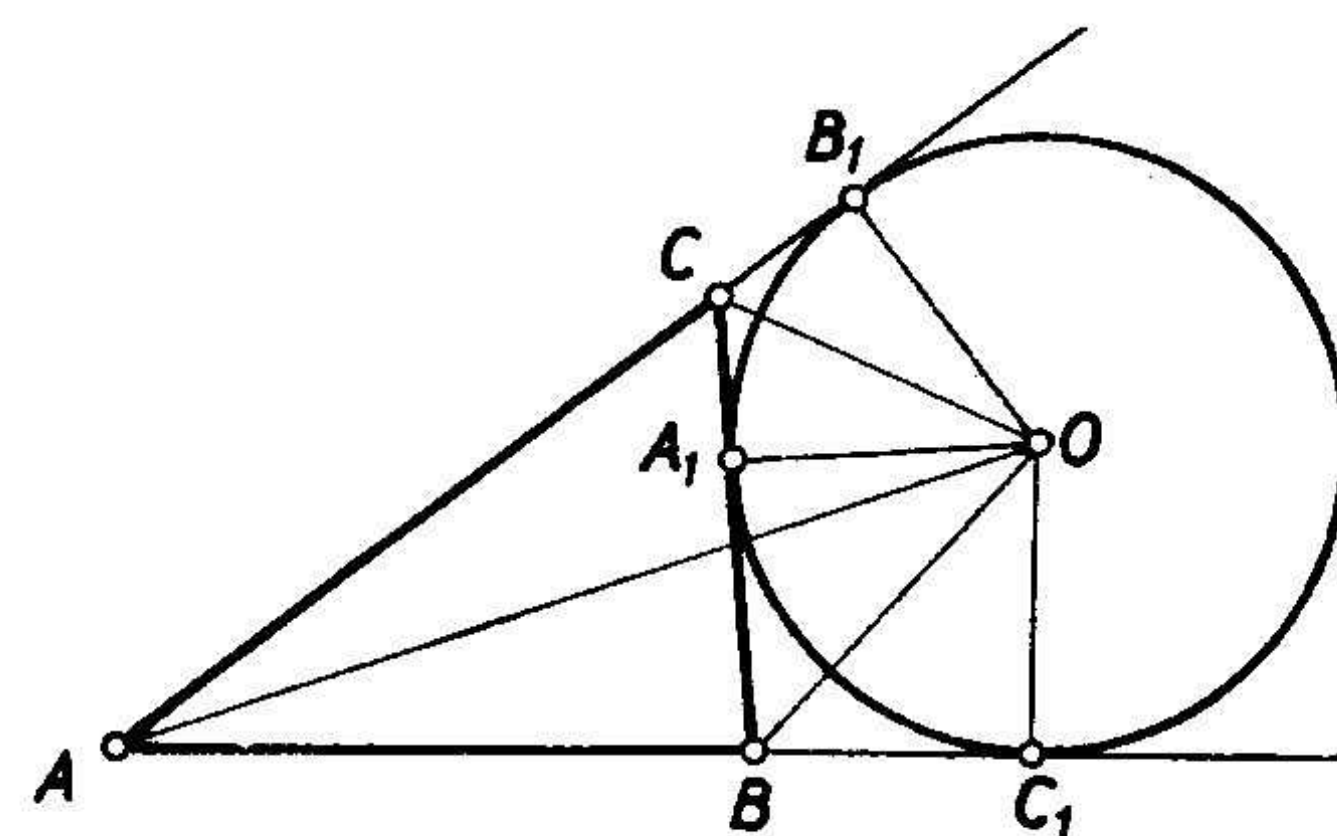
Bizonyítás. Az $ABOC$ négyszöget (143. ábra) a BC oldal s az AO szakasz is két-két háromszögre vágja. Ezek területeire tehát

$$T + \frac{1}{2} a \varrho_a = \frac{1}{2} b \varrho_a + \frac{1}{2} c \varrho_a,$$

amiből

$$T = \frac{1}{2} (b + c - a) \varrho_a = (s - a) \varrho_a. \quad \text{—}$$

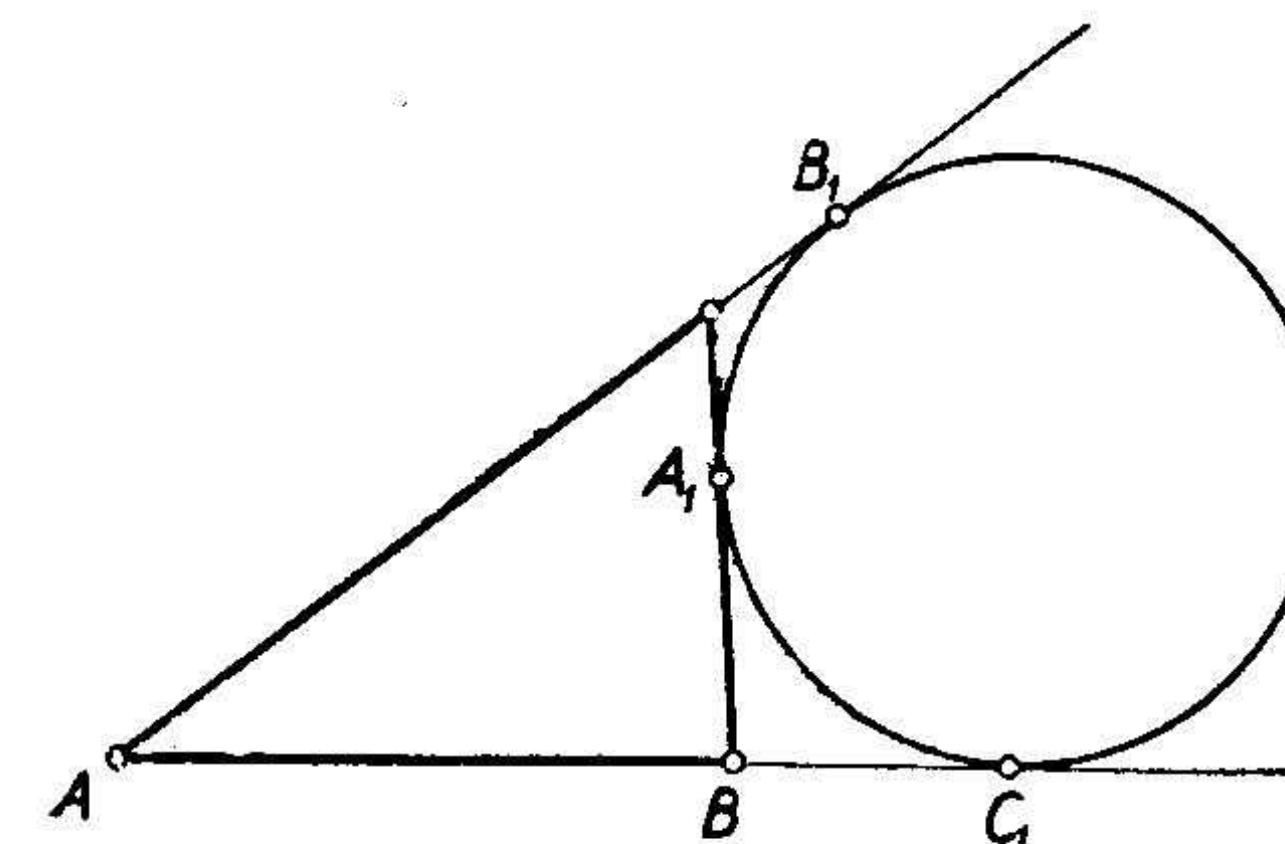
Tétel. A $2s$ kerületű háromszöghöz írt kör két oldal meghosszabbítását közös végpontjuktól s távolságra érinti.



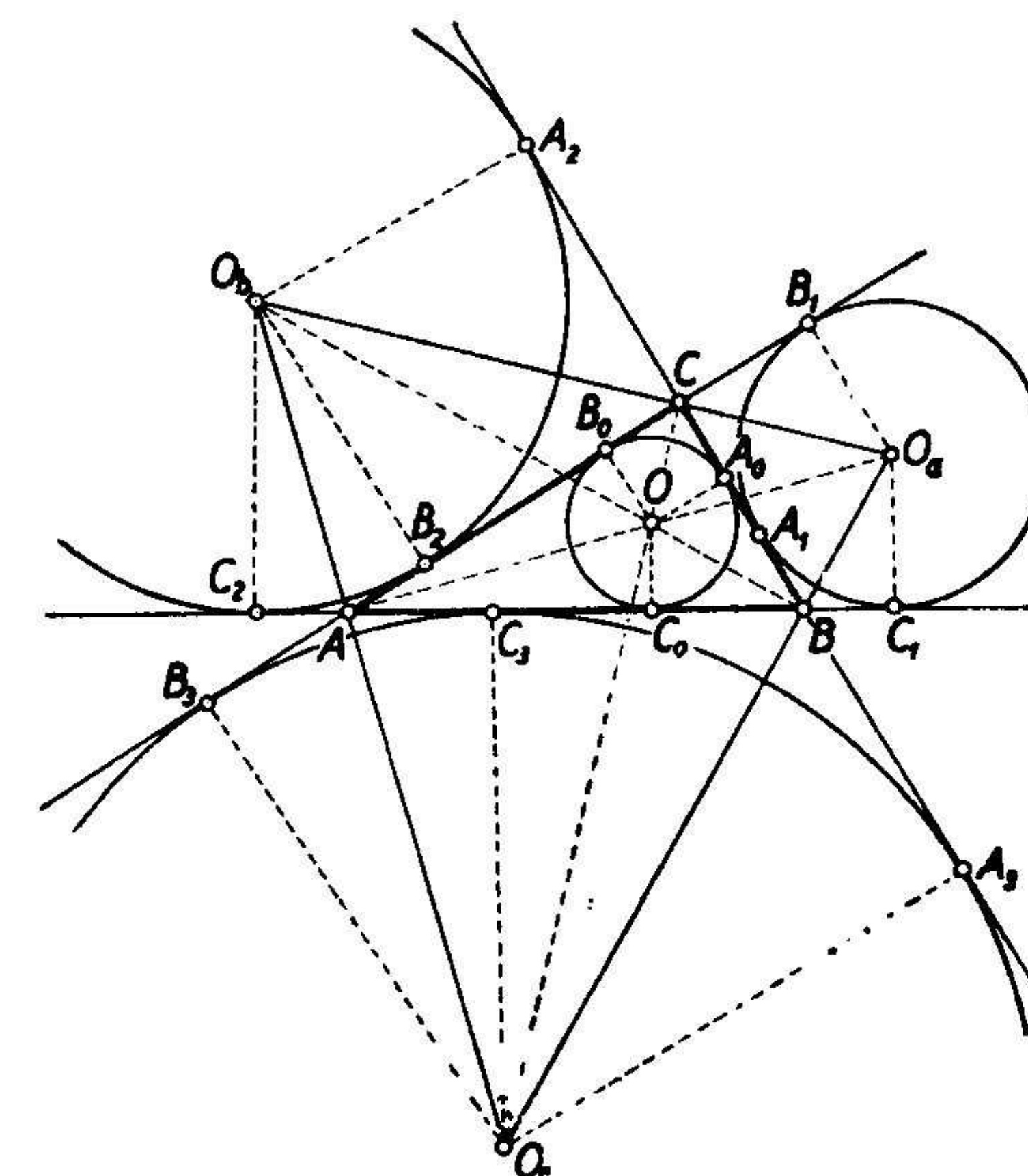
143. ábra

A 144. ábrán tehát $AB_1 = AC_1 = s$. Ebből azonnal adódik, hogy $CB_1 = CA_1 = s - b$ és $BC_1 = BA_1 = s - c$.

Bizonyítás. Mivel a körhöz egy pontból vont érintők egyenlők, $AB_1 = AC_1$. E két távolság összege a háromszög kerületével egyenlő, mert ugyancsak az előbb említett okból $CB_1 = CA_1$ és $BC_1 = BA_1$. Így tehát a szóban forgó távolságok mindegyike a kerületnek a fele. —



144. ábra



145. ábra

B1 Ha egy háromszög beírt körét, mindhárom hozzáírt körét és ezek érintési pontjait tekintjük (145. ábra), a következőket állapíthatjuk meg:

A hozzáírt körök középpontjai által alkotott $O_a O_b O_c \Delta$ -nek a magasságpontja a beírt kör O középpontja, mert a belső és külső szögfelezők merőlegesek egymásra.

Egy oldalegyenesen a négy érintési pont közül kettő-kettő az oldal felezőpontjára nézve szimmetrikusan helyezkedik el, ugyanis 21.4 és 21.5 szerint pl. az AB egyenesen egyrészt $AC_0 = BC_3 = s - a$ és $BC_0 = AC_3 = s - b$, másrészt $AC_1 = BC_2 = s$ és $AC_2 = BC_1 = s - c$. Az is nyomban adódik így, hogy $C_0 C_1 = C_2 C_3 = a$, $C_0 C_2 = C_1 C_3 = b$, $C_1 C_2 = a + b$, $C_0 C_3 = |a - b|$.

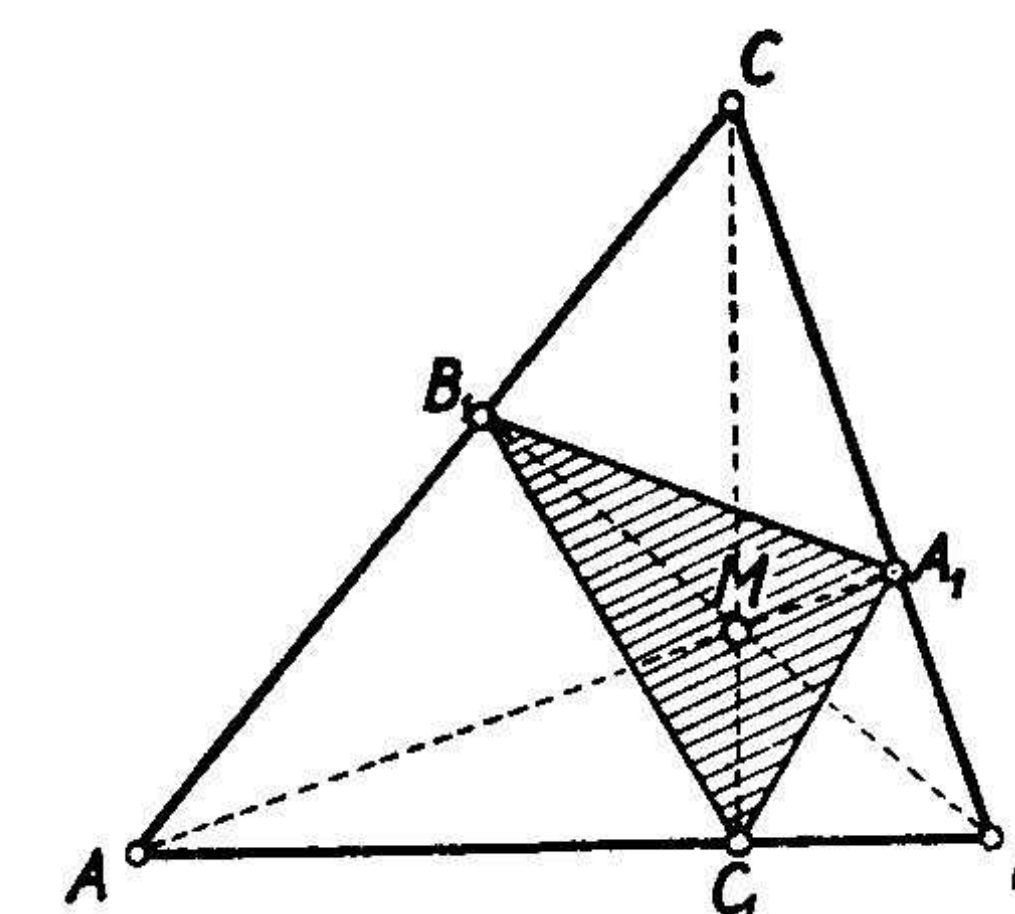
B2 A háromszög mindhárom oldalegyenesét csak a beírt kör és a három hozzáírt kör érinti. Ez abból következik, hogy egy ilyen kör középpontjának rajta kell lennie három szögfelezőn, márpedig a szögfelezők egymást négy pontban, éppen a mondott körök középpontjában metszik: Joggal neveztük tehát ezt a négy kört érintőkörnek.

21.6 Egy hegyesszögű háromszög magasságainak talppontjai által meghatározott háromszöget *talpponti háromszögnek* nevezzük (146. ábra). Ez az eredeti háromszögbe írt háromszög, azaz csúcsai az eredeti háromszög más-más oldalának belső pontjai.

Egyenlő oldalszámú sokszögekről szólva akkor mondjuk, hogy az egyik a másikba van írva, vagyis hogy az egyik *beírt* és a másik *körülírt* sokszög, ha minden csúcsa a másik sokszög más-más oldalának belső pontja. Ez a szóhasználat szűkebb, mint a 19.3-ban elfogadott. Szóhasználatunk szerint a hegyesszögű háromszög talpponti háromszöge beírt háromszög.

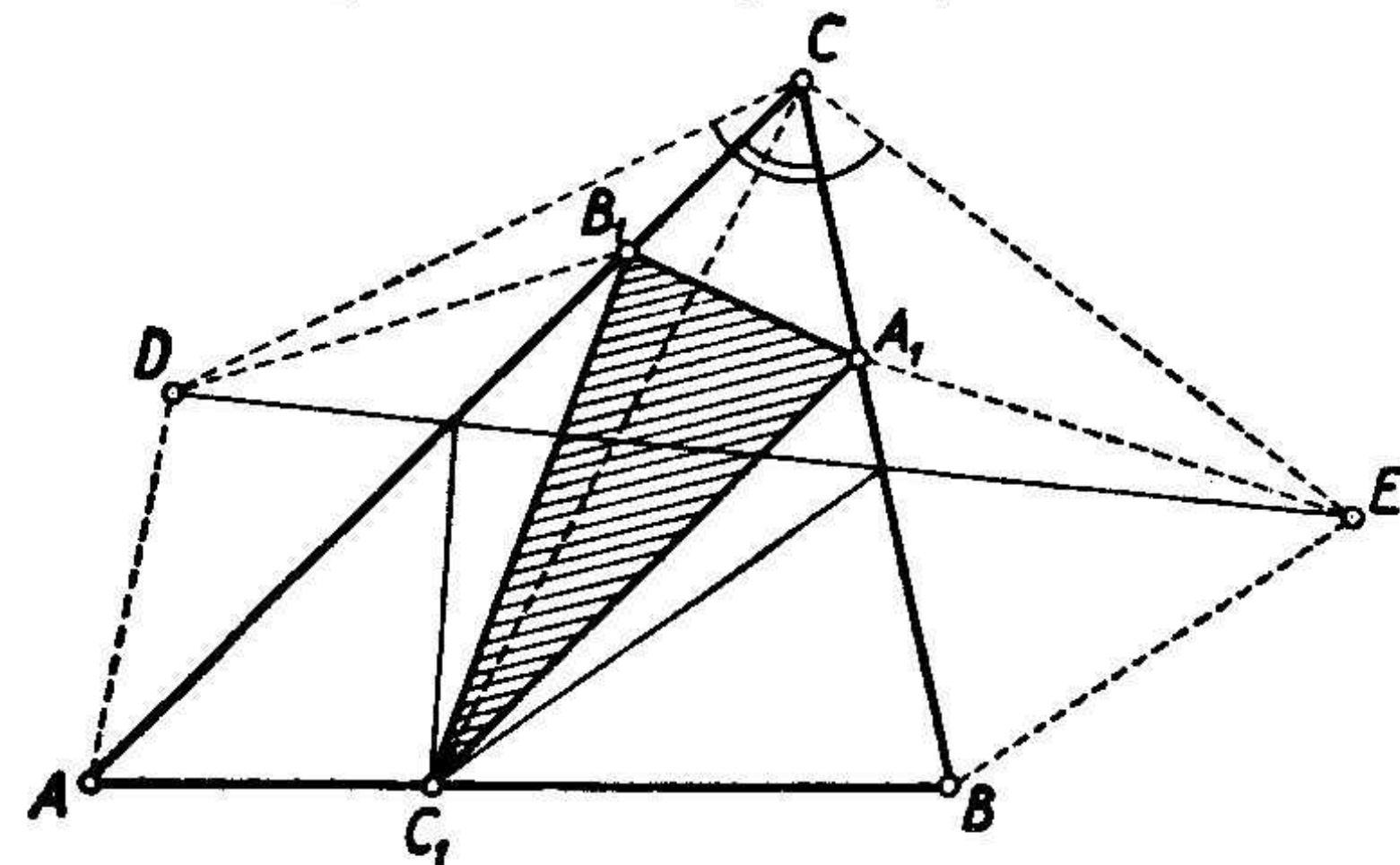
Tétel. Egy hegyesszögű háromszögbe írt háromszögek közül a talpponti háromszög kerülete a legkisebb.

Nem volna helyes ez a tétel, ha a beírt háromszög fogalmát 19.3 szerint érintenők, hiszen egy csúcs és a belőle induló két oldal egy-egy pontja olyan háromszöget határoz meg, amelynek kerülete tetszőlegesen kicsiny lehet.



146. ábra

Bizonyítás. Tekintsünk egy az $ABC\Delta$ -be írt $A_1B_1C_1\Delta$ -et (147. ábra). A C_1 pontot az AC és BC oldalra tükrözve a D és E ponthoz jutunk. Minthogy a tükrözés révén $C_1B_1 = DB_1$ és $C_1A_1 = EA_1$, azért a DB_1A_1E töröttvonal hossza az $A_1B_1C_1\Delta$ kerületével egyenlő. Ha a C_1 pontot rögzítve tartjuk, s az A_1 és B_1 pontot változtatjuk, akkor abban az esetben lesz a kerület a legkisebb, ha A_1 és B_1 rajta van a DE szakaszon, hiszen minden más esetben a DB_1A_1E töröttvonal hossza a DE távolságnál nagyobb. A DE szakasz valóban metszi is az AC és BC szakaszt, mert $ABECD$ konvex ötszög, hiszen minden szöge konvex: három szöge az $ABC\Delta$ hegyesszögeinek kétszerese, kettő pedig konvex szögek tükörképe.



147. ábra

Ha mármint a legkisebb kerületű beírt háromszöget keressük, csak azt kell megvizsgálnunk, hogy az AB oldal melyik C_1 pontja adja a legkisebb DE távolságot. A különböző C_1 pontokból származtatott $DCE\Delta$ -ek hasonlóak, mert a tükrözés révén $DCE\angle = 2ACB\angle$ és $CD = CC_1 = CE$, azaz e háromszögeknél egy szög s az ezt közrefogó oldalak aránya egyenlő.

E háromszögek DE alapja tehát akkor lesz minimális, amikor száruk, azaz CC_1 , a legkisebb. Ez viszont tudvalevően a magasság C_1 talppontjára következik be, hiszen az $ABC\Delta$ hegyesszögű, és e talppont az AB oldal belső pontja.

Egyetlen minimális kerületű beírt háromszög van tehát, és ennek C_1 csúcsa egy magasság talppontja. Ugyanígy következik, hogy ennek a minimális kerületű háromszögnek másik két csúcsa is egy-egy magasság talppontja, hogy tehát a kapott háromszög éppen a talpponti háromszög.

Bizonyításunkból az is kiolvasható, hogy a magasságok a talpponti háromszög szögfelezői, s hogy az eredeti háromszög oldalai a külső szögfelezők, hiszen a talpponti háromszög két-két oldalegyenese — mint láttuk — az eredeti háromszög egyik oldalára vonatkozólag szimmetrikusan helyezkedik el.

22. § Szerkesztés

Először a szerkesztés fogalmát tisztázzuk, majd az alapvető szerkesztésekkel foglalkozunk, és végül a szerkesztési feladatok megoldásával kapcsolatos tudnivalókról lesz szó.

22.1 Egy síkbeli alakzatot bizonyos adatok alapján megrajzolhatunk, megszerkeszthetünk. Ehhez szükséges, hogy elegendő s ellemntmondást nem tartalmazó adatok álljanak rendelkezésre, s hogy kellő eszközök birtokában legyünk.

A szerkesztés megbízhatósága a használt eszközök pontosságától s attól függ, milyen gondossággal dolgozunk. Bár e tényezők a gyakorlatban igen fontosak, elméleti vizsgálatoknál feltételezzük, hogy eszközeink tökéletesen pontosak, s hogy a szerkesztést kifogástalan gondossággal végezzük. E feltételezés mellett kérdezni lehet, hogy bizonyos eszközök birtokában és pontosan megszabva, hogy ezeket az eszközöket hogyan használhatjuk, milyen szerkesztéseket tudunk elvégezni.

A legegyszerűbb eszköz a *vonalzó* és a *körző*. A legegyszerűbb lépések, amelyeket ezekkel az eszközökkel megtehetünk, a következők:

1. A vonalzót két adott ponthoz illesztve megrajzolhatjuk a két ponton áthaladó egyenest.

2. Két adott pont távolságát körzőnyílásba vehetjük.
3. Adott pont körül adott körzőnyílással kört rajzolhatunk.
4. Két metsző egyenes metszéspontját megkereshetjük.
5. Egy kör és azt metsző egyenes mindkét metszéspontját megkereshetjük.
6. Két egymást metsző kör mindkét metszéspontját megkereshetjük.

Ha egy szerkesztést pusztán a felsorolt hat lépés véges sokszori alkalmazásával végzünk, akkor *euklideszi szerkesztésnek* (körzővel és vonalzóval végzett szerkesztés) nevezzük. Ha e könyvben szerkesztésről vagy szerkeszthetőségről lesz szó, mindig euklideszi szerkesztésre gondolunk.

A szerkeszthetőség kérdésénél feltesszük, hogy van tetszőlegesen hosszú vonalzónk és tetszőlegesen nagy nyílású körzőnk is.

A1 Ha nem is szó szerint, de lényegében valóban EUKLIDES határozta el a szerkesztés fogalmát úgy, ahogyan azt mi is tettük.

A2 Gyakorlati szempontból igen fontos, hogy rajzeszközeink lehetőleg pontosak legyenek, s így rajzunk a kifogástalannak képelt szerkesztést jól megközelítse. A ceruza hegyes legyen, és ha hegye elkopott, újból hegyezni kell. Keményebb grafittal pontosabban rajzolunk. A körzőnél a hegyezés helyett élézés a célszerűbb, mert az él kevésbé kopik. A vonalzó éle egyenes legyen. Ezt vonalzó éle egymás mellé fektetésével ellenőrizhetjük. A körző tűje igen hegyes legyen, hogy ne csússzék. A körző szárai ne lötyögjenek, hogy a kör rajzolásakor a nyílás megmaradjon. A rajzlap valóban sík lapon (asztalon, rajzdeszkán) helyezkedjék el.

Lényeges az is, hogy gondosan rajzoljunk, s a gondos munkában gyakorlatra tegyünk szert. A vonalzót finoman kell a pontokhoz illeszteni. Vonal húzása közben a vonalzó nem mozoghat. Amikor a ceruzát a vonalzó mentén csúsztatjuk, a ceruza hegyének valóban a vonalzó mentén kell csúsznia. A körző használatakor a körző tűjét enyhén a papírhoz kell nyomni, hogy el ne mozduljon. Egyenesek metszéspontjának, valamint egyenes és kör metszéspontjának megjelölésekor finoman kell eljárni, különösen akkor, ha igen hegyes szögben metsző vonalakról van szó, hiszen vonalainknak szélessége is van, s a metszéspont megállapításánál ebből a szélességből eredő hibát csökkenteni kell. Pontokat úgy kell megjelölni (kis körrel, kereszttel), hogy vonalzó odaillesztésénél, körzőnyílásba vételnél, körző beszúrásánál valóban a megjelölt pontot vehessük figyelembe.

Ne feledjük, hogy a legfinomabb eszközökkel és a leggondosabb munkával is csak megközelítjük az elvben kifogástalan szerkesztést.

B1 Előző megjegyzésünkkel szöges ellentétben áll az a mondas, hogy „a matematikus nem törődik az ábra szépségével”. E mondas azt a tényt akarja kifejezésre juttatni, hogy okoskodásunkat mintegy függetleníteni kell az ábrától. Legyen tehát a rajz lehetőleg jó, de okoskodásunk a rajz jószágára ne építsen (vö. 9.1 B2). Néha a szándékosan torz rajz jobban segíti az okoskodást (vö. 11.1 A és 15.5 A).

B2 Az euklideszi szerkesztés definiálásánál elvonatkoztathatunk attól, hogy eszközeink mifélek. Axiomatikus tisztasággal euklideszi szerkesztésnek az olyan eljárást nevezzük, melynél az adatokból kiindulva a kívánt alakzathoz úgy jutunk el, hogy közben: 1. csak olyan pontot szerepeltetünk, amely két ismert egyenes, vagy két ismert kör, vagy pedig ismert egyenes és ismert kör metszéspontja; 2. csak olyan egyenest szerepeltetünk, amelynek két pontja ismert; 3. csak olyan kört szerepeltetünk, amelynek középpontja ismert, és sugara két ismert pontnak a távolsága.

Kiegészítendő ez az előírás azzal, hogy szerepeltethetjük a síknak két semminemű előírásával meg nem kötött pontját is. Szükség van erre a kiegészítésre, mert különben el sem indulhatunk, ha pl. az a feladat, hogy „szerkesztendő egy négyzet”. A kiegészítésben csak két pontról szoltunk, mert kettőből kiindulva már tetszőlegesen sokat is meg lehet szerkeszteni, sőt az így szerkeszthető pontok végtelenül sűrűn belepik a teljes síkot.

B3 Bár e fejezetben síkgeometriáról van csak szó, itt említjük, hogy a térgeometriában mit nevezünk euklideszi szerkesztésnek, mégpedig kétféleképpen válaszolunk erre a kérdésre.

Az egyik válasz abból indul ki, hogy mi térben nem rajzolhatunk, legfeljebb csak azt tehetjük, hogy a térbeli alakzatokhoz valamilyen módon síkbeli alakzatot rendelünk, és a szerkesztést ezeken a hozzárendelt síkbeli alakzatokon végezzük el. Ilyen hozzárendelésekkel és ilyen szerkesztésekkel az *ábrázoló geometria* foglalkozik. Minthogy itt igazában síkbeli szerkesztésről van szó, a szerkesztés szabályozása semmiféle kiegészítést nem kíván.

A másik válasz nem a tényleges rajzolásra gondol, hanem az előző megjegyzés szellemében válaszol, és az ott mondottakat a következőkkel egészíti ki: 1. szerepeltethető olyan pont is, amely ismert egyenes és sík metszéspontja; 3. egy kör szerepeltetése csak akkor megengedett, ha középpontján és két pont meghatározta sugarán kívül síkját is ismerjük; 4. csak olyan sík szerepeltethető, amelyiknek három, nem egy egyenesbe eső pontja ismert. Megjegyezzük még, hogy engedélyeznünk kell itt a tér négy, semminemű előírással nem kötött, egy síkba nem eső pontjának szerepeltetését is.

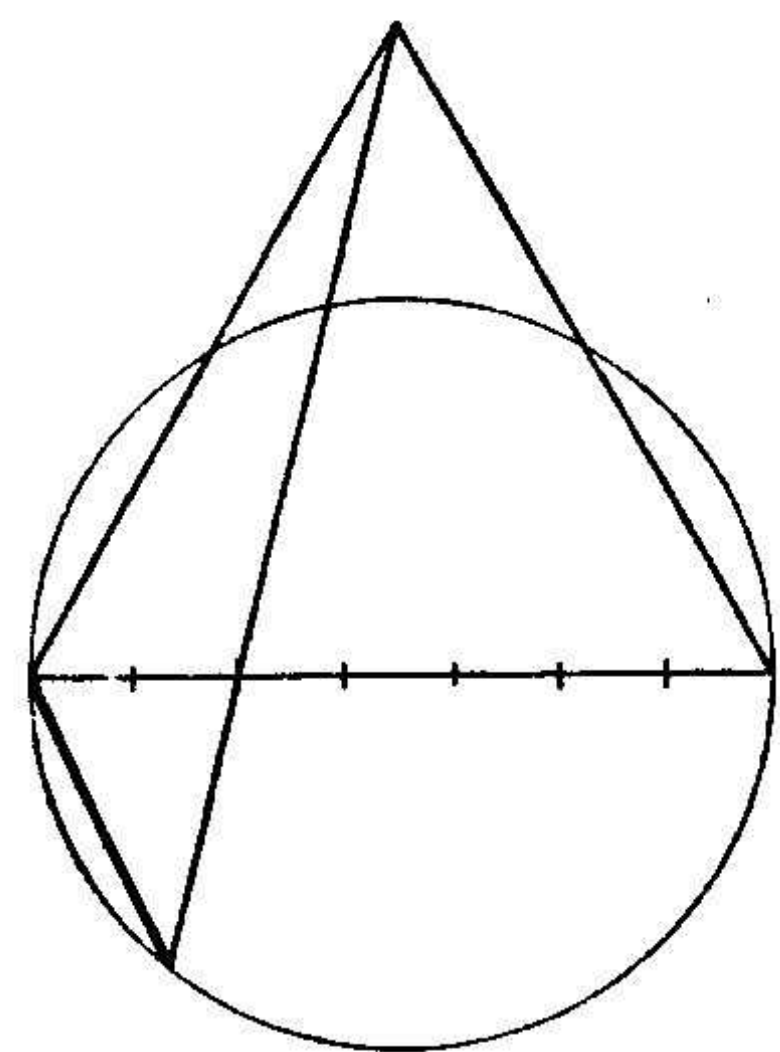
Más a kérdés, ha egy gömb felületén végzett szerkesztésről van szó. Ez a kérdés a síkban felvetett kérdéssel szorosabb rokonságban van, és ugyanúgy válaszolható meg, de vonalzók és körzők helyett (főköröket kijelölő) gömbi vonalzót és (gömbön rajzoló) gömbi körzőt kell mondani.

22.2 Csak akkor érthető, hogy szerkeszthetőségről beszélünk, ha tudjuk, hogy vannak euklideszi szerkesztéssel meg nem oldható feladatok is.

A leghíresebb ilyen szerkesztési feladatok a következők: megszerkesztendő egy olyan négyzetnek az oldala, amelynek területe egy adott kör területével egyenlő (a kör négyzetesítése, kvadrátúrája); megszerkesztendő egy olyan kockának az éle, amelynek köbtartalma egy adott élű kocka köbtartalmának kétszerese (kocka megkettőzése, déloszi feladat); megszerkesztendő egy tetszőlegesen adott szög harmada (szögharmadolás); szerkesztendő szabályos hétszög. Nem térhetünk itt ki annak bizonyítására, hogy e feladatok euklideszi szerkesztéssel nem oldhatók meg (vö. B2).

Szerkesztéssel megoldhatóvá válhatnak az ilyen feladatok is, ha a megengedett eszközök és lépések tekintetében nem tartjuk be az euklideszi korlátozásokat.

A Alig van gyakorlati jelentősége annak, hogy egy feladat szerkesztéssel megoldható-e vagy sem. Még az elvileg pontos szerkesztés is pontatlanná válik, ha gyakorlati végrehajtását tekintjük. A gyakorlatban egy elvileg pontatlan szerkesztést is megfelelőnek mondhatunk, ha pontatlansága nem számottevő.



148. ábra

Az utóbb említett, csak közelítő szerkesztések közül megemlíthetjük a szabályos n -szög következő szerkesztését: A kör átmérőjét n egyenlő részre osztjuk (148. ábra); a végponttól számított második osztópontot összekötjük az átmérő fölé rajzolt szabályos háromszög harmadik csúcsával; az összekötő egyenes és az alsó félkörív metszéspontjának az átmérő előbb említett végpontjától való távolsága a körbe írt szabályos n -szög oldalát adja (közelítőleg!). Ha ezzel az előírással szabályos hétszöget szerkesztünk, gyakorlatilag ugyanolyan megbízhatóan járunk el, mint amikor euklideszi szerkesztéssel pl. szabályos ötszöget szerkesztünk.

B1 Ha valaki azt a kérdést veti fel, hogy a geometriai szerkesztések tárgyalásánál miért korlátozzuk az eszközöket és lépéseket, és miért éppen így, akkor a következőkkel felelhetünk: A szerkesztés fogalmának pontos körvonalazására van szükség ahhoz, hogy egyáltalában határozottsággal megoldottnak vagy meg nem oldottnak mondassunk egy feladatot.

A megengedett eszközök megválogatása tekintetében nem lehet döntő szempont az, hogy mely eszközök pontosak, hiszen minden eszköz többé-kevésbé pontatlan. Ha a vonalzók és a körző használatát engedjük meg akkor azt a két eszközt választottuk, amelyek a legegyszerűbbek, s amelyeknek használata egészen általános. Egyes további eszközök használatát előírásunk csak azért nem engedélyezi, mert ezáltal az előírás összetettebbé válnék,

viszont a szerkesztéssel megoldható feladatok köre nem bővülne. Ilyen eszközök a fejesvonalzó és a szokott alakú háromszögvonalzók (egyenlő szárú derékszögű és 30° , 60° , 90° -os szögekkel rendelkező). Látjuk majd, hogy az ezekkel az eszközökkel megoldható alapfeladatok euklideszi szerkesztéssel is megoldhatók. Más eszközök használatát előírásunk már csak azért sem engedélyezi, mert további egyszerű és általánosan használt eszközt aligha mondhatunk. A skálás vonalzók és a szögmérők volna talán említendő. Ezeknél az eszközöknél azt is elő kellene írni azonban, hogy beosztásuk milyen sűrű legyen, ami előírásunk egyszerűségét nagyon lerontaná.

A körzővel és vonalzóval megengedett lépések tekintetében nem érheti előírásunkat az a vád, hogy feleslegesen sokat enged meg. A lépések szaporítására pedig legfeljebb azt lehetne javasolni, hogy engedélyezzük a vonalzók ponthoz és körhöz, valamint két körhöz illesztését is. Ezzel kapcsolatban megint csak azt mondhatjuk, hogy a javaslat elfogadása hosszabbá tenné az előírást, viszont nem változtatna azon, hogy szerkesztéssel mi oldható meg.

Összefoglalva megállapíthatjuk, hogy az a szokásos előírás, amelyik a matematika története során kialakult, s amelyet mi is ismertettünk, nem pótolható hasonlóan egyszerű és az általánosan végzett szerkesztések körét ugyanúgy felölelő másik előírással.

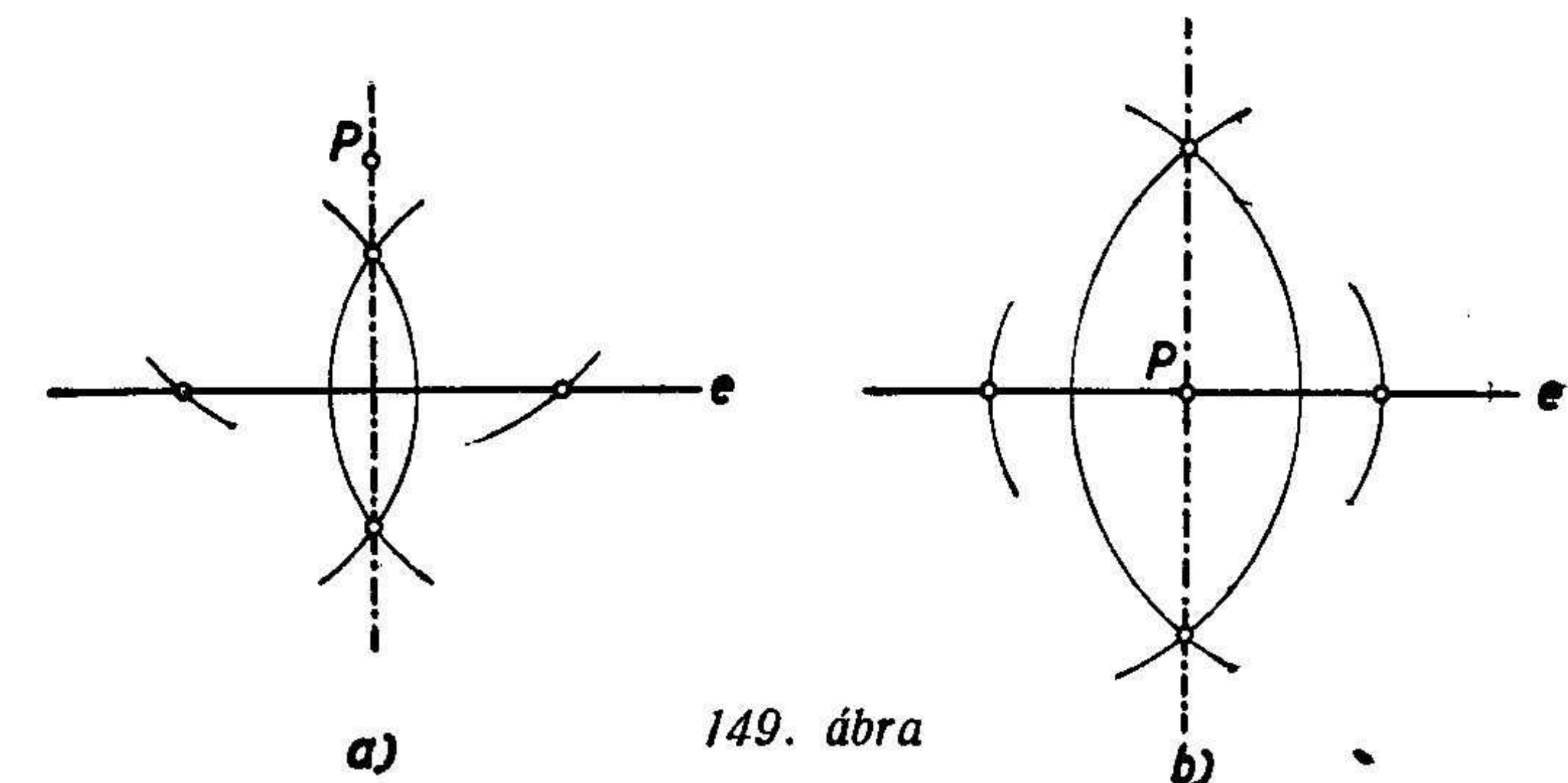
B2 A geometriai szerkesztések elmélete nehezebb algebrai segédeszközökkel dolgozik. Ebbe a könyvbe nem is illeszthetnők be ezért annak bizonyítását, hogy valamelyik feladat szerkesztéssel nem oldható meg. Csak megemlíthetjük, hogy a fentebb közölt négy feladat közül az első azért nem oldható meg, mert π transzcendens szám, a többi három pedig azért, mert számolással végzett megoldásukban köbgyökvonás is fellép.

B3 A szerkesztések elmélete azzal is foglalkozik, hogy mely feladatok oldhatók meg, ha a szerkesztés előírásait másként szabjuk meg. Ilyen más előírás sokféle lehetséges, mi példaképpen kettőt említhetünk: a) csak a körző használatát engedélyezzük, tehát 22.1 felsorolásában az 1. és a 4. lépés nem szerepel (ún. MASCHERONI*-féle szerkesztés); b) egy körvonaladva van a középpontjával együtt, és csak a vonalzók használatát engedélyezzük, tehát itt a 2., 3. és 6. lépés marad el, az 5. pedig csak az adott körre vonatkozik (STEINER-féle* szerkesztés). A szerkesztések elméletének érdekes eredménye, hogy ezzel a két szerkesztésfajtaival az euklideszi szerkesztéssel megoldható feladatok mindegyike megoldható, eltekintve attól, hogy természetesen nem szerkeszthetünk az elsővel egyenest, a másodikokkal pedig kört.

22.3 Az alapvető szerkesztéseket tekintjük át.

Nem szorul magyarázatra az, hogy szakaszokat körzőnyílásba vétellel fel tudunk mérni egy félegyenesre, s hogy így szakaszok összegezését, kivonását és sokszorozását el tudjuk végezni. Hasonlót mondhatunk egy kör ívének adott körponttól való felmérésére, ami szögek összegezésére, kivonására és sokszorozására ad lehetőséget.

A P pontból egy rajta át nem haladó egyenesre úgy szerkeszthetünk merőlegest, hogy elég nagy sugárral P körül kört írunk, majd ennek a körnek az

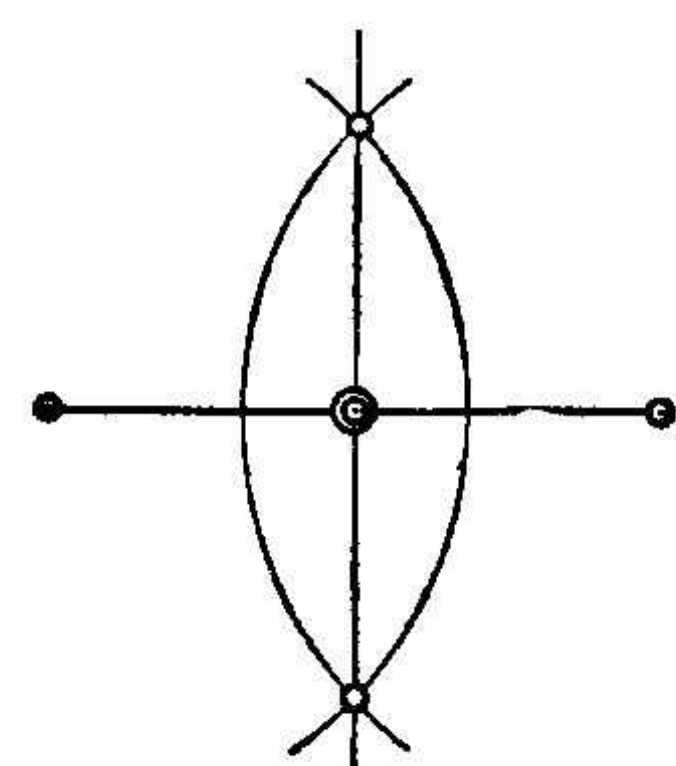


149. ábra

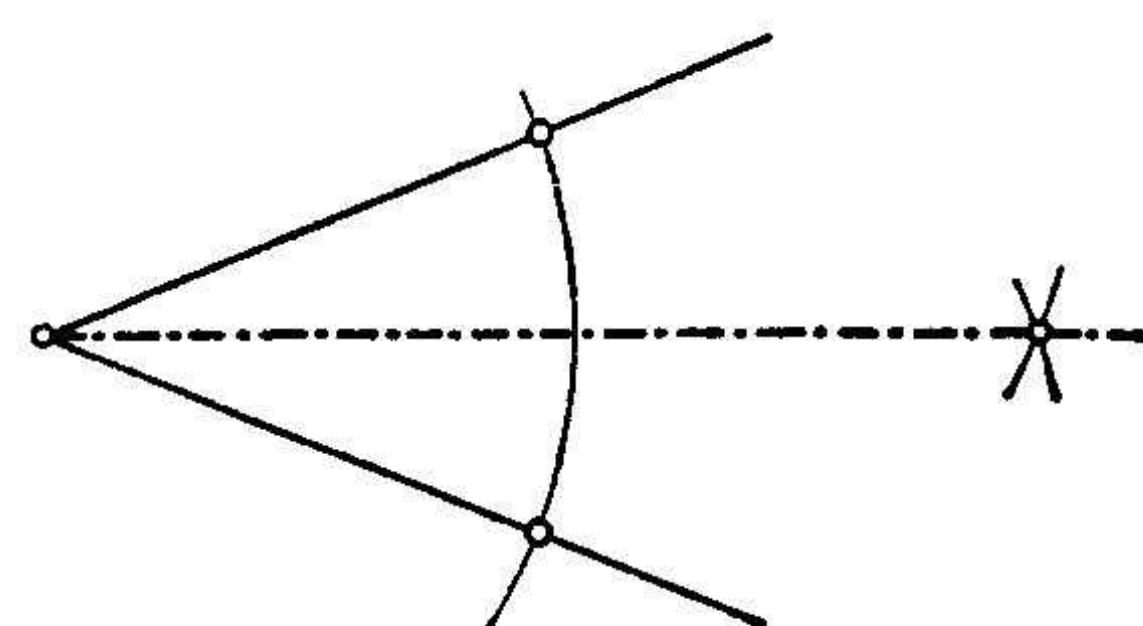
* L. Mascheroni (ejtsd: maszkeróni), 1750–1800, a páduai egyetem tanára. J. Steiner, 1796–1863, svájci születésű, a berlini egyetem tanára.

egyenessel alkotott metszéspontjai körül egyenlő és elég nagy sugárral ismét köröket írunk, és végül e körök P -től különböző metszéspontjainak valamelyikét P -vel összekötjük (149a ábra). Ha az egyenes áthalad a P ponton, akkor ugyanez az előírás vezet a P -ben emelt merőleges megszerkesztéséhez (149b ábra), csak hogy most a másodszor választott sugárnak az elsőnél nagyobbnak kell lennie. Nyomban belátható, hogy ezek a szerkesztések helyes eredményhez vezetnek. Nem okoz gondot az ebben a szakaszban említendő további egyszerű szerkesztések helyességének az indokolása sem. Ha derékszögvonalzót is használunk, akkor a merőleget természetesen egyszerű vonalzóillesztéssel is megszerkeszthetjük.

Egy szakaszt úgy felezhetünk meg, hogy végpontjai körül egyenlő sugarakkal kört írunk, és ezek összekötő egyenesével a szakaszt elmetsszük (150. ábra).



150. ábra



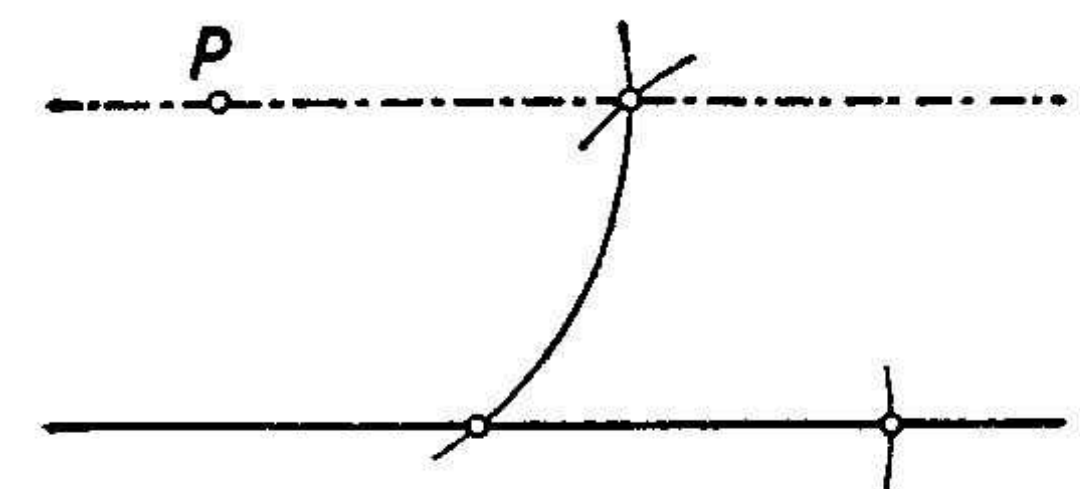
151. ábra

Egy szög felezőjét úgy szerkeszthetjük meg, hogy a szög csúcsa körül írt körrel a szárakat elmetsszük, majd a kapott metszéspontok körül egyenlő és elég nagy sugárral köröket írunk, és végül e köröknek (a szög csúcsától különböző) metszéspontját a csúccsal összekötjük (151. ábra).

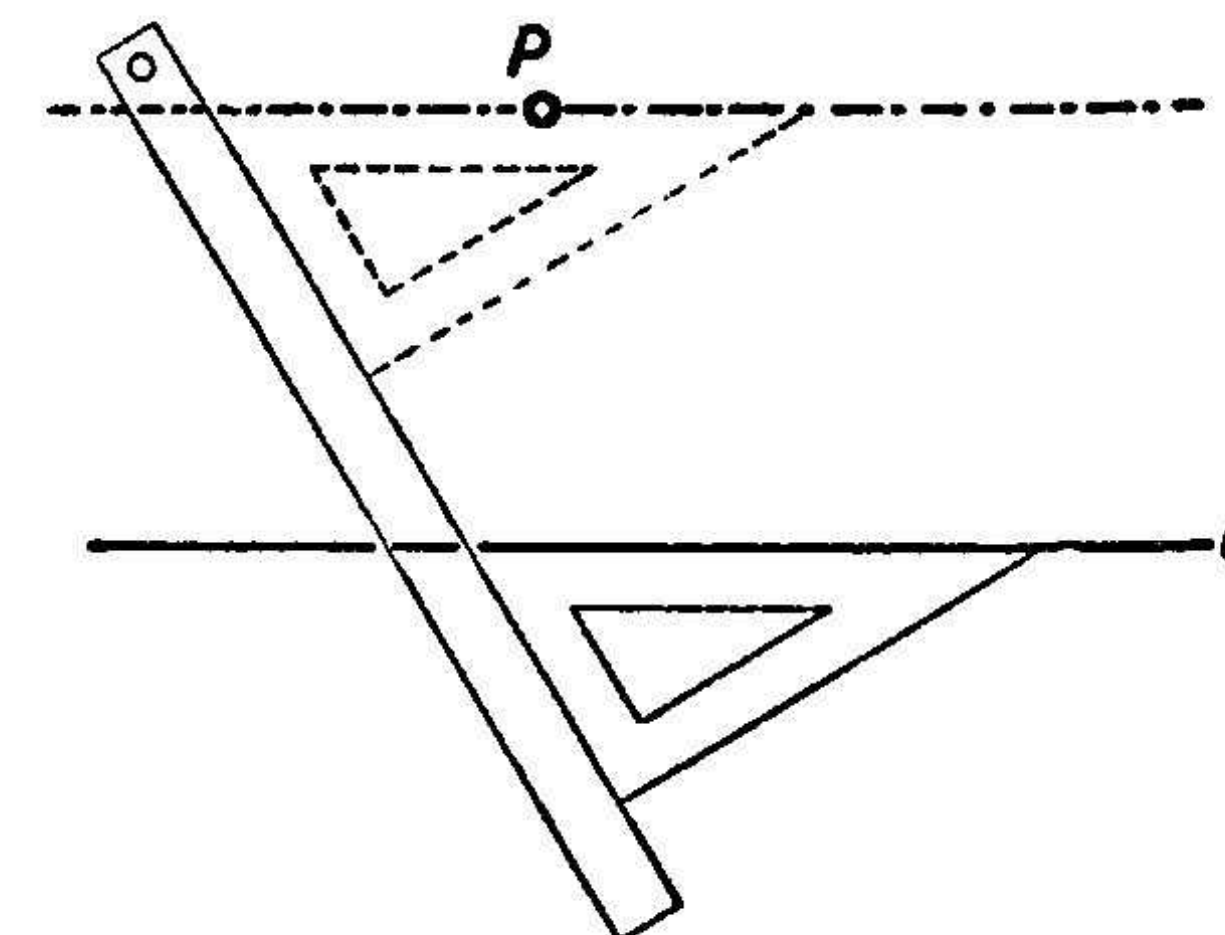
Három adott oldallal úgy szerkesztünk háromszöget, hogy az egyik oldalt felmérjük, ennek végpontjai körül a másik két oldallal mint sugárral kört írunk, és megrajzoljuk az egyik metszéspontjukhoz vezető sugarakat. Két adott oldalból és bezárt szögükből a háromszög egyszerű felméréssel szerkeszthető meg. Ha két oldal és a nagyobbikkal szemközti szög van adva, akkor e szög egyik szárára mérjük fel a kisebbik oldalt, ennek végpontja körül a nagyobbik oldallal mint sugárral kört írunk, és megrajzoljuk ennek a körnek a másik szárral alkotott metszéspontjához vezető sugarát. Egy oldal és azon nyugvó két szög birtokában a háromszöget egyszerű felméréssel szerkeszthetjük meg. Ha egy oldal és két szög van adva, amelyeknek csak egyike nyugszik az adott oldalon, akkor először az adott szögeket 180° -ból levonva a harmadik szöget határozzuk meg, és így a háromszög szerkesztését az előbb említett esetre vezetjük vissza. Három egyenlő oldalból indulva ki szabályos háromszöghöz jutunk, két egyenlő és merőleges oldalból pedig egyenlő szárú derékszögű háromszöghöz.

A P ponton át úgy szerkeszthetünk párhuzamost egy rajta át nem haladó e egyenessel, hogy P -ből e -re merőleget bocsátunk, és erre P -ben merőleget szerkesztünk. Ezt a feladatot úgy is megoldhatjuk, hogy az e egyenest egy elég nagy a sugárral P körül írt körrel elmetsszük, a metszéspontból felmérjük az e egyenesre az a távolságot, ennek végpontja körül ismét a sugárral kört

írunk, majd e körnek és az először rajzolt körnek (nem e -hez tartozó) metszéspontját P -vel összekötjük (152. ábra). Ha háromszögvonalzót is használunk, akkor feladatunkat a következő módon oldhatjuk meg: a háromszögvonalzót egyik élét e -re helyezzük, másik éléhez vonalzót illesztünk, majd a háromszögvonalzót addig csúztatjuk a vonalzó mentén, amíg nem halad át a P ponton az az él, amelyik az e egyenesen volt (153. ábra).

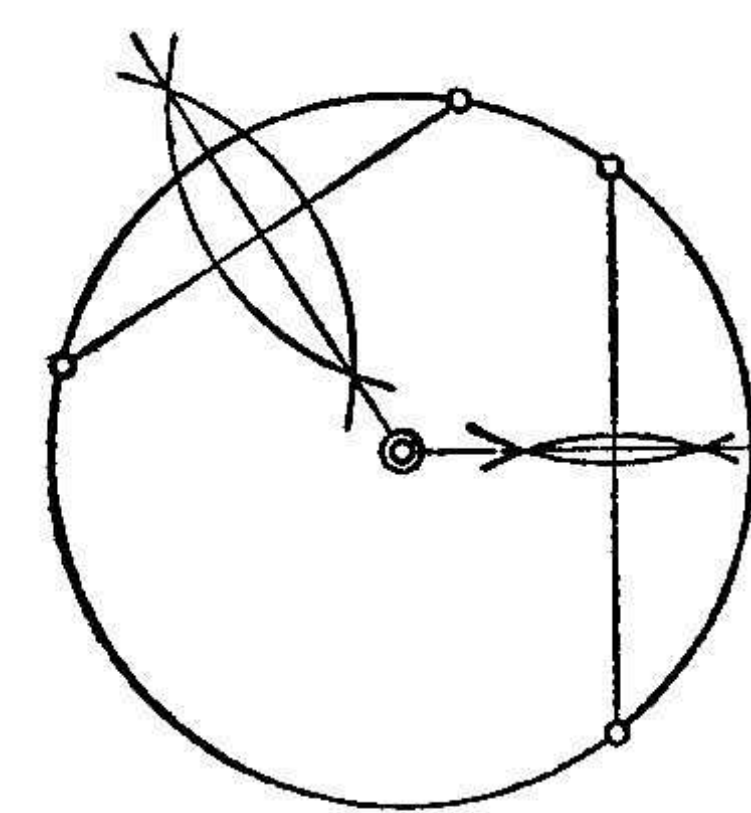


152. ábra

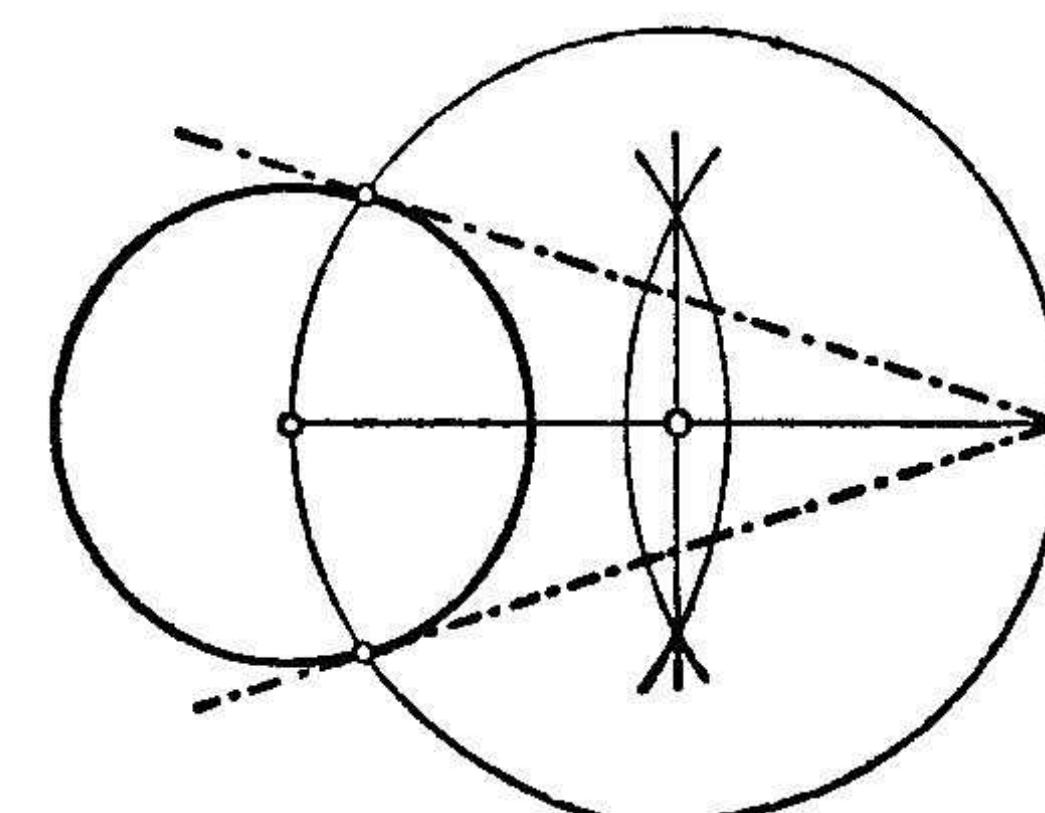


153. ábra

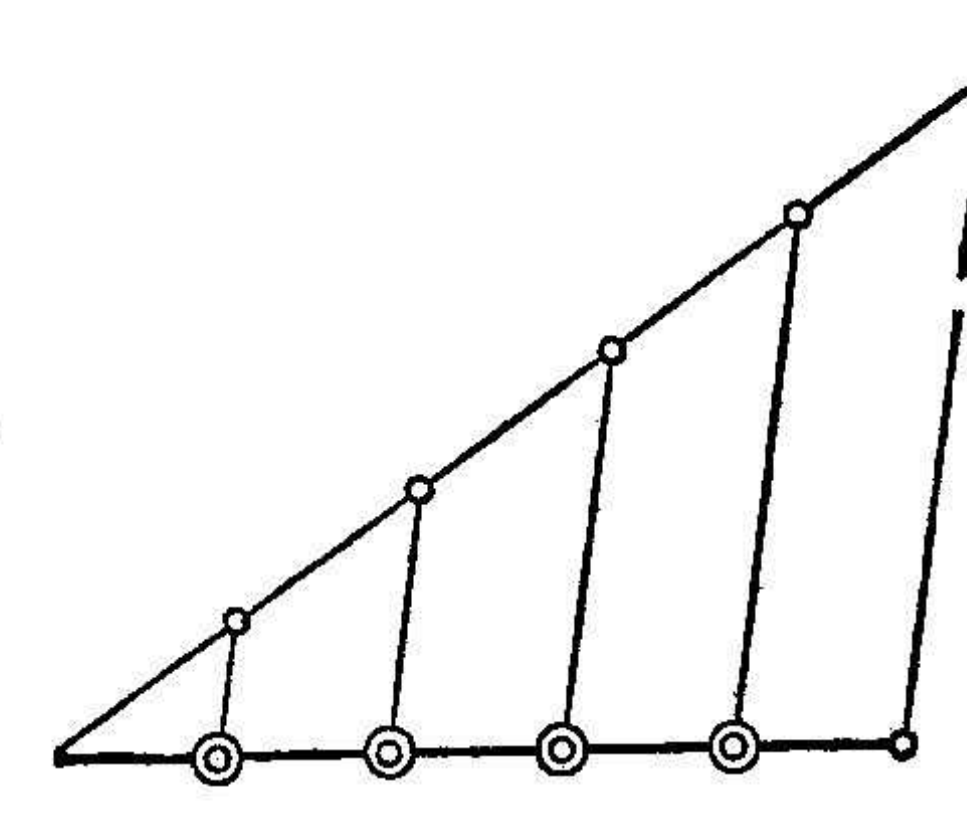
Egy adott kör középpontját két nem párhuzamos húr felezőmerőlegesének metszéspontjaként kaphatjuk meg (154. ábra). Egy külső pontból a körhöz vont érintőt euklideszi szerkesztéssel úgy kaphatjuk meg, hogy az adott pont és a körközepont összekötő szakaszát megfelezzük, e pont körül a szakasz felével mint sugárral kört írunk, és e körnek az adott körrel alkotott metszéspontját összekötjük az adott ponttal (155. ábra). Erre a szerkesztésre vezethetjük vissza két kör közös érintőjének megszerkesztését is, ha ugyanazt tesszük, amit 15.7 tételének bizonyításánál tettünk.



154. ábra



155. ábra



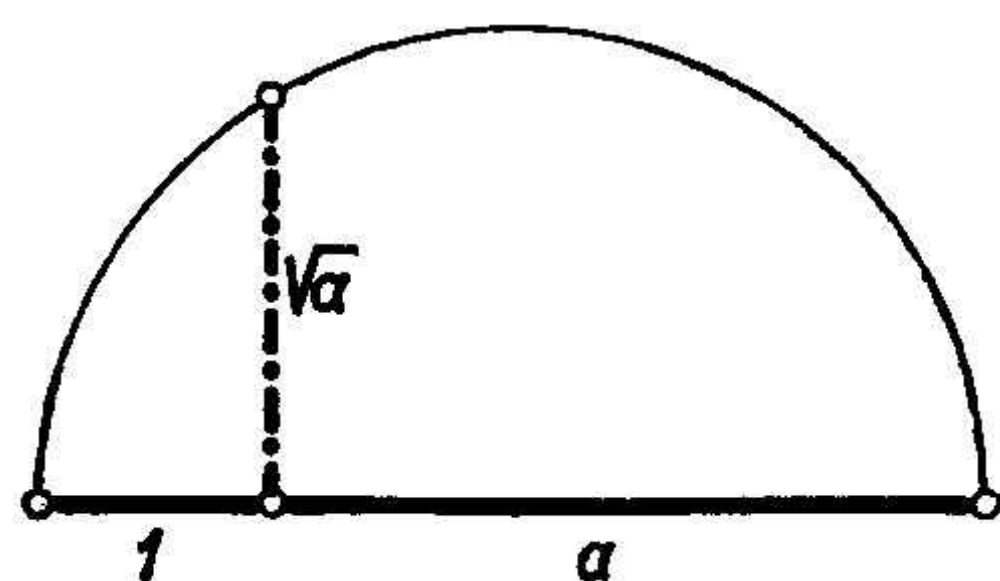
156. ábra

Ha egy szakaszok alkotta aránypár három tagja van adva, a negyedik tagot a párhuzamos szelők tétele alapján könnyen megszerkeszthetjük. Egy adott szakaszt n egyenlő részre úgy oszthatunk fel, hogy a szakasz egyik végpontjából induló és a szakaszhoz szögben hajló félegyenesre n egyenlő szakaszt mérünk fel, az utolsónak végpontját és az adott szakasz végpontját összekötjük, majd ezzel az összekötő egyenessel párhuzamosokat húzunk a felmért szakaszok mindegyikének végpontján át; ezek a párhuzamosok az adott szakaszt a keresett osztópontokban metszik (156. ábra).

Hasonló alakzatok közül a legegyszerűbb a párhuzamosan hasonló alakzatok megszerkesztése. Nem is kell ilyenkor az adott alakzat pontjainak a hasonlósági centrumtól mért távolságát ugyanannyiszoroznunk, mert egy képpontból

kiindulva valamennyihez eljuthatunk párhuzamosok szerkesztésével, hacsak nincs egyetlen egyenesen az alakzat és a hasonlósági centrum is. Itt arra hivatkozunk, hogy ha egy tárgyszakasz egyenese a centrumot nem tartalmazza, akkor az egyik végpont képén át a szakasszal párhuzamosan húzott egyenes a másik végpont vetítő sugarát e végpont képében metszi.

Ha az egységszakasz és egy a hosszúságú szakasz adva van, akkor \sqrt{a} hosszúságú szakaszt úgy szerkeszthetünk, hogy egy egyenesre egymáshoz csatlakozóan felmérjük a két adott szakaszt, megszerkesztjük a két szakasz együtteséhez tartozó Thales-kört, s ezt a két szakasz közös végpontjában emelt merőlegessel elmetsszük; a metszéspont és a közös végpont távolsága \sqrt{a} (157. ábra). Hasonlóképpen járhatunk el akkor is, ha két távolság mértani közép-arányosát akarjuk megszerkeszteni.



157. ábra

A1 Az adott vonalakat vastagon szokás kihúzni, a szerkesztés során bevezetett vonalakat pedig vékony vagy szaggatott vonallal. Összetettebb szerkesztésnél a kész rajzban nem hagyunk meg minden vonalat. Éppen az olyan alapvető szerkesztéseknek a segédvonalait szokás elhagyni, amelyenről ebben a szakaszban szóltunk. A keresett vonalat többnyire (pont-vonalazott) eredményvonallal húzzuk ki, a keresett pontot pedig néha kettős karikával jelöljük meg.

A2 Ugyanazt a feladatot többféle szerkesztéssel is megoldhatjuk. Erre már a párhuzamos szerkesztéséről szólva is példát nyújtottunk. Több szerkesztés közül előnyben részesítjük azt, amelyik kevesebb lépést igényel. Ezt nemcsak az időmegtakarítás, hanem a rajz pontosabb volta is indokolja. A legrövidebb szerkesztések megkeresése külön vizsgálat tárgya lehet. Ilyen vizsgálatnál már lényeges az, hogy milyen eszközöket és lépéseket engedünk meg azok közül, amelyek a szerkesztéssel megoldható feladatok körét nem bővítik (vö. 22.2 B1). Ezt a vonalzósúsztatással végzett párhuzamosszerkesztés példája is mutatja.

A3 Ha a cél a gyakorlatilag megbízható rajz, akkor semmi értelme sincs annak, hogy szabadságunkat az euklideszi korlátozásokkal megkössük. Nem vétek tehát ilyenkor pl. az, hogy körökhöz vonalzóillesztéssel szerkesztünk érintőt, vagy hogy szakaszt skálás vonalzónkat használva osztunk egyenlő részekre. Még az sem vétek, ha a már kész rajzot valamilyen ellenőrzés alapján szemmértékkel helyesbítjük. Ez természetesen csak viszonylag kicsiny eltérések kiigazításánál lehet jogos.

A gyakorlati megbízhatóság kívánalma azonban eddig nem említett megszorításokat is jelent. Megbízhatóbb a rajz, ha a szerkesztés kevesebb lépésből áll, ha a rajz nem túlzottan nagy, de nem is igen kicsiny terjedelmű, ha igen közeli pontokat nem kötünk össze egyenessel, ha a szerkesztés során nagyon kis szöget alkotó vonalak metszéspontja nem szerepel.

22.4 A szabályos sokszögek közül a szabályos háromszög szerkesztését már említettük. Szabályos háromszögekből szabályos hatszöget is összerakhatunk. A szabályos négyszög szerkesztése sem okoz gondot. Itt most a szabályos ötszög és tizszög szerkesztésével foglalkozunk.

Előkészítésként az *aranymetszéssel* (sectio aurea) ismerkedünk meg. Így nevezzük egy szakasznak két szeletre vágását, ha a szeletek kisebbike úgy aránylik a nagyobbikhoz, miként a nagyobbik a teljes szakaszhoz, ha tehát a $p < q$ szeletekre a

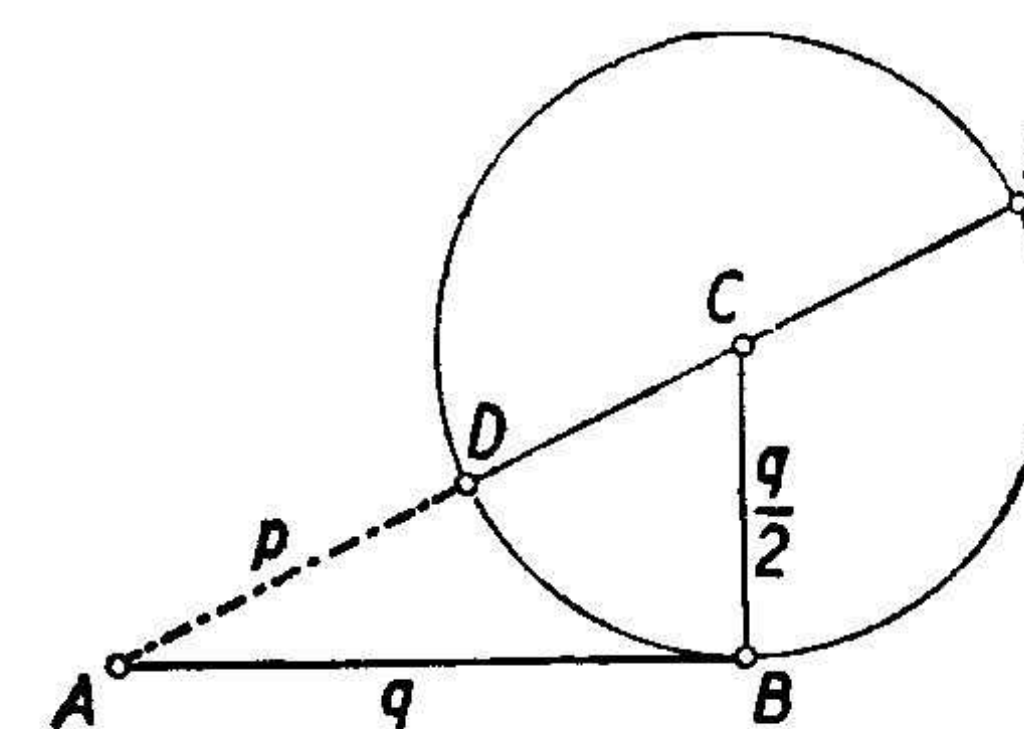
$$p : q = q : (p + q)$$

aránypár teljesül. Egy adott szakasz aranymetszése csak egyféleképpen lehetséges (ha a szeletek sorrendjét nem nézzük), hiszen adott $p+q$ mellett q csökkentésekor p növekszik, és így a fenti aránypár beltagjainak szorzata csökken,

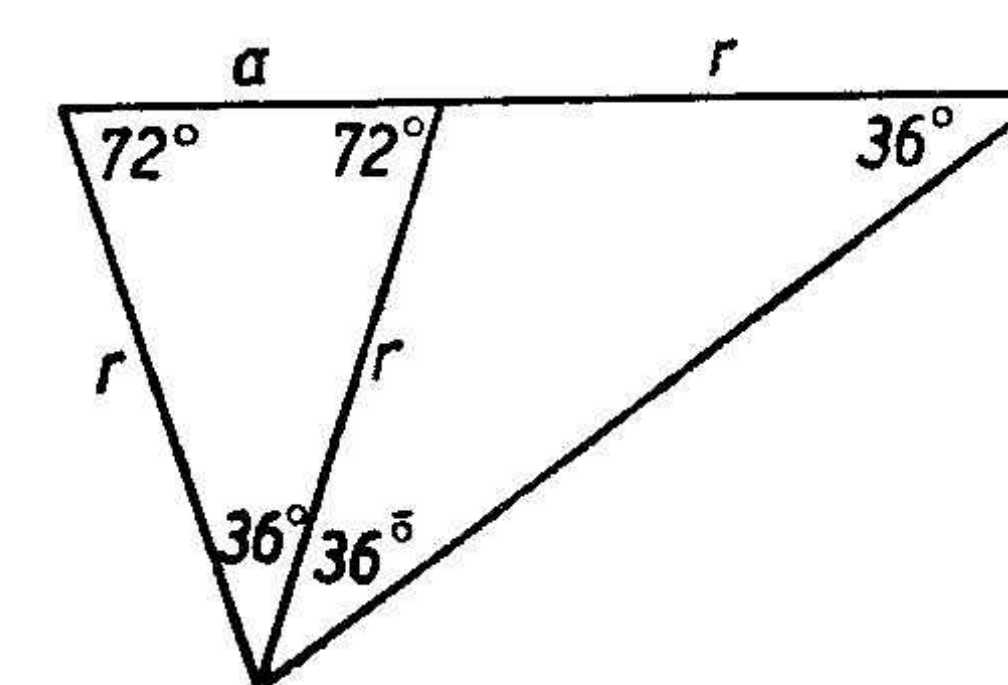
kültagjaié viszont növekszik, azaz q megváltoztatása után az aránypár már nem teljesülhet. Minthogy egy aranymetszésből nagyítással vagy kicsinyítéssel minden szakasz aranymetszéséhez eljuthatunk, elmondhatjuk, hogy az aranymetszésnél szereplő arányok számértéke a szereplő szakaszok hosszától független.

Ha a fenti aránypárban szereplő q adott, akkor a mondottak szerint p is egyértelműen meghatározott. Ehhez a távolsághoz szerkesztéssel a következőképpen juthatunk el (158. ábra): Az $AB = q$ szakaszra B -ben merőlegest állítunk, erre felmérjük a $BC = \frac{q}{2}$ távolságot, majd a C körül $\frac{q}{2}$ sugárral írt

kört az AC egyenessel metsszük; az így adódó, A -hoz közelebb eső D metszéspont adja a keresett $AD = p$ távolságot. Ennek a szerkesztésnek helyessége nyomban belátható, ha kétféleképpen felírjuk az A pontnak a C középpontú körre vonatkozó hatványát. Az így adódó $AB^2 = AD \cdot AE$ egyenlőség a $q^2 = p(p+q)$ összefüggést adja, és ez az aranymetszést biztosító aránypár helyességét mondja ki. A bemutatott szerkesztés módot ad arra, hogy az aranymetszés nagyobbik szeletéből kiindulva kisebbik szeletét megszerkesszük.



158. ábra



159. ábra

Tétel. A szabályos tizszög oldala annak az aranymetszésnek a kisebbik szelete, amelynek a nagyobbik szelete a kör sugara.

E tétel alapján a kör sugarából kiindulva a szabályos tizszög oldalát, és így a körbe írt szabályos tizszöget is megszerkeszthetjük. A tizszög minden második csúcsát összekötve a beírt szabályos ötszöget is megkapjuk.

Bizonyítás. Az r sugarú körbe írt a oldalú szabályos tizszög egy oldala és a végpontjaihoz vezető sugarak alkotta háromszöget tekintjük. E háromszög szögei 36° , 72° , 72° , mert a középpontnál a teljes szög tizede helyezkedik el, és a háromszög egyenlő szárú. Hosszabbítsuk meg a háromszög a alapját r hosszúsággal, és a meghosszabbítás végpontját kössük össze a középponttal (159. ábra). Háromszögünket egy újabb egyenlő szárú háromszöggel egészítettük ki, ennek az alapján 36° -os szögek nyugszanak, mert a szárszögnek mellékszöge 72° . Megállapíthatjuk, hogy a két háromszög együttesen olyan háromszöget alkot, amelynek szögei 36° , 72° , 72° , amely tehát az eredeti háromszöghöz hasonló. E hasonlóságból az oldalak arányára

$$a : r = r : (a + r)$$

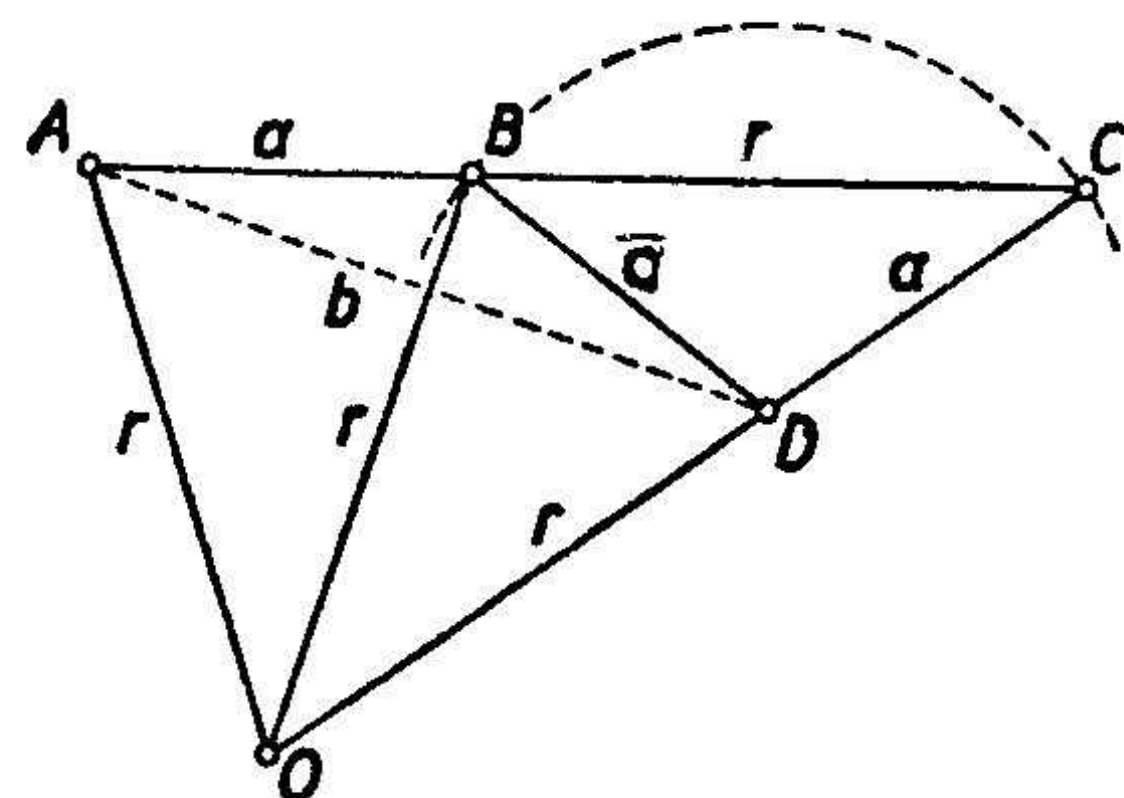
következik, és ez tételünk helyességét mondja ki. —

Tétel. A kör sugarával és a körbe írt szabályos tízszög oldalával mint befogókkal szerkesztett derékszögű háromszög átfogója a körbe írt szabályos ötszög oldala.

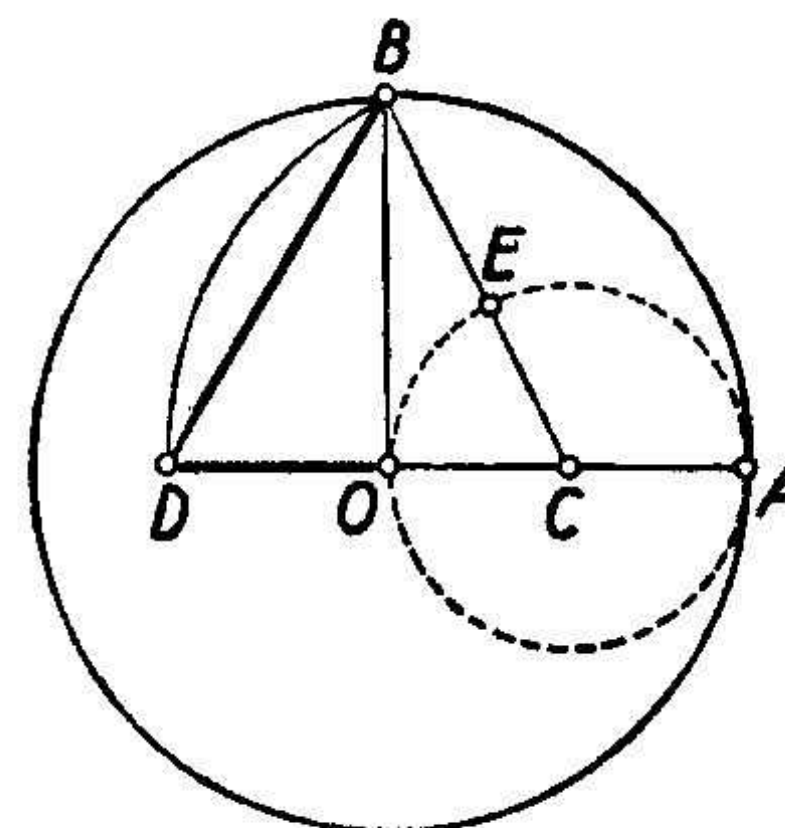
Ez a tétel is módot nyújt a körbe írt szabályos ötszög oldalának megszerkesztésére, ha egyszer a beírt szabályos tízszög oldalát már megszerkesztettük.

Bizonyítás. Tekintsük újból a 159. ábra két háromszögből összetett háromszögét, és tükrözzük az eredeti $OAB\Delta$ -et OB oldalára, úgyhogy ez a kiegészítő $OBC\Delta$ -ön belüli OB helyzetbe jusson (160. ábra). A tükrözés folytán $BD = a$ és $OD = r$. Minthogy az $OAC\Delta$ egyenlő szárú, $OC = a + r$ és $DC = a$. Az $AD = b$ távolság az r sugarú körbe írt szabályos ötszög oldala, mert az OA és OD sugarak szöge 72° . Az A pontnak a D középpontú, a sugarú körre vonatkozó hatványa 18.5 első két tétele szerint

$$b^2 - a^2 = a(a + r).$$



160. ábra



161. ábra

Ebből az előző tétel alapján $b^2 - a^2 = r^2$ adódik, és ez Pythagoras tétele szerint a bizonyítandó állítással azonos. —

A körbe írt szabályos tízszög és ötszög oldalának megszerkesztését egy ábrába tömöríthetjük. A kör merőleges OA , OB sugaraiból indulunk ki (161. ábra). Az OA sugár C felezőpontjának B -től mért távolságát a CO félegyenésre felmérve a CD szakaszt kapjuk; OD adja a beírt szabályos tízszög, BD pedig a beírt szabályos ötszög oldalát. A szerkesztés igazolására az ebben a szakaszban elmondottak után elég arra hivatkoznunk, hogy ha a C körül CO sugárral írt kör a BC szakaszt E -ben metszi, akkor $EB = OD$, mert ezek a szakaszok C körüli elforgatással egymásra fektethetők.

A Már korábban láthattuk, hogy 90° és 60° szerkeszthető szögek. Most megállapíthatjuk, hogy 72° is szerkeszthető. Szögfelezéssel, szögek sokszorozásával, valamint szögek összegének és különbségének megszerkesztésével természetesen további szögekhez is eljuthatunk. Az ebben a szakaszban megismert szerkesztés ilyen módon lehetőséget ad pl. 3° minden egész számú többszörösének megszerkesztésére.

B1 Ha $p < q$ egy aranymetszés szeletei, akkor ugyanezt mondhatjuk, a q és $p + q$, valamint a $q - p$ és p távolságokról is. Ez a két állítás azt mondja ki, hogy ezeknek a távolságoknak az aránya a $p : q$ aránnyal egyenlő. Az első állítás helyességét maga az aranymetszés definiáló aránypár mondja ki. A második viszont ugyanúgy következik abból, hogy p és q egy aranymetszés szeletei, ahogyan ez utóbbi tény belátható, ha tudjuk, hogy q és $p + q$ egy aranymetszés szeletei.

Ezek szerint az 158. ábra szerkesztése egy szakaszból kiindulva e szakasz aranymetszésének nagyobbik szeletéhez vezet el. Első tételünk pedig úgy is szövegezhető, hogy a sugár aranymetszésénél a nagyobbik szelet a beírt szabályos tízszög oldalát adja.

Könnyen meggyőződhetünk arról, hogy az aranymetszés szeleteinek aránya $\frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$.

Első tételünk kimondásakor szólhattunk volna pusztán erről a számarányról.

B2 Ha szabályos m -szöget tudunk szerkeszteni, akkor nyilván szabályos $2m$ -szöget is tudunk, hiszen ehhez szögfelezésre van csak szükség.

Ha m és n relatív prímszámok, és szabályos m -szöget, valamint n -szöget tudunk szerkeszteni, akkor tudunk szerkeszteni szabályos mn -szöget is. Ennek belátása végett arra a számelméleti tételre hivatkozunk, hogy relatív prim m , n számokhoz található p és q egész szám úgy, hogy $pm - qn = 1$ teljesüljön. Ha tehát a körbe írt szabályos n -szög egy oldalához tartozó körív p -szereséből a beírt szabályos m -szög egy oldalához tartozó körív q -szorosát levonjuk, akkor a szabályos mn -szög egy oldalához tartozó körívhez jutunk.

GAUSS* bebizonyította, hogy ha k egész szám, és $n = 2^{2^k} + 1$ prímszám, akkor lehet szabályos n -szöget szerkeszteni. Ez a képlet a $k = 0, 1, 2, 3$ értékekre az $n = 3, 5, 17, 257$ értékeket adja, s ezek prímszámok. Eszerint pl. a szabályos tizenhétyszöget meg lehet szerkeszteni.

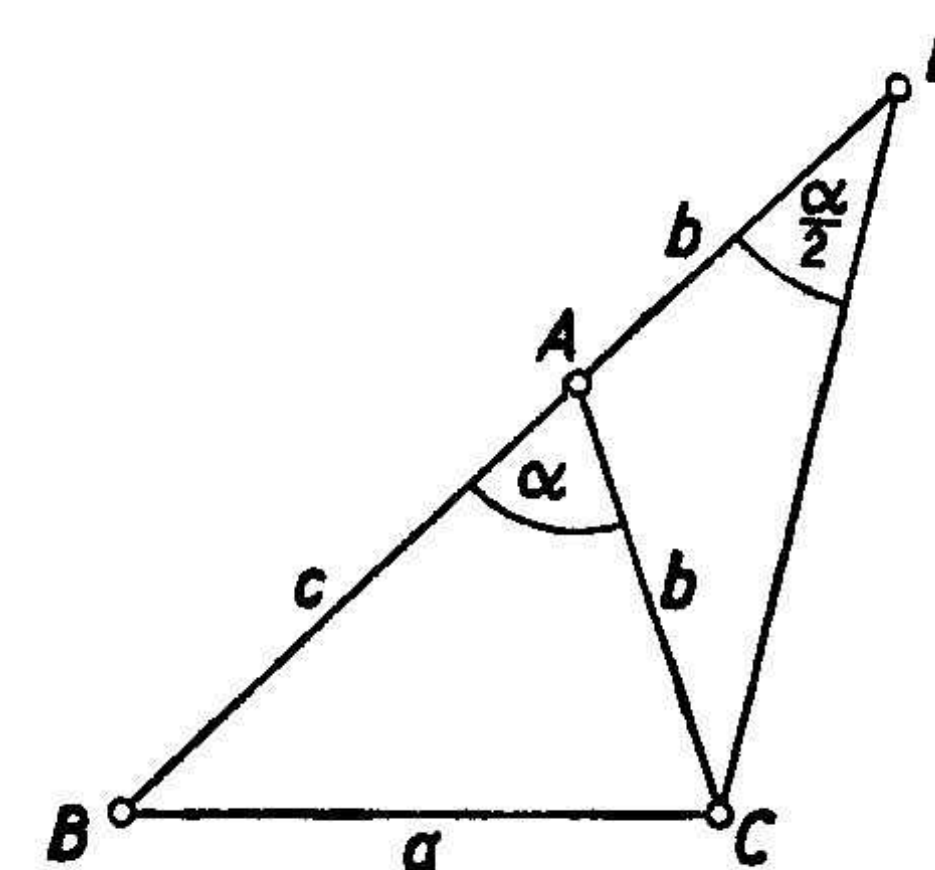
GAUSS bebizonyította azt is, hogy csak azok a szabályos sokszögek szerkeszthetők, amelyekre ez a most elmondottakból következik. Nem szerkeszthető tehát pl. szabályos hét- és kilencszög.

Ezek az eredmények megszövegezhetők természetesen úgy is, hogy szabályos sokszögek szerkesztése helyett arról szólnunk, milyen racionális fokmértékű szögek szerkeszthetők meg. Beszélhetnénk arról is, hogy mely szögek vezethetők be, ha a folytonosságot csak a köraxióma formájában használjuk ki.

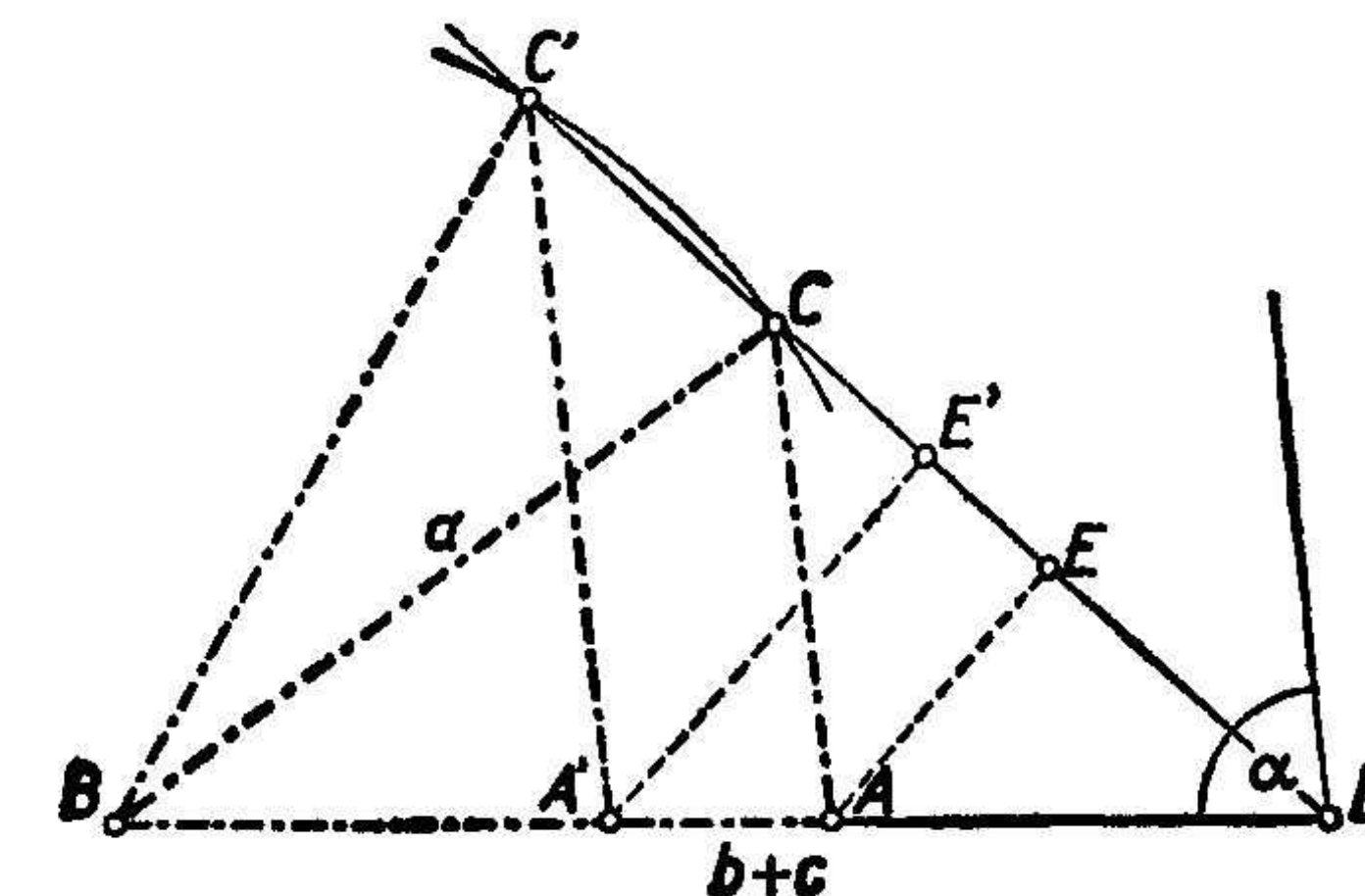
22.5 Összetettebb szerkesztési feladatokról legyen most szó. Le kell nyomban szögeznünk, hogy általános érvényű utasítás ilyen feladatok megoldására nincs. Csak módszereket említhetünk, csak tanácsokat adhatunk. Az egyes feladatok megoldásához egyéni leleményességre van szükség. Mi az alábbiakban egy feladat megoldásait ismertetjük.

Feladat. Szerkesztendő háromszög, ha adva van egy oldala, a szemközti szög és a háromszög kerülete.

Első megoldás. Az $ABC\Delta$ $AB = c$ oldalát meghosszabbítjuk az $AD = AC = b$ szakasszal (162. ábra). Minthogy az $ACD\Delta$ egyenlőszárú, a külső szög tétele szerint az $ADC \sphericalangle$ az $\alpha = BAC \sphericalangle$ felével egyenlő. Az adott $BC = a$ oldal és az $a + b + c$ kerület révén a $BD = a + b + c$ távolság is ismeretes. A $BCD\Delta$ megszerkeszthető tehát, mert két oldala és egy szöge ismert.



162. ábra



163. ábra

Feladatunkat ezek szerint a következőképpen oldhatjuk meg (163. ábra): A $BD = a + b + c$ szakasz D végpontjában felmérjük az α szöget. Ennek szögfelezőjét a B körül a sugárral írt körrel elmetsszük. A kapott C pont adta DC szakasz felezőmerőlegese a BD szakaszt A -ban metszi, és ez meghatározza a keresett $ABC\Delta$ -et.

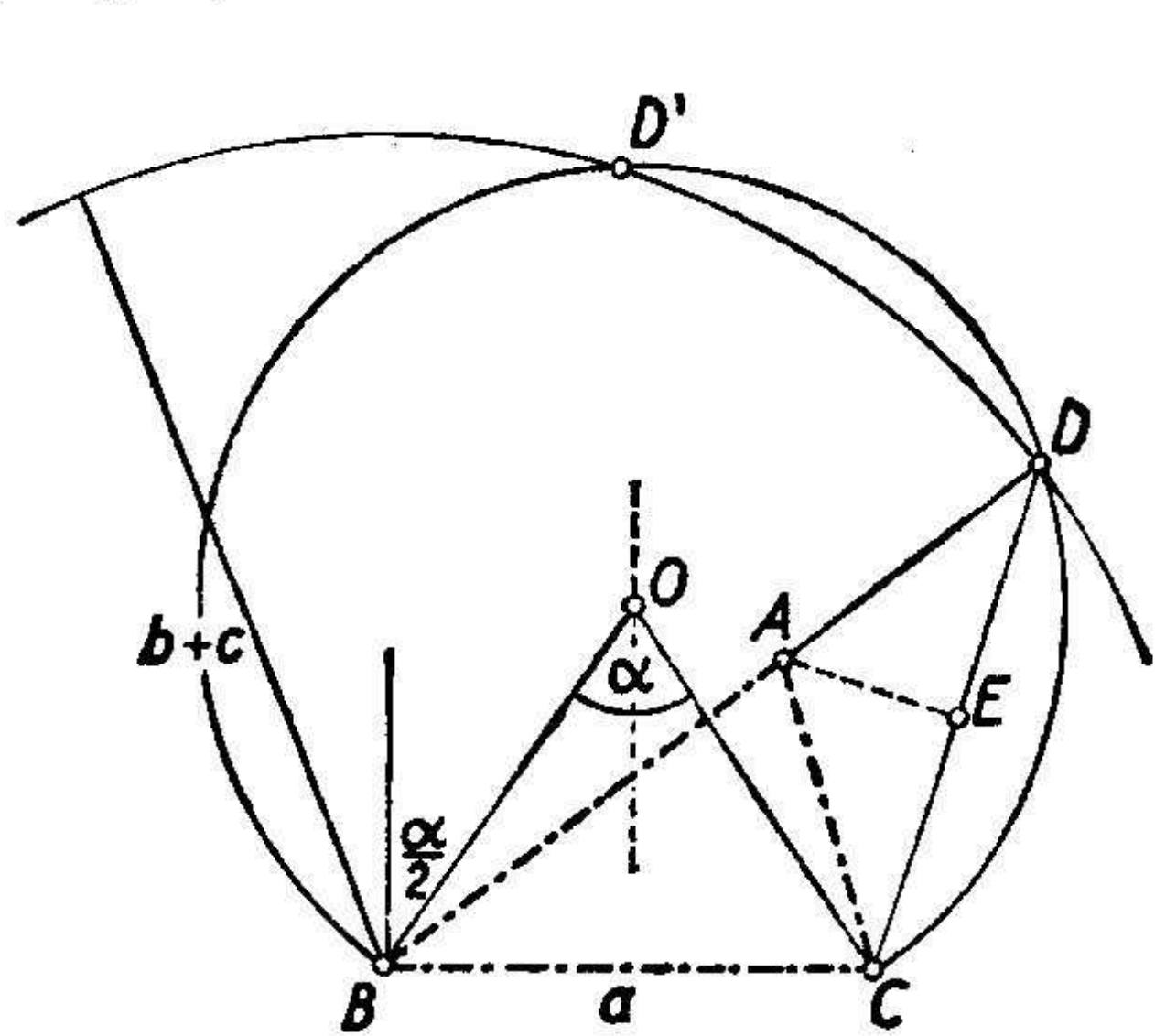
* K. F. Gauss, 1777 – 1855, a göttingai egyetem tanára.

Erről a háromszögről valóban beláthatjuk, hogy benne $BC = a$, hogy továbbá $BAC \angle = \alpha$, mert ez külső szöge az egyenlő szárú $ACD\Delta$ -nek, melynek alapján $\frac{\alpha}{2}$ nagyságú szögek nyugszanak, hogy végül $AC = AD$ miatt háromszögünk kerülete a megadott hosszúsággal egyenlő. —

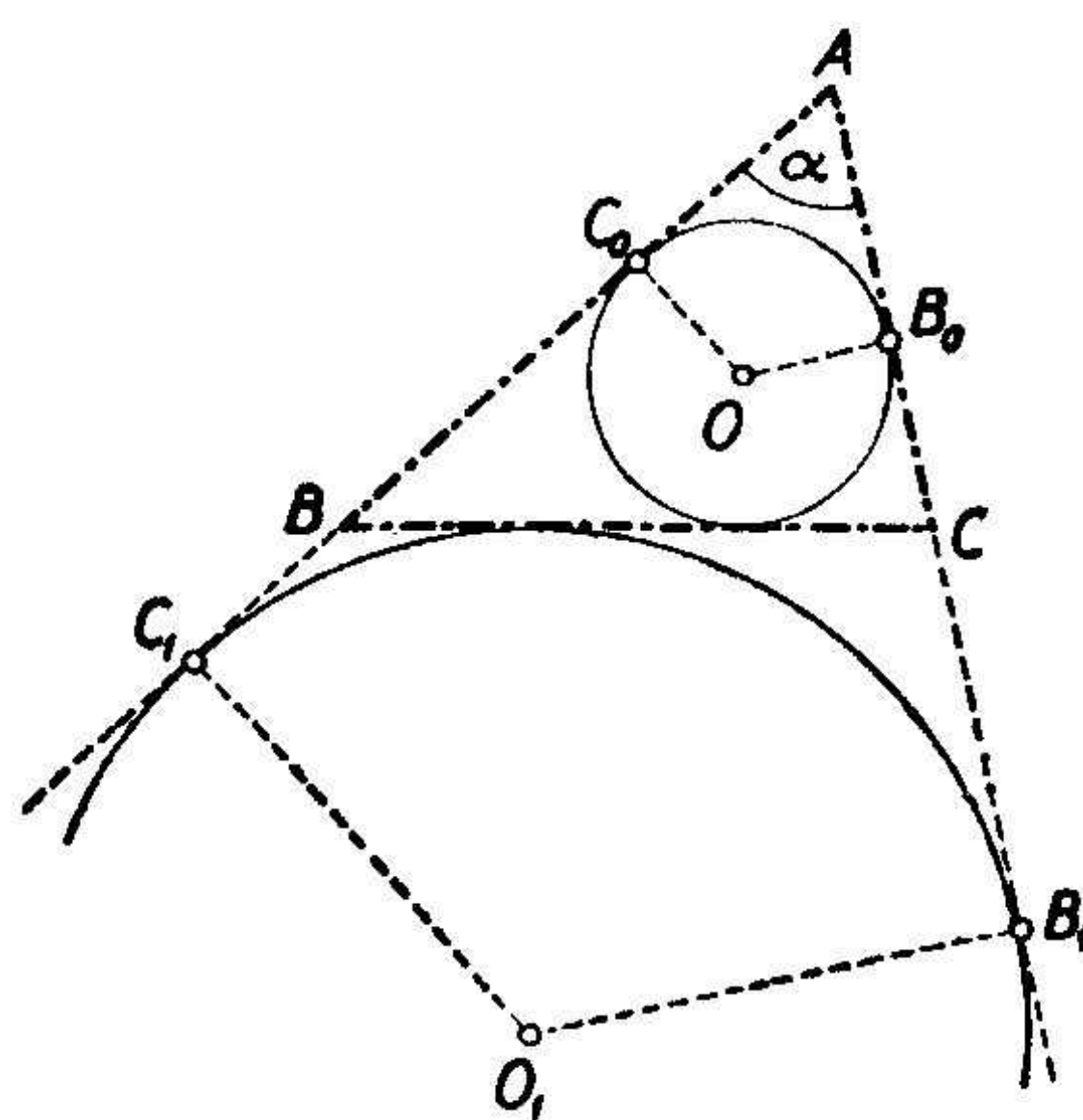
Második megoldás. Újból az első megoldás kezdő megfontolásaiból indulunk ki, de a szerkesztést másként végezzük. Most a $BC = a$ szakaszt mérjük fel, és a D pont helyét keressük.

Minthogy D -ből a BC szakasz $\frac{\alpha}{2}$ szög alatt látható, a D pont rajta van az ilyen tulajdonságú pontok mértani helyén, s ezt a mértani helyet könnyen megszerkeszthetjük. Evégből BC -re B -ben merőlegest állítunk (164. ábra), és az ehhez $\frac{\alpha}{2}$ szög alatt hajló, B -ből induló egyenessel BC felezőmerőlegesét elmetsszük. A kapott O pont körül OB sugárral rajzolt kör megfelelő BC íve lesz a keresett mértani hely a BC egyenes által határolt egyik félsíkban. Ezek után az ismert $BD = b + c$ sugárral B körül kört írunk. Ez a kör a BC körívből a keresett D pontot metszi ki. A háromszög A csúcsát CD felezőmerőlegese metszi ki a BD szakaszból.

Azt, hogy az így kapott $ABC\Delta$ valóban megfelel, ugyanúgy láthatjuk be, mint az első megoldásnál. —



164. ábra



165. ábra

Harmadik megoldás. Tekintsük az $ABC\Delta$ -be írt kört és a BC oldalt kívülről érintő hozzáírt kört. Tudjuk, hogy az utóbbi kör érintési pontjaira $AC_1 = AB_1 = s$ (lásd 21.5). Minthogy s adott, az α szög felmérése után ezt a hozzáírt kört megszerkeszthetjük (165. ábra). Tudjuk azt is, hogy a beírt kör érintési pontjaira $C_0C_1 = B_0B_1 = a$ (lásd 21.5). Minthogy a is adott, a beírt kört is meg tudjuk szerkeszteni. A két kör közös belső érintője háromszögünk harmadik oldalegyenesét adja.

Az idézett tételek alapján megállapítható, hogy az így kapott háromszög valóban megfelel. —

Megvizsgáljuk most, hogy vajon szerkesztéseink mindig végrehajthatók-e, s hogy hány megoldáshoz vezetnek.

Az első megoldás csak akkor hajtható végre ha a B körül a sugárral írt körnek és a megrajzolt szögfelezőnek van közös pontja, ha tehát a nem kisebb a B pont és a szögfelező távolságánál, azaz a $b + c$ átfogójú és $\frac{\alpha}{2}$ szögű derékszögű háromszög e szögével szemközti befogójánál. Kell még, hogy a szerkesztés során CD felezőmerőlegese messe a BD szakaszt. Ez akkor következik, be, ha B a felezőmerőleges által határolt, a C pontot tartalmazó félsíkban van, ha tehát $a < b + c = 2s - a$. Kell tehát, hogy az adatok között fennálljon az $s > a$ összefüggés.

A szerkesztés talált feltételeiről megállapíthatjuk, hogy azoknak teljesülniük kell, ha egyáltalában van megoldás. Az első feltételt illetően ez a 162. ábrából olvasható ki, hiszen a nem lehet rövidebb, mint B távolsága a CD egyenestől. A második feltétel viszont csak a háromszög-egyenlőtlenség teljesülését jelenti.

Ha a megoldások számát vizsgáljuk, megállapíthatjuk, hogy ha az először említett megkötés teljesül, akkor a rajzolt körnek és a szögfelezőnek általában két metszéspontja van. Egy van akkor, ha a kör a szögfelezőt érinti. Ha két metszéspont van, akkor a C, C' metszéspontok a szerkesztés kétféle folytatását írják elő. Meggyőződhetünk azonban arról, hogy a két folytatás végül is egybevágó háromszögekhez vezet. Helyezzük el evégett a már megszerkesztett $ABC\Delta$ -et úgy, hogy C csúcsa B -be, A csúcsa a BD szakaszon A' -be kerüljön, és a háromszög a BD egyenesnek ugyanazon az oldalán helyezkedjék el, ahol az $ABC\Delta$ eredetileg elhelyezkedett. A szerkesztésnek ehhez az $A'C'B\Delta$ -höz is el kell vezetnie, mert ha ebből kiindulva készítjük el a szerkesztés alapjául szolgáló kiegészítést, de most a BA' oldalt hosszabbítjuk meg $A'D = A'C'$ szakasszal, akkor ugyanahhoz a BD szakaszhoz, ugyanahhoz a szögfelezőhöz és ugyanahhoz a körhöz jutunk. Így tehát a kör és a szögfelező második metszéspontjának ezt a háromszöget kell szolgáltatnia. Ezek után elmondhatjuk, hogy ha egybevágó szerkesztési eredményeket nem tekintünk különbözőeknek, akkor a feladatnak egy megoldása van, feltéve, hogy egyáltalában van megoldása.

Összefoglalva a következőket állapíthatjuk meg: Az adatok között fenn kell állnia az $a < s$ összefüggésnek, továbbá teljesülnie kell annak, hogy a ne legyen kisebb a $b + c$ átfogójú, $\frac{\alpha}{2}$ szögű derékszögű háromszög e szögével szemközti befogójánál. Ha ezek a kikötések teljesülnek, akkor a feladatnak egy megoldása van.

Ugyanehhez a következtetéshez a másik két megoldás vizsgálatával is eljuthatnánk. A második megoldásban $b + c$ nem lehet nagyobb a kör átmérőjénél, és CD felezőmerőlegese kell, hogy messe a BD szakaszt. A harmadik megoldásban a B_0 és C_0 pontoknak a szárazon kell lenniük, és a két kör nem metszheti egymást. Nem bocsátkozunk annak részletes vizsgálatába, hogy e kikötések mindkét esetben a már kimondott eredményhez vezetnek.

22.6 Összefoglaljuk, hogy szerkesztési feladatok megoldása során mit tapasztalhatunk. Tapasztalataink a megoldás keresésénél tanácsul szolgálhatnak.

A már megszerkesztve gondolt ábrából indulunk ki. Ezt az ábrát többnyire kiegészítjük, mégpedig úgy, hogy az adatok vagy az adatokból könnyen nyerhető mennyiségek közvetlenül szerepeljenek a kiegészített ábrán. A szerkesztést az ábra, illetve a célszerűen kiegészített ábra vizsgálata (*elemzés, analízis*) készíti elő. Ilyenkor geometriai kapcsolatokat és mennyiségi összefüggéseket keresünk, és vizsgáljuk, van-e az ábrának olyan része, amelynek megszerkesztése nem ütközik nehézségbe. Előfordul, hogy valamilyen *transzformációt* alkalmazunk a teljes ábrára azért, hogy könnyebben megoldható feladathoz jussunk.

Magát a szerkesztést a helyileg is adott alkatelemekből indítjuk el, vagy ha ilyen adat nincs — és többnyire ez az eset fordul elő —, akkor valamelyik alkatelem önkényes felvételével kezdjük meg. A megoldás sikere sokszor függ attól, hogy az ábra megrajzolását melyik alkatelem önkényes felvételével kezdjük el. A már megrajzolt ábrarész kiegészítése során sokszor határozzunk meg valamely további pontot azáltal, hogy ennek a pontnak bizonyos tulajdonságait állapítjuk meg, és a pontot az ilyen tulajdonságú pontok *mértani helyeinek* közös pontjaként kapjuk meg.

Ha a szerkesztést már befejeztük, meg kell gondolnunk, hogy a szerkesztett ábra valóban rendelkezik-e a megadott adatokkal. Ez a meggondolás néha külön okoskodást (*bizonyítás*) igényel. Ha olyan szerkesztést találtunk, amely a kívánt tulajdonságú ábrához vezet, akkor a feladat megoldását befejeztük.

A megoldáshoz hozzáfűzhetjük annak vizsgálatát (*diszkusszió, taglalás*), hogy a szerkesztés végrehajtásához milyen feltételek teljesülése szükséges, és hogy az adatok megválasztásának megfelelően mikor hány megoldás van. Ennél az összeszámlálásnál az egybevágó eredményeket nem tekintjük különbözőeknek. Lényeges, hogy a szerkesztés feltételei minden olyan esetben teljesüljenek, amikor van megoldása a feladatnak. Ha a talált szerkesztés feltételei nem ilyenek, akkor megoldásunk még hiányos.

Ugyanannak a feladatnak többféle megoldása is lehet. Ilyenkor a megoldások közül előnyben részesítjük azt, amelyik egyszerűbb rajzot kíván, és amelyik kevesebb előismeretre épít. Előnyben szoktuk részesíteni az olyan megoldást is, amelyik az ábra analízise és a szerkesztés helyességének bizonyítása során nem kíván számolást, vagy kevesebb számolást kíván.

A A szerkesztési feladatok, éppen mert elmélyedést és egyéni leleményességet kívánnak, a geometriai tudásnak jó ellenőrzői és serkentői. Helyesen teszi a kezdő, ha tudását szerkesztési feladatok önálló megoldásán gyakorolja és tökéletesíti. Nem helyes azonban a túlzás itt sem. Túlzássá válik a szerkesztés, amikor már az a cél, hogy egy ábrát „lehetőleg kellemetlenül megválasztott adatokból” rekonstruáljunk.

B Mi nem azokat a részeket soroltuk fel, amelyekre a szerkesztési feladat megoldásának tagozódnia kell, hanem csak olyan részeket említettünk, amelyek a megoldás leírásában sokszor külön súlyt kapnak. Gondolatsorok mechanikus szabdalása itt sem tesz jó szolgálatot.

Ilyen vonatkozásban először is azt említjük, hogy a diszkusszió a megoldásnak nem szerves része. A lényeges csak az, hogy a feladatot minden lehetséges esetben megoldjuk, s hogy minden megoldást megkapjunk. Hogy ez így van, arról sokszor már maga az az út meggyőző, amelyen a szerkesztéshez eljutottunk.

Az ábra analízise nem választható el mindig magától a szerkesztéstől. Ez az elválasztás sokszor az összefüggő gondolatok mesterkélt elkülönítését eredményezné.

A szerkesztés helyességének bizonyítására sincs mindig szükség. Ez többnyire önként következik a szerkesztés indoklásából. Nincs szükség a szerkesztés helyességének a bizonyítására akkor sem, ha tudjuk, hogy a feladatnak van megoldása, s ha a szerkesztés egyetlen megoldást adott.

HARMADIK FEJEZET

A TÉR ELEMI GEOMETRIÁJA

Ebben a fejezetben a tér geometriájával foglalkozunk, térbeli alakzatokat vizsgálunk, és pedig elemi geometriai módszerrel.

Ez a fejezet a sík elemi geometriájával foglalkozó, előző fejezetnél bonyolultabb, hiszen a síkot is felölelő térben az alakzatok változatossága nagyobb és az elhelyezkedések lehetősége többértű. Fejezetünk mégis rövidebb az előzőnél, főként azért, mert a sík tárgyalásával már előkészítettük a tér tárgyalását is. Egy másik ok az, hogy éppen az alakzatok nagyobb változatossága miatt kevesebb alakzat részletes tárgyalására törekszünk.

A két fejezet tárgyalása azért is lényegesen eltérő, mert itt a 12.2-ben kimondott párhuzamossági axiómát már kezdettől fogva használjuk.

23. § Párhuzamos térelemek

A térelemek viszonylagos elhelyezkedését, majd két egyenes, egy egyenes és egy sík, végül két sík párhuzamosságát tárgyaljuk.

23.1 Két térelem viszonylagos elhelyezkedésének lehetőségeit tekintjük át.

Pont és egyenes, valamint pont és sík esetében csak azt említhetjük, hogy a pont vagy illeszkedik a másik térelemhez, vagy nem. Egymáshoz nem illeszkedő pont és egyenes egyetlen síkot határoz meg, hiszen a pont az egyenes két pontjával együtt azt az egyetlen síkot szolgáltatja, amelyik a pontot is és az egyenest is tartalmazza.

Tudjuk már, hogy két egyenesnek legfeljebb egy közös pontja van. Ha van közös pontjuk (metsző egyenesek), akkor egy síkot határoznak meg, hiszen metszéspontjuk és egy-egy pontjuk azt az egyetlen síkot szolgáltatja, amelyik tartalmazza a két egyenest. Ha két egyenesnek nincs közös pontja, akkor vagy egy síkban vannak, tehát párhuzamosak (vö. 12.1), vagy pedig nincsenek egy síkban, azaz *kitérők* (torz egyenesek). Két egyenes tehát lehet metsző, párhuzamos vagy kitérő.

Tudjuk, hogy ha egy egyenesnek és egy síknak egynél több közös pontja van, akkor a sík az egész egyenest tartalmazza, az egyenes és a sík illeszkedik. Ha az egyenesnek és síknak egy közös pontja van, azt mondjuk, hogy az egyenes *döfi* (metszi) a síkot, vagy hogy a sík *metszi* az egyenest, és közös pontjukat *dőféspontnak* vagy *metszéspontnak* nevezzük. Ha egy egyenesnek és egy síknak nincs közös pontja, akkor az egyenes és a sík *párhuzamos*. Egy egyenes és egy sík lehet tehát illeszkedő, metsző vagy párhuzamos.