

Chapitre 3

Stabilité des points d'équilibre

SOMMAIRE DU CHAPITRE

1	Notions de stabilité	2
1.	Position du problème	2
2.	Définitions	2
3.	Cas particulier des systèmes scalaires ($n=1$)	3
4.	Fonction définie positive	4
5.	Théorème de stabilité de Lyapunov	5
6.	Méthode de recherche d'une fonction de Lyapunov : Méthode du gradient variable	9
7.	Région d'attraction et fonction de Lyapunov	11
1.	Exemple :	12
	Théorème de Babashin Krasovskii	13
8.	Théorème d'instabilité	14
9.	Principe d'invariance	15
1.	Ensemble invariant	15
2.	Ensemble d'annulation de la fonction de Lyapunov	16
3.	Ennoncée du théorème d'invariance de Lassale	16

1 Notions de stabilité

1. Position du problème

Soit un système non linéaire :

$$\dot{x} = f(x) ,$$

La fonction f est une fonction de type Lipchitz sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$

Supposons que le

Le point $\bar{x} \in D$ est un point d'équilibre, c.a.d : $f(\bar{x}) = 0$.

On veut étudier et caractériser la stabilité de ce point d'équilibre.

Pour simplifier, l'étude de la stabilité est effectuée en considérant que le point d'équilibre est situé à l'origine : $\bar{x} = 0$. L'étude reste valable pour un autre point d'équilibre quelconque \bar{x} : il suffit d'introduire un changement de coordonnées de la forme : $y = x - \bar{x}$. Ce changement de coordonnée transforme le point d'équilibre à l'origine, de la façon suivante :

$$\dot{y} = \dot{x} = f(y + \bar{x}) = g(y) \text{ avec } g(y) = 0$$

2. Définitions

Soit $x=0$ un point d'équilibre d'un système $\dot{x} = f(x)$

Stabilité : Un point d'équilibre est stable si pour chaque nombre réel $\varepsilon > 0$, il existe un nombre réel $\delta > 0$, qui dépend de ε , tel que :

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0$$

La stabilité d'un point d'équilibre peut être traduite par le fait que toutes les solutions débutant dans le voisinage de ce point restent dans ce voisinage.

Instabilité Un point d'équilibre est instable s'il n'est pas stable

Stabilité asymptotique : Un point d'équilibre est asymptotiquement stable si 'il est stable, et si δ peut être choisi de sorte que :

$$\|x(0)\| < \delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

La stabilité asymptotique peut être traduite par le fait que toutes les solutions débutant dans le voisinage de ce point non seulement restent dans ce voisinage, mais converge aussi vers le point d'équilibre, lorsque le temps tend vers l'infini.

Un cas particulier de la stabilité asymptotique est la **stabilité exponentielle**. La stabilité d'un point d'équilibre est exponentielle si le rapport de convergence au point d'équilibre est exponentiel.

Stabilité dans le sens de Lyapunov : Un point d'équilibre est stable dans le sens de Lyapunov si la trajectoire du système peut être gardé arbitrairement proche du point d'équilibre, en débutant suffisamment proche de ce point d'équilibre.

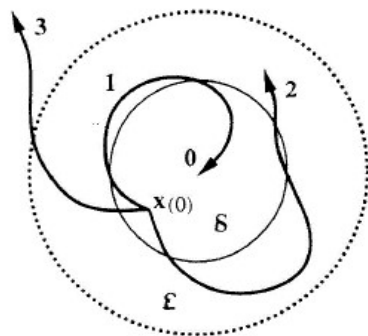
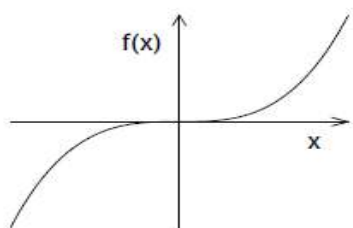


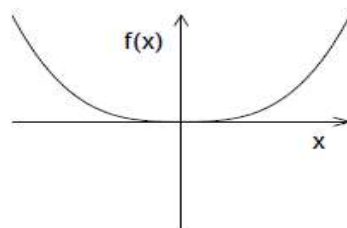
Fig3.1 : 1. Stabilité asymptotique

2. Stabilité marginale

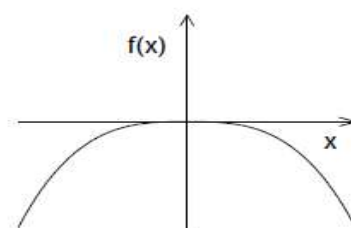
3. Instabilité



Instable

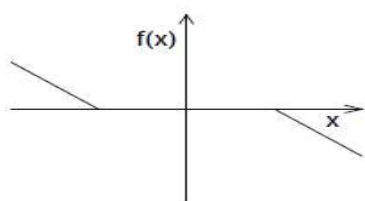


Instable

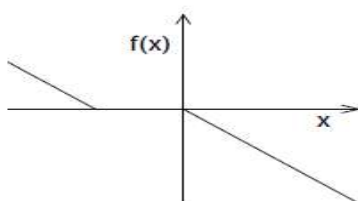


Instable

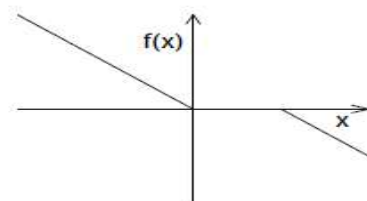
Fig.3.2. Cas d'un point d'équilibre (origine) instable.



Stable



Stable



Stable

Fig.3.3. Cas d'un point d'équilibre stable

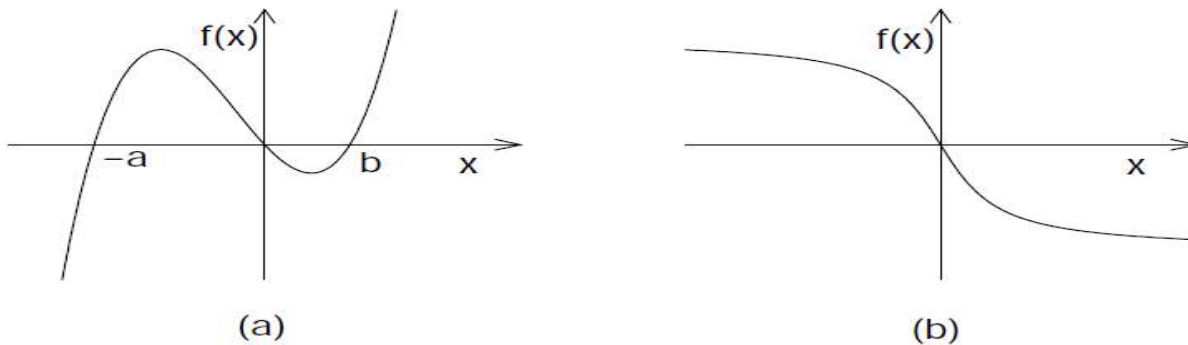
Stabilité marginale : Un point d'équilibre est marginalement stable s'il est stable dans le sens de Lyapunov, mais n'est pas asymptotiquement stable.

$$\bar{x} \neq 0$$

3. Cas particulier des systèmes scalaires ($n=1$)

Le comportement de $x(t)$ dans le voisinage du point d'équilibre (l'origine) peut être déterminé en examinant le signe de $f(x)$.

Les exigences de stabilité (sur ε et δ) ne peuvent pas être vérifiées si $x.f(x) > 0$ à droite ou à gauche de l'origine (fig.3.2).



Asymptotiquement stable

Globalement asymptotiquement stable

Fig.3.4. Cas d'un point d'équilibre asymptotiquement stable

Le point d'équilibre (l'origine) est stable si et seulement si $x.f(x) \leq 0$ dans certain voisinage de l'origine (fig.3.3).

Le point d'équilibre (l'origine) est asymptotiquement stable si et seulement si $x.f(x) < 0$ dans certain voisinage de l'origine (fig.3.4.a).

Région d'attraction

La région d'attraction (appelée aussi région de stabilité asymptotique) est l'ensemble des points x_0 dans le domaine D (domaine de définition de la fonction f), pour lequel la solution de l'équation à conditions initiales :

$$\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$$

est définie pour tout instant $t \geq 0$, et converge vers l'origine (le point d'équilibre) lorsque le temps t tend vers l'infini.

Stabilité asymptotique globale :

L'origine est globalement asymptotiquement stable si la région d'attraction est l'ensemble de l'espace euclidienne \mathcal{H}^n . (fig.3.4.b pour le cas où $n=1$).

4. Fonction définie positive

Soit V une fonction $V : D \rightarrow \mathbb{R}$, avec $D \subset \mathcal{H}^n$.

- ❖ La fonction V est **définie positive** si $V(0) = 0$ et $V(x) > 0, \forall x > 0$.
- ❖ La fonction V est **semi définie positive** si $V(0) = 0$ et $V(x) \geq 0, \forall x > 0$.
- ❖ La fonction V est **définie négative** si la fonction $-V(x)$ est définie positive.

❖ La fonction V est **semi définie négative** si la fonction $-V(x)$ est semi définie positive.

Cas particulier : les fonctions quadratique

Les fonctions quadratiques s'écrivent sous la forme : $V(x) = x^T P x$,

avec P une matrice réelle symétrique : $P^T = P$

La forme détaillée de $V(x)$:

$$V(x) = x^T P x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j p_{ij}$$

La fonction quadratique V est définie (semi) positive si et seulement si les valeurs propres de la matrice P sont positives (non négatives).

Les valeurs propre de la matrice P sont positives (non négatives) si les mineurs principaux de la matrice P sont positifs (non négatifs).

Exemple :

$$\begin{aligned} V(x) &= ax_1^2 + 2x_1x_3 + ax_2^2 + 4x_2x_3 + ax_3^2 \\ &= \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^T P x \end{aligned}$$

Les mineurs principaux de la matrice P sont :

$$a; \quad \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{vmatrix} = a^2; \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = a^3 - a - 4a^2 = a(a^2 - 5)$$

La fonction $V(x)$ est semi définie positive si $a \geq \sqrt{5}$ $V(x)$ est définie positive si $a > \sqrt{5}$.

5. Théorème de stabilité de Lyapunov

Soit $x=0$ un point d'équilibre d'un système $\dot{x} = f(x)$, contenue dans un domaine $D \subset \mathbb{R}^n$.

Soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable. Si la fonction V vérifie les conditions suivantes :

1. $V(0) = 0$;
2. $V(x) > 0, \forall x \in D - \{0\}$
3. $\dot{V}(x) \leq 0, \forall x \in D$

alors le point d'équilibre $x=0$ est **stable**.

De plus, si: $\dot{V}(x) < 0, \forall x \in D$, le point d'équilibre $x=0$ est **asymptotiquement stable**.

La fonction $V(x)$ est appelée **fonction de Lyapunov**.

La surface $V(x)=C$ avec $C>0$, est appelée **surface de Lyapunov** ou **niveau de surface** (fig.3.5).

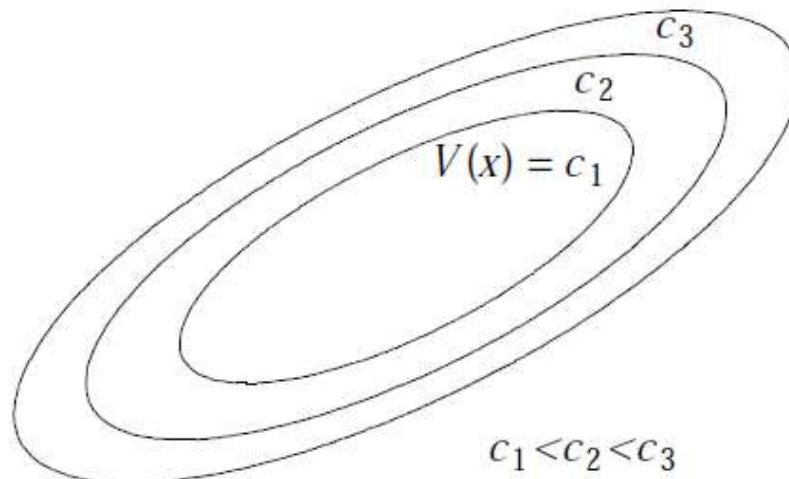


Fig.3.5. Surfaces de Lyapunov pour une fonction de Lyapunov

Si $\dot{V}(x) \leq 0$,

lorsqu'une trajectoire traverse une surface de Lyapunov $V(x)=c$, elle se déplace à l'intérieur de l'ensemble $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}$

Si $\dot{V}(x) < 0$,

La trajectoire se déplace d'une surface de niveau supérieur vers une surface de niveau c plus faible jusqu'à ce que $V(x)=c$ se réduit à zéro au fil du temps.

Exemple 1.

Soit le système $\dot{x} = -g(x)$, où :

- $g(x)$ est une fonction de type Lipchitz dans un intervalle $(-a, a)$;
- $g(0)=0$;
- $xg(x)>0, \forall x \in (-a,a)$ et $x \neq 0$.

Etudier la stabilité du point d'équilibre de ce système.

Solution 1

L'origine est un point d'équilibre de ce système.

En commençant de chacun des deux côtés de l'origine, la trajectoire de x converge toujours vers l'origine, à cause du signe de la dérivée de x .

Ainsi, l'origine est asymptotiquement stable.

Solution 2, en utilisant le théorème de Lyapunov.

On considère la fonction $V(x) = \int_0^x g(y) dy$ définie sur le domaine $D = (-a, a)$.

La fonction $V(x)$ est continuellement différentiable ;

$$V(0) = 0 ;$$

$$V(x) > 0, \forall x \neq 0 ;$$

$$\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x}(-g(x)) = -g^2(x) < 0, \quad \forall x \in D - \{0\}$$

$V(x)$ est alors une fonction de Lyapunov, et par conséquent l'origine est asymptotiquement stable.

Exemple 2. Pendule sans frottement

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1\end{aligned}$$

Ce système a un point d'équilibre à l'origine : $(0,0)$. Est-il stable ?

On propose la fonction de Lyapunov comme étant la fonction de l'énergie du pendule :

$$V(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

- $V(x)=0$, et V est définie positive sur le domaine $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$.
- $\dot{V} = \frac{g}{l}x_1 \sin x_1 + x_2\dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 = 0$

La fonction V vérifie les conditions du théorème de Lyapunov, et par conséquent l'origine est un point d'équilibre stable.

Exemple 3. Pendule avec frottement

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{g}{l} \sin x_1 - \frac{k}{m}x_2\end{aligned}$$

Ce système a un point d'équilibre à l'origine : (0,0). Est-il stable ?

On propose la fonction de Lyapunov comme étant la fonction de l'énergie du pendule :

$$V(x) = \frac{g}{l}(1 - \cos x_1) + \frac{1}{2}x_2^2$$

- $V(x)=0$, et V est définie positive sur le domaine $-2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$.
- $\dot{V} = \frac{g}{l}\dot{x}_1 \sin x_1 + x_2 \dot{x}_2 = \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}x_2 \sin x_1 - \frac{k}{m}x_2^2 = -\frac{k}{m}x_2^2$

$\dot{V}(x) = 0$ pour les points $(x_1, 0) \forall x$ dans l'intervalle $2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$.

$\dot{V}(x) < 0$ pour les points $(x_1, x_2) \forall x$ dans l'intervalle $2\pi \leq x_1 \leq 2\pi$ et $x_2 \neq 0$.

Ainsi, $V \leq 0$.

On conclue que l'origine est stable.

Mais l'étude des portraits de phases a montré que l'origine du système modélisant le pendule avec frottement est asymptotiquement stable !

Choisissons une autre fonction de V :

$$V(x) = \frac{1}{2}x^T P x + \frac{g}{l}(1 - \cos x_1)$$

avec: $P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$

Pour que la fonction V soit une fonction de Lyapunov, il faut que Les mineurs principaux de la matrice P soit positifs :

$$p_{11} > 0, \quad p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

La dérivée de la fonction V :

$$\begin{aligned} \dot{V} &= \frac{1}{2}(\dot{x}^T P x + x^T P \dot{x}) + \frac{g}{l}\dot{x}_1 \sin x_1 \\ &= \frac{g}{l}(1 - p_{22})x_2 \sin x_1 - \frac{g}{l}p_{12}x_1 \sin x_1 + \left(p_{11} - p_{12}\frac{k}{m}\right)x_1x_2 + \left(p_{12} - p_{22}\frac{k}{m}\right)x_2^2 \end{aligned}$$

Pour que la fonction V soit une fonction de Lyapunov, il faut que la dérivée de V soit négative. Pour imposer une dérivée négative :

- On élimine les facteurs des termes à signe indéfini ($x_2 \sin x_1$ et x_1x_2) dans l'expression de la dérivée :

$$p_{22} = 1; \quad p_{11} = \frac{k}{m}p_{12}$$

- On impose un facteur négatif au dernier terme de la dérivée :

$$\left(p_{12} - p_{22} \frac{k}{m}\right) x_2^2 < 0 \Rightarrow p_{12} < p_{22} \frac{k}{m} \Rightarrow 0 < p_{12} < \frac{k}{m}$$

Pour que ce terme soit strictement négatif, on prend par exemple $p_{12} = \frac{1}{2} \frac{k}{m}$

La dérivée se réduit alors à :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \frac{g}{l} \frac{k}{m} x_1 \sin x_1 - \frac{1}{2} \frac{k}{m} x_2^2$$

On a $x_1 \sin x_1 > 0, \forall 0 < |x_1| < \pi$

Pour assurer une dérivée négative, on choisit alors un domaine de définition de la fonction V par :

$$D = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| < \pi\}$$

Ainsi la fonction V définie sur le domaine D est une fonction de type Lyapunov. Par conséquence, suivant le théorème de Lyapunov, l'origine est asymptotiquement stable.

On déduit à travers cet exemple que si une fonction V ne satisfait pas les conditions du théorème de Lyapunov, cela ne signifie pas que le point d'équilibre est instable. En effet, on peut trouver d'autre fonction qui vérifie les conditions de la stabilité.

Autrement dit : les conditions du théorème de Lyapunov sont suffisantes mais pas nécessaires pour la stabilité.

6. Méthode de recherche d'une fonction de Lyapunov : Méthode du gradient variable

L'idée de cette méthode est de procéder en retour : Etudier une expression de la dérivée \dot{V} puis revenir pour choisir les paramètres de la fonction $V(x)$ qui rend $\dot{V}(x) < 0$ ou $\dot{V}(x) \leq 0$.

On rappelle que le gradient d'une fonction $V(x)$ suivant x est exprimé par : $g(x) = \nabla_x V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^T$

On peut écrire : $\dot{V}(x) = \frac{\partial V}{\partial x} f = g^T f$

$g(x)$ est choisi de sorte qu'elle soit le gradient d'une fonction V définie positive, et qu'elle rend la dérivée \dot{V} inférieure à zéro

$g(x)$ est le gradient d'une fonction scalaire si la matrice Jacobéenne $\frac{\partial g}{\partial x}$ est symétrique :

$$\frac{\partial g_i}{\partial x_j} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} = \forall i, j = 1, \dots, n$$

On procède ainsi :

- On choisit $g(x)$ de sorte que $g^T(x)f(x)$ soit définie négative ;

- On calcule $V(x)$ par l'intégrale suivante :

$$V(x) = \int_0^x g(y) dy = \int_0^x \sum_{i=1}^n g_i(y) dy_i$$

L'intégrale peut être calculé selon n'importe quelle trajectoire liant l'origine à x . On peut le calculer de la manière suivante :

$$V(x) = \int_0^{x_1} g_1(y_1, 0, 0, \dots, 0) dy_1 + \int_0^{x_2} g_2(x_1, y_2, 0, \dots, 0) dy_2 + \dots + \int_0^{x_n} g_n(x_1, x_2, \dots, y_n) dy_n$$

Certains paramètres de $g(x)$ volontairement indéterminés, pour être choisis ensuite de manière à rendre $V(x)$ définie positive.

Exemple :

Soit le système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2\end{aligned}$$

Avec $a > 0$,

La fonction h a les propriétés suivantes :

$h(x_1)$ est une fonction de type Lypchitz localement,

$h(0)=0$,

$y h(y) > 0 \quad \forall y \neq 0$ et $y \in (-b, c)$, avec $b, c > 0$.

Le pendule est un cas particulier de ce système.

On veut trouver une fonction de Lyapunov en utilisant la méthode du gradient variable.

On doit trouver $g(x)$ tel que : $\frac{\partial g_1}{\partial x_2} = \frac{\partial g_2}{\partial x_1}$.

$$\dot{V}(x) = g^T f = g_1(x)x_2 - g_2(x)(h(x_1) + ax_2) < 0, \quad \forall x \neq 0$$

$$V(x) = \int_0^x g^T(y) dy > 0 \quad \text{pour } x \neq 0$$

On choisit $g(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x)x_1 + \beta(x)x_2 \\ \gamma(x)x_1 + \delta(x)x_2 \end{pmatrix}$; avec α, β, γ et δ sont à déterminer

Pour satisfaire la symétrie, on doit vérifier :

$$\beta(x) + \frac{\partial \alpha}{\partial x_2} x_1 + \frac{\partial \beta}{\partial x_2} x_2 = \gamma(x) + \frac{\partial \gamma}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial \delta}{\partial x_1} x_2$$

$$\dot{V}(x) = \alpha(x)x_1x_2 + \beta(x)x_2^2 - a\gamma(x)x_1x_2 - a\delta(x)x_2^2 - \delta(x)x_2h(x_1) - \gamma(x)x_1h(x_1)$$

Pour annuler les termes croisés, posons : $\alpha(x)x_1 - a\gamma(x)x_1 - \delta(x)h(x_1) = 0$

On a alors : $\dot{V}(x) = -(a\delta(x) - \beta(x))x_2^2 - \gamma(x)x_1h(x_1)$

Pour simplifier, posons : $\delta(x) = \delta = cte$, $\gamma(x) = \gamma = cte$, $\beta(x) = \beta = cte$.

On suppose aussi que $\alpha(x)$ dépend seulement de x_1 .

La symétrie est assurée si $\beta = \gamma$. Le gradient $g(x)$ s'écrit alors :

$$g(x) = \begin{pmatrix} a\gamma x_1 + \delta h(x_1) + \gamma x_2 \\ \gamma x_1 + \delta x_2 \end{pmatrix}$$

Par intégration, on obtient :

$$\begin{aligned} V(x) &= \int_0^{x_1} (a\gamma y_1 + \delta h(y_1)) dy_1 + \int_0^{x_2} (\gamma x_1 + \delta y_2) dy_2 \\ &= \frac{1}{2} a\gamma x_1^2 + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy + \gamma x_1 x_2 + \frac{1}{2} \delta x_2^2 \\ &= \frac{1}{2} x^T P x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy \end{aligned}$$

Avec : $P = \begin{pmatrix} a\gamma & \gamma \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$

En choisissant $\delta > 0$, $0 < \gamma < a\gamma$, on assure que la fonction V est définie positive, et que sa dérivée \dot{V} est définie négative.

A titre d'exemple posons $\gamma = ak\delta$, $0 < k < 1$, cela donne :

$$V = \frac{\delta}{2} x^T \begin{pmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{pmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dz$$

Sur le domaine $D = \{x \in \mathbb{R}^n \mid -b < x_1 < c\}$, les conditions du théorème de Lyapunov sont vérifiées, et l'origine est alors asymptotiquement stable.

7. Région d'attraction et fonction de Lyapunov

Pour un point asymptotiquement stable, à quelle distance de l'origine la trajectoire peut-elle converger vers l'origine lorsque $t \rightarrow \infty$?

Soit $\phi(t, x)$ la solution du système $\dot{x} = f(x)$ débutant à un point x_0 . La **région d'attraction** est définie comme étant l'ensemble des points x tels que : $\lim_{t \rightarrow \infty} \phi(t, x) \rightarrow 0$

La fonction de Lyapunov peut être utilisée pour estimer la région d'attraction :

s'il existe une fonction de Lyapunov qui vérifie la stabilité asymptotique dans un domaine D ,

et s'il existe un ensemble Ω_c borné et contenu dans D , tel que : $\Omega_c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) < c\}$,

alors tous les trajectoires débutant dans Ω_c y restent, et convergent vers le point d'équilibre (l'origine 0) lorsque $t \rightarrow \infty$.

dans quelles conditions la région d'attraction soit \mathbb{R}^n ? autrement dit : dans quelles conditions le point d'équilibre soit **globalement asymptotiquement stable** ?.

La condition de stabilité doit être vérifiée globalement : $D = \mathbb{R}^n$

Cette condition est **insuffisante** pour dire que la région d'attraction est \mathbb{R}^n .

La deuxième condition est que pour une valeur de la constante c suffisamment large, l'ensemble Ω_c doit rester borné.

Cette deuxième condition est équivalente au fait que : la réduction de $V(x)$ doit être accompagnée avec la réduction de $\|x\|$

1. Exemple :

Soit le système :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1\end{aligned}$$

Examinons la stabilité du point d'équilibre $(0,0)$, à l'aide de la fonction de Lyapunov

$$V(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$

Les surfaces de Lyapunov de cette fonction sont indiquées à la figure 3.6. Tant que V est inférieure à 1, les surfaces sont fermées. Si V dépasse 1, les surfaces ne sont donc plus fermées.

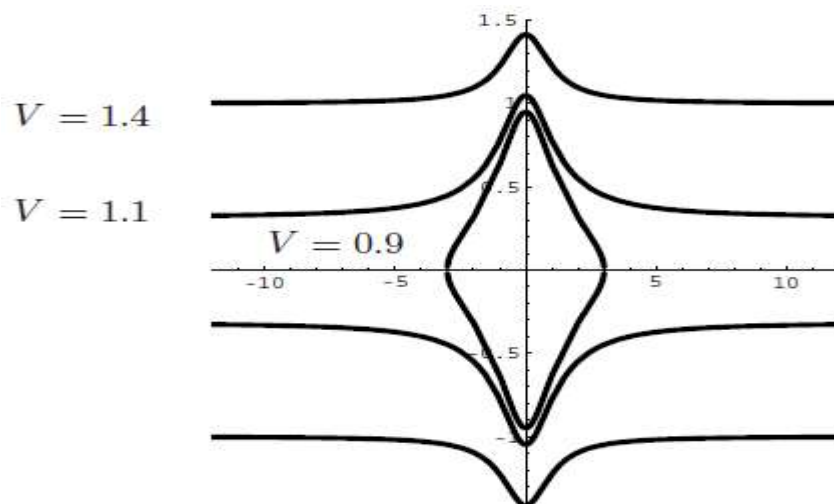


Fig.3.6. Surfaces de Lyapunov

La solution explicite de ce système donne :

$$x_1 = x_{10} e^{2t}$$

$$x_2 = x_{20} e^{-t}$$

En éliminant le temps, on trouve :

$$x_2 = x_{20} \sqrt{x_{10} x_1}^{-\frac{1}{2}}$$

Pour une condition initiale particulière :

$x_{10} = 1.5$, $x_{20} = 2/\sqrt{1.5} = 1.633$, on obtient la trajectoire indiquée à la figure 3.7 (en rouge).

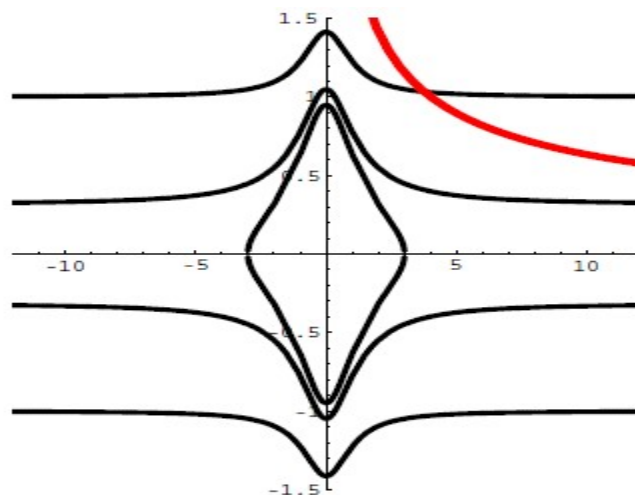


Fig.3.7. Trajectoire divergente

Cette courbe –cette trajectoire- diverge vers l'infinie, bi

en que la fonction de Lyapunov diminue continuellement et tend vers un.

Cette fonction est un exemple pour lequel $V(x)$ peut devenir de plus en plus faible, tandis que x augmente indéfiniment.

La stabilité asymptotique globale exige une condition supplémentaire, indiquée par le théorème de Krasovski.

Théorème de Babashin Krasovskii

Soit $x=0$ le point d'équilibre d'un système $\dot{x} = f(x)$

Est soit $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable. Si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$1) V(0) = 0;$$

$$2) V(x) > 0 \quad \forall x \neq 0$$

$$3. \|x\| \rightarrow \infty \Rightarrow V(x) \rightarrow \infty$$

$$4) \dot{V}(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$$

Alors le point d'équilibre $x=0$ est globalement asymptotiquement stable.

Exemple :

Considérons l'exemple précédent :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -h(x_1) - ax_2\end{aligned}$$

Avec les conditions : $h(0) = 0$, $xh(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \quad x \in (-a, a)$

La fonction de Lyapunov :

$$V = \frac{\delta}{2} x^T \begin{pmatrix} ka^2 & ka \\ ka & 1 \end{pmatrix} x + \delta \int_0^{x_1} h(y) dy$$

Est définie positive pour tout $x \in \mathbb{R}^2$.

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} V(x) = \infty$$

$$\dot{V}(x) = -a\delta(1-k)x_2^2 - ak\delta x_1 h(x_1) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^2$$

On déduit que le point d'équilibre $x=0$ est globalement asymptotiquement stable.

Remarque :

Si un point d'équilibre d'un système est globalement asymptotiquement stable, alors ce point d'équilibre est unique.

La stabilité asymptotique globale ne peut pas être satisfaite pour un système à points d'équilibre multiples, tels que le pendule et le circuit à diode à effet de tunnel.

8. Théorème d'instabilité

Soit $x=0$ un point d'équilibre d'un système $\dot{x} = f(x)$

Est soit $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continuellement différentiable, telle que $V(0)=0$ et $V(x_0) > 0$ pour certains valeurs de x_0 ayant des faibles modules $\|x_0\|$.

On définit un ensemble $\nu = \{x \in B_r \mid V(x) > 0\}$, avec $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$

Si $\dot{V}(x)$ est définie positive sur ν , alors le points d'équilibre $x=0$ est instable.

Exemple

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + g_1(x) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + g_2(x)\end{aligned}$$

Avec $|g_i(x)| \leq k \|x\|_2^2$ dans un voisinage D de l'origine.

L'inégalité implique : $g_i(0) = 0$. L'origine est donc un point d'équilibre de ce système.

Considérons la fonction $V(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$

Sur la ligne d'équation $x_2 = 0$, la fonction $V(x) > 0$.

La dérivée de la fonction $V: \dot{V}(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)$

On peut écrire : $|x_1 g_1(x) - x_2 g_2(x)| \leq \sum_1^2 |x_i| |g_i(x)| \leq 2k \|x\|_2^3$

On déduit que $\dot{V}(x) \geq \|x\|_2^2 - 2k \|x\|_2^3 = \|x\|_2^2 (1 - k \|x\|_2)$

Pour que cette dérivée soit supérieure à zéro, il faut que $\|x\|_2 < \frac{1}{2k}$

Ainsi, en, choisissant l'ensemble $B_r = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < r\}$ de sorte que $r < \frac{1}{2k}$, le théorème d'instabilité est vérifié, et par conséquent l'origine est instable.

9. Principe d'invariance

1. Ensemble invariant

Un ensemble M est un ensemble positivement invariable par rapport à un système $\dot{x} = f(x)$ si :

$$x(0) \in M \Rightarrow x(t) \in M, \quad \forall t \geq 0$$

La solution du système $\dot{x} = f(x)$ ayant comme condition initiale $x(0) = x_0$ sera notée $\Phi(x_0, t)$:

Autrement dit : si une solution fait partie de M à un certain instant, alors elle fait partie de M à tout instant futur (figure 3.8).

La solution du système $\dot{x} = f(x)$ ayant comme condition initiale $x(0) = x_0$ sera notée $\Phi(x_0, t)$.

L'ensemble M peut être défini alors par :

$$M = \{x \mid x_0 \in M \Rightarrow \Phi(x, t) \in M, \quad \forall t \geq 0\}$$

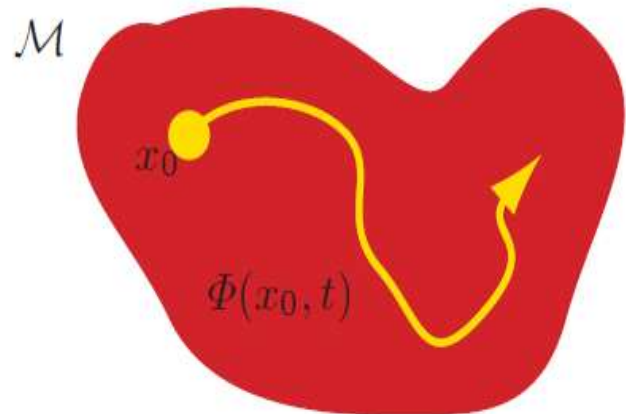


Fig.3.8. Ensemble invariant

Les points d'équilibres et les cycles limites sont des exemples s des ensembles invariants.

Un autre exemple des ensembles invariants :

$$\Omega = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq c\}; \quad \text{avec: } \dot{V}(x) \leq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

2. Ensemble d'annulation de la fonction de Lyapunov

Cet ensemble est défini mathématiquement par :

$$R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$$

3. Énoncée du théorème d'invariance de LaSalle

Soit $l < 0$ et $\Omega_l = \{x \in \mathbb{R}^n \mid V(x) \leq l\}$

Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- Ω_l fermé et borné;
- $\forall x \in \Omega_l : \dot{V}(x) \leq 0$
- $R \subset \Omega_l$ avec $R = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \dot{V}(x) = 0\}$
- $M \subset R$, avec M est le plus grand ensemble invariant

alors : $\forall x_0 \in \Omega_l, \quad \Phi(x_0, t) \rightarrow M$ lorsque $t \rightarrow \infty$

C'est à dire que toute solution démarrant de Ω_l se rapproche de M lorsque le temps tend vers l'infini.