



Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Buenos Aires



ÁLGEBRAS BOOLEANAS



Unidad 4

ÁLGEBRAS BOOLEANAS

George Boole, famoso matemático del siglo XIX, en el año 1854 escribió el libro "The Laws of Thought", que contribuyó para el desarrollo de una teoría lógica que utilizaba símbolos en lugar de palabras.

En el año 1938, C. E. Shannon, quien en 1936 obtuvo los títulos de ingeniero electricista y matemático en la Universidad de Michigan, aceptó la posición de asistente de investigación en el departamento de ingeniería eléctrica en el Instituto de Tecnología de Massachusetts (MIT). Trabajó en el computador analógico más avanzado de esa era: Vannevar Bush's Differential Analyzer. En su tesis de maestría en el MIT, demostró cómo el álgebra booleana se podía utilizar en el análisis y la síntesis de la conmutación y de los circuitos digitales. Este fue el puntapié que convirtió al álgebra booleana en un medio indispensable para el análisis y el diseño de computadoras electrónicas. Veremos a continuación el concepto de Álgebra de Boole -que no debe resultarnos extraño ya que, en definitiva, es un caso particular de las redes vistas en la unidad anterior-, subálgebra de Boole, homomorfismo (o morfismo) e isomorfismo para estas Álgebras.

Más adelante nos ocuparemos de las funciones booleanas.

Comencemos con la definición de Álgebra de Boole:

B es un *Álgebra de Boole* si B es una red distributiva y complementada.

Podemos decir que un conjunto parcialmente ordenado en el cual dos elementos cualesquiera tienen una única cota superior mínima y una única cota inferior máxima, complementado y distributivo se conoce como *Álgebra de Boole*.

De la definición vamos a inferir algunas observaciones:

- El conjunto B está ordenado.
- El primer elemento de B es 0_B .
- El último elemento de B es 1_B .
Mínima cota superior $\rightarrow \text{m.c.s } \{a, b\} = a \vee b \in B$
Máxima cota inferior $\rightarrow \text{m.c.i } \{a, b\} = a \wedge b \in B$
- $(B; \vee; \wedge)$ es un álgebra de Boole si y sólo si cumple los siguientes 5 axiomas:

1. $\vee: B^2 \rightarrow B; \wedge: B^2 \rightarrow B$
2. $\forall a \in B, \forall b \in B: a \vee b = b \vee a$
 $a \wedge b = b \wedge a$
3. $\forall a \in B, \forall b \in B, \forall c \in B: a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
 $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
4. $\exists 0_B \in B$ tal que $\forall a \in B: a \vee 0_B = a$
 $\exists 1_B \in B$ tal que $\forall a \in B: a \wedge 1_B = a$
5. $\forall a \in B, \exists \bar{a} \in B$ tal que $a \vee \bar{a} = 1_B$
 $a \wedge \bar{a} = 0_B$

- Un Algebra de Boole es un sistema dual y por lo tanto se verifica el Principio de Dualidad.



Este tema lo podés consultar en el capítulo 14 del libro de la cátedra.



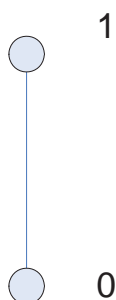
Los siguientes ejemplos pueden aclarar algunas dudas:

1. $(\{0, 1\}; \vee; \wedge)$ cuyas tablas de operaciones son las siguientes:

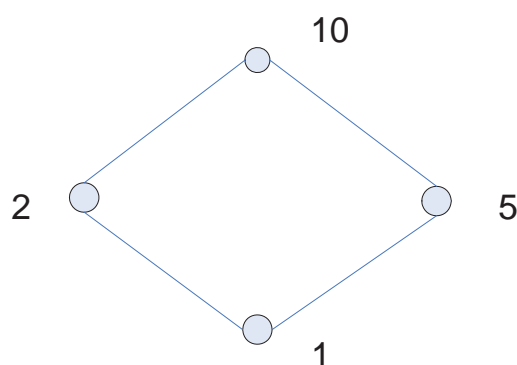
\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

Es el Álgebra de Boole trivial con el siguiente Diagrama de Hasse:



2. $D_{10} = \{x \in \mathbb{N} \text{ tales que } x \mid 10\}$, con $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$ es un Algebra de Boole. Su diagrama de Hasse es el siguiente:



Tomemos los átomos para generar los números $x = 2^a \cdot 5^b, y = 2^c \cdot 5^d$
con $a, b, c, d \in \{0, 1\}$

Entonces operemos x e y con \vee_D y \wedge_D para ver si cumplen con las propiedades:

a) Veamos si son operaciones cerradas en D_{10} :

$$\begin{aligned} x \vee_D y &= 2^{a \vee c} \cdot 5^{b \vee d} \in D_{10} \\ x \wedge_D y &= 2^{a \wedge c} \cdot 5^{b \wedge d} \in D_{10} \end{aligned}$$

Por lo tanto \vee_D e \wedge_D son operaciones cerradas en D_{10} .

b). Comprobemos ahora si son conmutativas:

$$\begin{aligned} x \vee_D y &= 2^{a \vee c} \cdot 5^{b \vee d} \\ &= 2^{c \vee a} \cdot 5^{d \vee b} \text{ por conmutatividad del } \vee \\ &= y \vee_D x \\ x \wedge_D y &= 2^{a \wedge c} \cdot 5^{b \wedge d} \\ &= 2^{c \wedge a} \cdot 5^{d \wedge b} \text{ por conmutatividad del } \wedge \\ &= y \wedge_D x \end{aligned}$$

Por lo tanto \wedge_D e \vee_D son operaciones conmutativas en D_{10} .

c). Probemos la distributividad de ambas operaciones:

Sea $z = x = 2^e \cdot 5^f$, con e y $f \in \{0, 1\}$

$$\begin{aligned} x \vee_D (y \wedge_D z) &= 2^a \cdot 5^b \vee_D (2^c \cdot 5^d \wedge_D 2^e \cdot 5^f) \text{ reemplazando los valores de } x, y, z \\ &= 2^{a \vee (c \wedge e)} \cdot 5^{b \vee (d \wedge f)} \\ &= 2^{(a \vee c) \wedge (a \vee e)} \cdot 5^{(b \vee d) \wedge (b \vee f)} \\ &= (x \vee_D y) \wedge_D (x \vee_D z) \end{aligned}$$

Esto verifica la distributividad de \vee_D respecto de \wedge_D y por lo tanto de \wedge_D respecto de \vee_D , es decir $\forall x \in D_{10}, \forall y \in D_{10}, \forall z \in D_{10}$, se cumple que:

$$x \wedge_D (y \vee_D z) = (x \wedge_D y) \vee_D (x \wedge_D z)$$

d) Encontremos el $0_{D_{10}}$ y el $1_{D_{10}}$

Se cumple que $\forall x \in D_{10} : 1 \vee_D x = 1 \vee_D (2^a \cdot 5^b)$

Recordemos para justificar el siguiente paso que al elevar a la 0 cualquier base no nula obtenemos 1 .

$$\begin{aligned} &= 2^{(0 \vee a)} \cdot 5^{(0 \vee b)} \\ &= 2^a \cdot 5^b \\ &= x \end{aligned}$$

con lo que $0_{D_{10}}$ es 1

$$\begin{aligned}
 \text{Se cumple que } \forall x \in D_{10} : 10 \wedge_D x &= 10 \wedge_D (2^a \cdot 5^b) \\
 &= 2 \cdot 5 \wedge_D (2^a \cdot 5^b) \\
 &= 2^{1 \wedge a} \cdot 5^{1 \wedge b} \\
 &= 2^a \cdot 5^b \\
 &= x
 \end{aligned}$$

con lo que $1_{D_{10}}$ es 10.

e) Encontremos los complementos

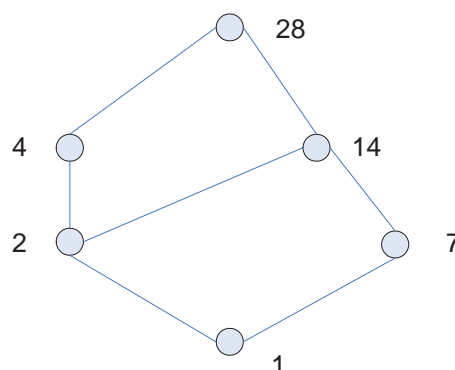
Sea $x \in D_{10}$ con $x = 2^a \cdot 5^b$ y sea $y \in D_{10}$ con $y = 2^{1 \wedge \bar{a}} \cdot 5^{1 \wedge \bar{b}}$

$$\begin{aligned}
 \text{Entonces } x \wedge_D y &= 2^a \cdot 5^b \wedge_D 2^{1 \wedge \bar{a}} \cdot 5^{1 \wedge \bar{b}} \\
 &= 2^{a \wedge (1 \wedge \bar{a})} \cdot 5^{b \wedge (1 \wedge \bar{b})} \\
 &= 2^{(a \wedge \bar{a}) \wedge 1} \cdot 5^{(b \wedge \bar{b}) \wedge 1} \\
 &= 2^{0 \wedge 1} \cdot 5^{0 \wedge 1} \\
 &= 2^0 \cdot 5^0 \\
 &= 1 \cdot 1 \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Además: } x \vee_D y &= 2^a \cdot 5^b \vee_D 2^{1 \wedge \bar{a}} \cdot 5^{1 \wedge \bar{b}} \\
 &= 2^{a \vee (1 \wedge \bar{a})} \cdot 5^{b \vee (1 \wedge \bar{b})} \\
 &= 2^{(a \vee 1) \wedge (a \vee \bar{a})} \cdot 5^{(b \vee 1) \wedge (b \vee \bar{b})} \\
 &= 2^{1 \wedge 1} \cdot 5^{1 \wedge 1} \\
 &= 2^1 \cdot 5^1 \\
 &= 10
 \end{aligned}$$

Con lo cual $y = \bar{x}$

3. $D_{28} = \{ x \in \mathbb{N} \text{ tales que } x \mid 28 \}$, con $a \preceq b \Leftrightarrow a \mid b$ NO es un Algebra de Boole.
Su diagrama de Hasse es el siguiente:



No es complementada pues:

$$\begin{aligned}\overline{28} &= 1 \\ \overline{1} &= 28 \\ \overline{7} &= 4 \\ \overline{4} &= 7\end{aligned}$$

Pero no existen $\overline{2}$ ni $\overline{14}$.

Como D_{28} no es una red complementada ya que hay dos elementos que no tienen complemento \rightarrow no es Álgebra de Boole.



¿Se podría decir que $(P(A); \cup; \cap)$ es un Álgebra de Boole?

Intentá responder la pregunta y si no podés recurrí al tutor para que te oriente

La siguiente propiedad nos ayudará a reconocer las Álgebras de Boole de las redes que no lo sean, siempre que el conjunto esté ordenado por la divisibilidad.

Propiedad:

Sea $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Entonces la red distributiva:

$D_n = \{ x \in \mathbb{N}, \text{ tal que } x \mid n \}$ con la relación "divide a" es un álgebra de Boole si y sólo si

$n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ con $a_i \in \{0, 1\} \forall i = 1, r$, p_i es un número primo $\forall i = 1, r$ donde

$$p_i \neq p_j \text{ si } i \neq j, \forall i = 1, r.$$

Es decir la red distributiva alcanzará la estructura de Álgebra de Boole si y solamente si el número n se puede expresar como un producto de primos distintos.

En el ejemplo anterior, $28 = 4.7$, es decir $28 = 2.2.7$, se tiene que D_{28} , ordenado por la divisibilidad no es Álgebra de Boole, pero D_{231} , si es álgebra de Boole porque $231=3.7.11$, es decir cumple con la condición requerida.

Las siguientes cuestiones sintetizan lo visto anteriormente; te recomendamos que las tengas en cuenta si querés analizar si una red, ordenada por la divisibilidad, alcanza la estructura de Álgebra de Boole.

- El primer elemento de D_n es $0_{D_n} = 1$
- El último elemento de D_n es $1_{D_n} = n$
- $\forall a \in D_n, \forall b \in D_n : a \vee b = \text{m.c.m } \{a, b\} = [a; b]$
- $\forall a \in D_n, \forall b \in D_n : a \wedge b = \text{m.c.d } \{a, b\} = (a; b)$

- En $D_n : n = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ con $a_i \in \{0, 1\}$, $\forall i \ p_i \neq p_j$ si $i \neq j$, $i, j = 1, r$
- $\forall a \in D_n : \bar{a} = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ podemos ver que $a \wedge \bar{a} = 1$ si \bar{a} queda así definido:

$a = p_1^{a_1} \dots p_r^{a_r}$ de donde $\bar{a} = p_1^{a_1 \wedge 1} p_2^{a_2 \wedge 1} \dots p_r^{a_r \wedge 1}$ y se verifica que

$$a \wedge_D \bar{a} = (a; \bar{a}) = p_1^{a_1 \wedge (1 \wedge a_1)} p_2^{a_2 \wedge (1 \wedge a_2)} \dots p_r^{a_r \wedge (1 \wedge a_r)} = p_1^0 p_2^0 \dots p_r^0 = 1$$

Algo para tener muy en cuenta y que usamos en la demostración anterior es que $a_i \wedge (1 \wedge a_i)$ es siempre nulo independientemente del valor de a_i .

Por el principio de dualidad se verifica que $a \vee \bar{a} = n$

Finalmente, la proposición que sigue sintetiza las propiedades que se cumplen en un Álgebra de Boole, que podemos probarlas usando la definición, es decir todas aquellas propiedades que intervienen para definir la estructura, tales como la propiedad conmutativa y la distributiva.

Tengamos en cuenta que las propiedades que se enuncian se deducen de la definición.

Proposición:

En un Álgebra de Boole $(B; \vee; \wedge)$ se satisfacen las siguientes propiedades:

- a) Los elementos 0_B y 1_B son únicos.

Demostración:

Supongamos que 0_B $0'_B$ sean el elemento nulo o primer elemento de B . Entonces:

$$0_B \vee 0'_B = 0_B \wedge 0'_B = 0_B \text{ como}$$

$$0'_B \vee 0_B = 0'_B \wedge 0_B \text{ resulta que } 0_B = 0'_B$$

De forma análoga se prueba para 1_B .

- b) Todo elemento tiene un único complemento.
Intentá demostrarlo.

- c) Todo elemento es idempotente, es decir, $\forall a \in B \Rightarrow a \vee a = a$ ($a \wedge a = a$)

Demostración:

$a = a \vee 0_B$	0_B es el elemento neutro para \vee
$= a \vee (a \wedge \bar{a})$	Definición de complemento.
$= (a \vee a) \wedge (a \vee \bar{a})$	Propiedad Distributiva
$= (a \vee a) \wedge 1_B$	Definición de complemento.
$= a \vee a$	1_B elemento neutro para \wedge

Por principio de dualidad: $a \wedge a = a$.

- d) Los elementos neutros se complementan mutuamente es decir que:

$$\bar{1}_B = 0_B$$

$$\bar{0}_B = 1_B$$

- e) Todo elemento es involutivo, es decir $\bar{\bar{a}} = a$

- f) El elemento neutro para \wedge (1_B) es absorbente para la \vee ; es decir que

$$\forall a \in B: a \vee 1_B = 1_B$$

Análogamente, $\forall a \in B: a \wedge 0_B = 0_B$; es decir, por el principio de dualidad, resulta que el elemento neutro para \vee es absorbente para la \wedge .

- g) Leyes de De Morgan:

$$a. \quad \forall a \in B, \forall b \in B: \overline{(a \vee b)} = \bar{a} \wedge \bar{b}$$

$$b. \quad \forall a \in B, \forall b \in B: \overline{(a \wedge b)} = \bar{a} \vee \bar{b}$$



Te proponemos que intentes desarrollar la demostración de las propiedades enunciadas. Si tenés dificultades podés consultar a tu tutor, pero te recomendamos que intentes probarlas.

Finalmente la siguiente propiedad muestra que, en un Álgebra de Boole, la distributividad garantiza que los elementos sólo pueden tener un único complemento.



Recordemos que hay redes complementadas donde algunos elementos tenían más de un complemento y no eran distributivas, si no lo recuerdas puedes ir a la unidad 3 o consultarlo al libro de la cátedra en el capítulo 14.

Recordemos la siguiente propiedad, que vimos en la unidad anterior y que ahora demostraremos.

En un láttice distributivo, si un elemento posee un complemento entonces este complemento es único.



Demostración:

Supongamos que un elemento a posee dos complementos b y c . Lo que escribimos:

$$a \vee b = 1$$

$$a \wedge b = 0$$

$$a \vee c = 1$$

$$a \wedge c = 0$$

Sabemos que: $b = b \wedge 1$

$$\begin{aligned}
 &= b \wedge (a \vee c) \text{ reemplazando } a \vee c = 1 \\
 &= (b \wedge a) \vee (b \wedge c) \text{ por propiedad distributiva} \\
 &= 0 \vee (b \wedge c) \text{ reemplazando } a \wedge b = 0 \\
 &= (a \wedge c) \vee (b \wedge c) \text{ reemplazando } a \wedge b = 0 \\
 &= (a \vee b) \wedge (c \vee c) \text{ por propiedad distributiva} \\
 &= (a \vee b) \wedge c \text{ reemplazando } c \vee c = c \\
 &= 1 \wedge c \text{ reemplazando } a \vee b = 1 \\
 &= c
 \end{aligned}$$

Veremos ahora la definición de subálgebra de Boole¹. Comencemos por la definición formal.

Sea B un Álgebra de Boole. Sea $\emptyset \neq A \subseteq B$.
 A es un **subálgebra** de B si $(A; \leq/A)$ es un Álgebra de Boole.

De esta definición podemos decir que:

- 1) \leq/A = "orden restringido a A ".
- 2) Si B es un Álgebra de Boole y A es una subálgebra entonces A verifica:

i) $a \in A \Rightarrow \bar{a} \in A$

ii) $a \in A, b \in A \Rightarrow a \vee b \in A$

iii) $a \in A, b \in A \Rightarrow a \wedge b \in A$

iv) $0_B \in A$

v) $1_B \in A$

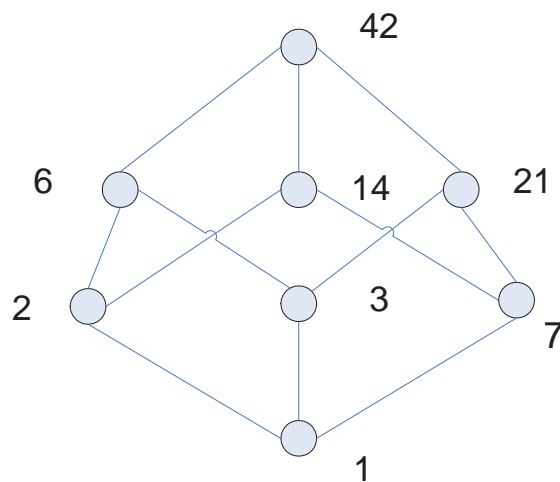
e

El siguiente ejemplo nos ayudará a comprender mejor el tema

$(D_{42} = \{ x \in \mathbb{N} \text{ tal que } x \mid 42 \}; \leq)$ con $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$ es un Álgebra de Boole.

Su diagrama de Hasse es el siguiente:

¹ Este no es un tema nuevo pues sabemos que el sufijo SUB... nos indica que para determinada estructura, cualquier subconjunto que cumpla las mismas propiedades constituye una subestructura. En este caso, cualquier subconjunto incluido en un Álgebra de Boole será una subálgebra de Boole si cumple con todos los requerimientos.



Tomemos los conjuntos:

$$A_1 = \{1, 42\}$$

$$A_2 = \{1, 2, 21, 42\}$$

$$A_3 = \{1, 3, 14, 42\}$$

y probemos que son subálgebras.

$$1) A_1 = \{1, 42\}$$

El diagrama de Hasse es el siguiente:



i) Analicemos los complementos:

$$\overline{1} = 42$$

$$\overline{42} = 1$$

Verifica que si $a \in A_1 \Rightarrow \overline{a} \in A_1$

$$ii) \forall a \in A_1, \forall b \in A_1 \Rightarrow a \wedge b \in A_1$$

Como $a \vee b = [a; b]$ se obtiene:

$$1 \vee 1 = [1; 1] = 1 \in A_1$$

$$42 \vee 1 = [42; 1] = 1 \vee 42 = [1; 42] = 42 \in A_1$$

$$42 \vee 42 = [42; 42] = 42 \in A_1$$

$$\text{iii) } \forall a \in A_1, \forall b \in A_1 \Rightarrow a \vee b \in A_1$$

Como $a \wedge b = (a; b)$ se obtiene:

$$1 \wedge 1 = (1; 1) = 1 \in A_1$$

$$42 \wedge 1 = (42; 1) = 1 \wedge 42 = (1; 42) = 1 \in A_1$$

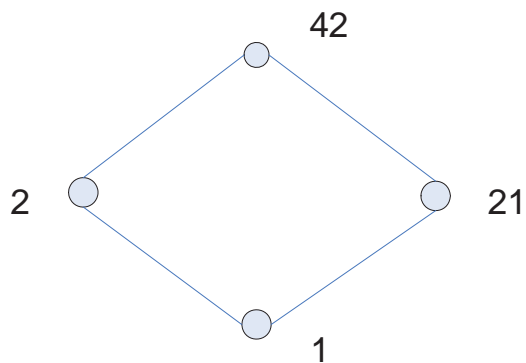
$$42 \wedge 42 = (42; 42) = 42 \in A_1$$

$$\text{iv) Como } 0_B = 1 \text{ y } 1_B = 42 \in A_1$$

Queda probado que A_1 es subálgebra.

$$2) A_2 = \{1, 2, 21, 42\}$$

El diagrama de Hasse es el siguiente:



i) Analicemos los complementos:

$$\bar{1} = 42$$

$$\bar{42} = 1$$

$$\bar{2} = 21$$

$$\bar{21} = 2$$

Verifica que si $a \in A_2 \Rightarrow \bar{a} \in A_2$

$$\text{ii) } \forall a \in A_2, \forall b \in A_2 \Rightarrow a \wedge b \in A_2$$

$\forall a \in D_{42} : a \wedge a = a$ por idempotencia.

$$\forall a \in A_2 : a \wedge a = (a; a) = a \in A_2$$

$\forall a \in D_{42} : 1 \leq a$ por ser 1 el primer elemento \Rightarrow

$$\forall a \in A_2 : 1 \leq a \Rightarrow 1 \wedge a = (1; a) = 1 \in A_2$$

$\forall a \in D_{42} : a \leq 42 \Rightarrow$ por ser 42 el último elemento \Rightarrow

$\forall a \in A_2 : a \leq 42 \Rightarrow a \wedge 42 = (a; 42) = a \in A_2$ por propiedad de Redes.

Sea $a = 2$ y $b = 21$ entonces $2 \wedge 21 = (2; 21) = 1 \in A_2$

iii) $\forall a \in A_2, \forall b \in A_2 \Rightarrow a \vee b \in A_2$

$\forall a \in D_{42} : a \vee a = a$ por idempotencia.

$\forall a \in A_2 : a \vee a = [a; a] = a \in A_2$

$\forall a \in D_{42} : 1 \leq a$ por ser 1 el primer elemento \Rightarrow

$\forall a \in A_2 : 1 \leq a \Rightarrow 1 \vee a = [1; a] = 1 \in A_2$

$\forall a \in D_{42} : a \leq 42 \Rightarrow$ por ser 42 el último elemento \Rightarrow

$\forall a \in A_2 : a \leq 42 \Rightarrow a \vee 42 = [a; 42] = a \in A_2$ por propiedad de Redes.

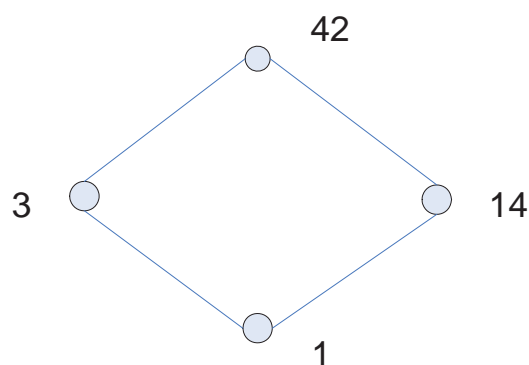
Sea $a = 2$ y $b = 21$ entonces $2 \vee 21 = [2; 21] = 42 \in A_2$

iv) Como $0_B = 1$ y $1_B = 42 \in A_2$

Queda probado que A_2 es subálgebra.

3) $A_3 = \{ 1, 3, 14, 42 \}$

Con el siguiente diagrama de Hasse:



Se prueba de manera similar al punto anterior. Intentá hacerlo, si no podés, consultá con tu tutor.

Antes de continuar sinteticemos lo que hemos desarrollado hasta acá

- Definimos el Álgebra de Boole como una red distributiva y complementada.
- Estudiamos varios ejemplos de redes algunas de las cuales alcanzaban la estructura de Álgebra de Boole y otras que no la alcanzaban.
- En particular, estudiamos el caso de la red de los divisores positivos de n , ordenados por la divisibilidad y llegamos a la conclusión de que para ser Álgebra de Boole, el n debe ser un producto de primos distintos
- Presentamos propiedades que se cumplen en toda Álgebra de Boole y destacamos que la propiedad distributiva garantiza la unicidad del complemento
- Dimos la definición de subálgebra de Boole: sea \mathbf{B} un Álgebra de Boole.

Sea $\emptyset \neq \mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$. \mathbf{A} es un subálgebra de \mathbf{B} si $(\mathbf{A}; \leq|_{\mathbf{A}})$ es un Álgebra de Boole.

Analizamos varios ejemplos.

Veremos ahora el concepto de homomorfismo (o morfismo) para Álgebra de Boole - que seguramente estudiaste en Álgebra y Geometría Analítica, en relación con los espacios vectoriales, aunque allí reciben el nombre de transformaciones lineales.

Podemos decir que:

Un homomorfismo, (o a veces simplemente morfismo) de un objeto matemático a otro de la misma categoría, es una función que es compatible con toda la estructura relevante.

Por ejemplo, si un objeto consiste en un conjunto \mathbf{X} con un orden $<$ y el otro objeto consiste en un conjunto \mathbf{Y} con orden $\{$, entonces debe valer para la función que: si \mathbf{u}, \mathbf{v} son elementos de \mathbf{X} tales que \mathbf{u} precede a \mathbf{v} en el orden establecido debe pasar que la imagen de que la función le asigna a \mathbf{u} debe preceder a la imagen que le asigna a \mathbf{v} .

Formalizando se tiene:

Si $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{X} / \mathbf{u} < \mathbf{v}$, $\mathbf{f}: \mathbf{X} \rightarrow \mathbf{Y}$ un homomorfismo entonces: $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \{ \mathbf{f}(\mathbf{v})$

Si en estos conjuntos hay definidas operaciones binarias $+$ y $*$, respectivamente, entonces debe valer que:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) * \mathbf{f}(\mathbf{v})$$

Ejemplos de morfismos son los homomorfismos de grupos, y de anillos (son otra estructura algebraica que si bien no estudiaremos en detalle ya conocemos pues el conjunto de los enteros con la adición y la multiplicación, que vimos en la unidad 1, alcanza esa estructura.

Los morfismos, entonces son funciones que “arrastran” la estructura, pero son funciones, por lo tanto se clasifican; en ese caso el homomorfismo toma distintas denominaciones. Repasemos la clasificación que volveremos a ver al abordar el tema “grupos”.

* Un homomorfismo que es también una biyección se llama **isomorfismo**; dos objetos isomorfos son totalmente indistinguibles por lo que a su estructura se refiere (tengamos en cuenta que la función inversa también es un homomorfismo biyectivo)

* Un homomorfismo de un conjunto a sí mismo se llama **endomorfismo**; si es también un isomorfismo se llama automorfismo.

* Un homomorfismo que es suprayectivo o exhaustivo se llama **epimorfismo**.

* Un homomorfismo que es inyectivo se llama **monomorfismo**.

La siguiente es la definición formal de homomorfismos para álgebras de Boole

Sean $(A; \vee; \wedge)$ y $(B; \vee'; \wedge')$ dos Álgebras de Boole.

Una función $f: A \rightarrow B$ se dice **homomorfismo** si verifica las siguientes condiciones:

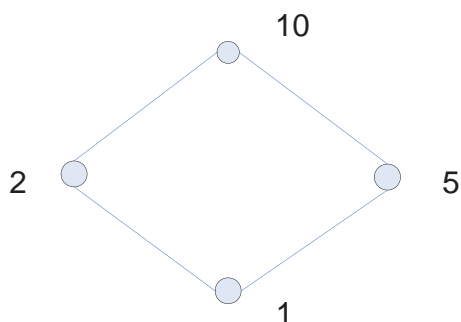
- i. $\forall a \in A: f(a) = f(a)$
- ii. $\forall a \in A, \forall b \in A: f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$
- iii. $\forall a \in A, \forall b \in A: f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$
- iv. $f(0_A) = 0_B$
- v. $f(1_A) = 1_B$

e

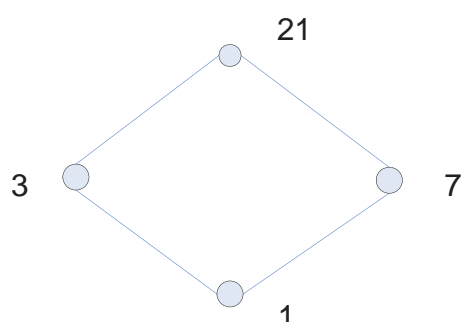
Veamos algunos ejemplos

Si D_{10} y D_{21} ordenados por $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$. Los diagramas de Hasse en cada caso son:

D_{10}



D_{21}



Como $10 = 2.5$ y $21 = 3.7$ son Álgebras de Boole.

$$\begin{aligned}\text{En } D_{10}: a \vee b &= [a, b] \\ a \wedge b &= (a, b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{En } D_{21}: a \vee' b &= [a, b] \\ a \wedge' b &= (a, b)\end{aligned}$$

En D_{10} se verifica que :

$$\bar{1} = 10 \Rightarrow \overline{10} = 1$$

$$\bar{2} = 5 \Rightarrow \overline{5} = 2$$

En D_{21} se verifica que:

$$\bar{1} = 21 \Rightarrow \overline{21} = 1$$

$$\bar{3} = 7 \Rightarrow \overline{7} = 3$$

Definimos la siguiente función $f: D_{10} \rightarrow D_{21}$ tal que:

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 \\ f(2) &= 3 \\ f(5) &= 7 \\ f(10) &= 21\end{aligned}$$

y probaremos que es un homomorfismo.

Como:

$$f(\bar{2}) = f(5) = 7$$

$$\overline{f(2)} = \bar{3} = 7$$

De acá inferimos que $f(\bar{2}) = \overline{f(2)}$

$$f(\bar{5}) = f(2) = 3$$

$$\overline{f(5)} = \bar{7} = 3$$

De acá inferimos que $f(\bar{5}) = \overline{f(5)}$

$$f(\bar{1}) = f(10) = 21$$

$$\overline{f(1)} = \bar{1} = 21$$

De acá inferimos que $f(\bar{1}) = \overline{f(1)}$

$$f(\overline{10}) = f(1) = 1$$

$$\overline{f(10)} = \overline{21} = 1$$

Se deduce que $f(\overline{10}) = \overline{f(10)}$

Por lo tanto, se verifica el primer punto de la definición de homomorfismos de Álgebras de Boole.

e

Veamos otro ejemplo:

En $D_{10} : a \vee b = [a, b]$ y en $D_{10} : a \vee' b = [a, b]$, debemos ver que:

$$\forall a \in D_{10}, \forall b \in D_{21} : f[a, b] = [f(a), f(b)]$$

La imagen por f del mínimo común múltiplo entre a y b debe ser igual al mínimo común múltiplo entre la imagen por f de a y la imagen por f de b .

$$\forall a \in D_{10} \Rightarrow a \in \square \Rightarrow [a, a] = a \Rightarrow f[a, a] = [f(a), f(a)]$$

Por ejemplo para $a = 2$ se obtiene: $f[2, 2] = f(2) = 3$

$$Y[f(2), f(2)] = [3, 3] = 3$$

Es decir que: $f[2, 2] = [f(2), f(2)]$

Por ejemplo para $a = 5$ se obtiene: $f[5, 5] = f(5) = 7$

$$Y[f(5), f(5)] = [7, 7] = 7$$

Es decir que: $f[5, 5] = [f(5), f(5)]$

$$\forall a \in D_{10} \Rightarrow a \in \square \Rightarrow [1, a] = a \Rightarrow f[1, a] = [f(1), f(a)] = f(a)$$

Por ejemplo para $a = 2$ se obtiene: $f[1, 2] = f(2) = 3$

$$Y[f(1), f(2)] = [1, 3] = 3$$

Es decir que: $f[1, 2] = [f(1), f(2)]$

$$\forall a \in D_{10} \Rightarrow a \in \square \Rightarrow [10, a] = a \Rightarrow f[10, a] = [f(10), f(a)] = f(10) = 21$$

Por ejemplo para $a = 2$ se obtiene: $f[10, 2] = f(10) = 21$

$$Y[f(10), f(2)] = [21, 3] = 21$$

Es decir que: $f[10, 2] = [f(10), f(2)]$

Nos queda considerar el caso de $a = 2$ y $b = 5$:

$$f[2, 5] = f(10) = 21$$

$$Y[f(2), f(5)] = [3, 7] = 21$$

Es decir que: $f[2, 5] = [f(2), f(5)]$

Por lo expuesto, se verifica el punto 2 de la definición de homomorfismos de Álgebras de Boole.

2. De igual forma se puede probar que se cumple la condición 3.

$$\forall a \in D_{10} \Rightarrow a \in \square \Rightarrow (a, a) = a \Rightarrow f(a, a) = (f(a), f(a))$$

Por ejemplo para $a = 10$ se obtiene:

$$f(10, 10) = f(10) = 21.$$

$$\forall a \in D_{10} \Rightarrow a \in \square \Rightarrow (1; a) = 1 \Rightarrow f(1, a) = (f(1), f(a)) = (1, f(a)) = 1$$

Por ejemplo para $a = 2$ se obtiene:

$$f(1, 2) = f(1) = 1.$$

$$\forall a \in D_{10} \Rightarrow a \in \square \Rightarrow (10, a) = a \Rightarrow f(10, a) = (f(10), f(a)) = f(a)$$

Por ejemplo para $a = 2$ se obtiene: $f(10, 2) = f(2) = 3$

$$Y(f(10), f(2)) = (21, 3) = 3$$

Es decir que: $f(10, 2) = (f(10), f(2))$

Nos queda considerar el caso de $a = 2$ y $b = 5$:

$$f(2, 5) = f(1) = 1$$

$$Y(f(2), f(5)) = (3, 7) = 1$$

Es decir que: $f(2, 5) = (f(2), f(5))$

No tenemos en cuenta más casos ya que $f(a, b) = f(b, a) = (f(a), f(b)) = (f(b), f(a))$

Se verifica el punto 3 de la definición de homomorfismo.

Por la forma en que definimos f se verifican los puntos 4 y 5 de dicha definición. Como por definición es biyectiva, resulta ser un isomorfismo.

Si ahora miramos los diagramas de Hasse que hicimos al comenzar el desarrollo del ejemplo vemos que son iguales.

La siguiente proposición aplica el concepto de homomorfismo a subálgebras y a la composición de homomorfismos.

Sean $(A; \vee; \wedge)$ y $(B; \vee'; \wedge')$ dos Álgebras de Boole. Sea $f: A \rightarrow B$ un homomorfismo, se verifica que:

- i. Si A_1 es subálgebra de A es $f(A_1)$ subálgebra de B .
- ii. Si $(A; \preceq_1)$ y $(B; \preceq_2)$ y $a \preceq_1 b$ entonces $f(a) \preceq_2 f(b)$.
- iii. $(C; \vee''; \wedge'')$ es un álgebra de Boole y $g: B \rightarrow C$ es un homomorfismo, es $g \circ f: A \rightarrow C$ un homomorfismo.



Intentá hacer la demostración; si no te sale podés consultar con tu tutor o verla en el Capítulo 15 del libro de la cátedra.

Tengamos en cuenta la siguiente definición de isomorfismo de Álgebra de Boole pues permite modelizar distintas situaciones.

Si $f: A \rightarrow B$ es homomorfismo biyectivo f se dice **isomorfismo** y en ese caso las Álgebras de Boole A y B son **isomorfas** y se indica $A \approx B$.

Es decir que dos Álgebras de Boole son isomorfas si son la misma álgebra con distintos nombres para los elementos.

Si aún no te queda claro volvé a consultar el ejemplo de las álgebras D_{10} y D_{21} que fue el ejemplo de presentación de los homomorfismos de grupos. Fijate que si en alguna de ellas ponés el nombre de los elementos de la otra no tenés alteración alguna, son isomorfas.

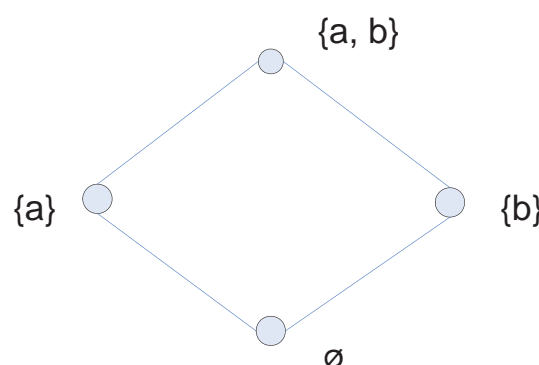
Las siguientes definiciones de Álgebra de Boole atómica y finita son muy útiles para entender el número de elementos que puede tener cualquier Álgebra de Boole.

Un Álgebra de Boole es **atómica** si todo elemento no nulo, es decir todo elemento que no sea el 0_A , o sea el primer elemento, es precedido por un átomo.

e

Veamos los siguientes ejemplos:

- Sea $A = \{ a, b \}$ entonces $P(A) = \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\} \}$
En $(P(A); \subseteq)$ los átomos son $\{a\}$ y $\{b\}$; su diagrama de Hasse es el siguiente



Algo muy importante es que $\forall A$: en el álgebra de Boole $(P(A); \subseteq)$ los átomos son los conjuntos unitarios.

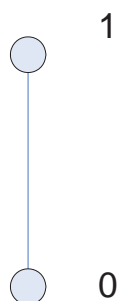
2. En $(\{0,1\}; \vee; \wedge)$ dadas por:

\vee	0	1
0	0	1
1	1	1

\wedge	0	1
0	0	0
1	0	1

Como $a \preceq b \Leftrightarrow a \vee b = b \Leftrightarrow a \wedge b = a$ resulta $0 \preceq 1$

El diagrama de Hasse correspondiente es así:



donde el único átomo es 1.

En $([10; 11] \subset \mathbb{R}; \preceq)$ con $x \preceq y \Leftrightarrow x \leq y$ no hay átomos.

¿Podrías explicarlo? Si tenés alguna duda sobre este tema planteala en el foro y entre todos tratamos de encontrar la solución.

Tengamos en cuenta las siguientes observaciones

- Un álgebra de Boole es sin átomos si no tiene átomos (como en el punto 3. del ejemplo).
- Si $f: \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ es isomorfismo de álgebras de Boole y $a \in \mathbf{A}$ es átomo de \mathbf{A} entonces $f(a)$ es un átomo en \mathbf{B} .

El teorema siguiente nos muestra que toda álgebra de Boole finita es isomorfa al conjunto de partes de sus átomos, por lo tanto debe tener la misma cantidad de elementos que son 2^n . (Recuerden que en la primera unidad probamos, usando inducción matemática, que el conjunto de partes de cualquier conjunto A con tenía 2^n)

Sea $(\mathbf{A}; \vee; \wedge)$ un álgebra booleana finita y A el conjunto de átomos. Entonces $(\mathbf{A}; \vee; \wedge)$ es isomorfo al sistema algebraico definido por la red $(P(A); \subseteq)$.

Recordemos que $(P(A); \subseteq)$ es una red complementada que es la red $(P(A); \cup; \cap)$ que es un Álgebra de Boole.

La importancia de esta propiedad es que existe un álgebra booleana única y finita de 2^n elementos para cualquier entero $n > 0$. Además, no existen otras álgebras booleanas finitas.

Esto indica que si \mathbf{B} es un álgebra de Boole finita necesariamente tiene 2^n elementos.

e

Veamos algunos ejemplos que seguramente nos servirán para aclarar dudas

1. Sean D_{30} y D_{70} con la relación $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$.

El siguiente es uno de los homomorfismos que existen entre las Álgebra de Boole dadas, $f: D_{30} \rightarrow D_{70}$ definido por:

$f(1) = 1$
 $f(5) = 7$
 $f(3) = 5$
 $f(2) = 2$
 $f(15) = 35$
 $f(10) = 14$
 $f(6) = 10$
 $f(30) = 70$

m

Como ejercicio probá que f es homomorfismo. Si te animás, podés definir otras funciones biyectivas que sean homomorfismos, ¿sabés cuántas son? Si tenés alguna duda plantéasela al tutor o consultá el libro de la cátedra en el capítulo 15.

Como los átomos de D_{30} son $\{2,3,5\}$ y los de D_{70} son $\{2, 5, 7\}$ alguna de las posibilidades para que

$f: D_{30} \rightarrow D_{70}$ sea isomorfismo es:

$2 \rightarrow 5$
 $3 \rightarrow 2$
 $5 \rightarrow 7$

Se prueba fácilmente que f es biyectiva y resulta entonces $D_{30} \approx D_{70}$

Ahora construyamos $f: D_{30} \rightarrow D_{70}$ de forma que:

$f(2) = 10$
 $f(3) = 14$
 $f(5) = 7$
 $f(30) = 70$
 $f(1) = 1$
 $f(15) = 35$
 $f(6) = 5$
 $f(10) = 2$

Es biyectiva pero no es homomorfismo (es decir no puede ser isomorfismo), dado que:

$\exists a = 2 \in D_{30}$ tal que a es átomo de D_{30}

y $f(a) = 10 \in D_{70}$ pero no es átomo de D_{70} , entonces no respeta la estructura ordenada

La siguiente proposición formaliza todo lo que estuvimos trabajando:

Si $(B; \vee; \wedge)$ es un álgebra de Boole finita y A es el conjunto de átomos de B , entonces $B \approx \wp(A)$.

Cuestiones a tener en cuenta:

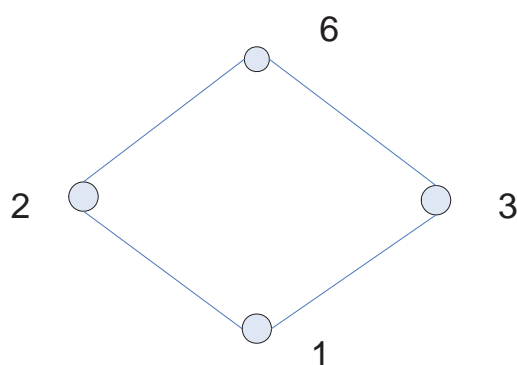
- Toda álgebra de Boole finita tiene átomos.
- Si B es un álgebra de Boole finita, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $|B| = 2^n$
- Si A y B son dos Álgebras de Boole finitas de igual cardinal entonces son isomorfas.

e

El siguiente ejemplo puede aclarar estos conceptos

Sea $(D_6; \leq)$ donde $a \leq b \Leftrightarrow a \mid b$. Sabemos que D_6 es un álgebra de Boole.

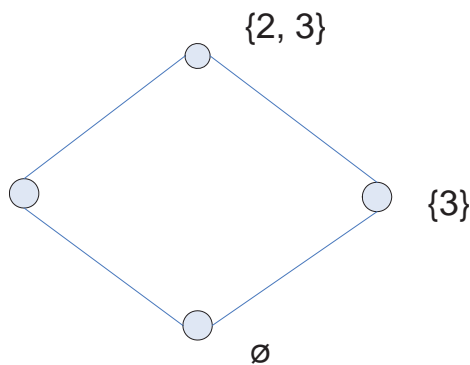
Su diagrama de Hasse es:



El conjunto de átomos es $A = \{ 2, 3 \}$

El cardinal de D_6 es $|D_6| = 4 \approx \wp(A)$.

Sabemos que $(\wp(A); \subseteq)$ es un álgebra de Boole. Su diagrama de Hasse es:



Estableceremos el homomorfismo $f: D_6 \rightarrow \wp(A)$ de forma tal que:

$$\begin{aligned} f(1) &= \emptyset \\ f(2) &= \{2\} \\ f(3) &= \{3\} \\ f(6) &= \{2, 3\} = A \end{aligned}$$

f es biyectiva. Verifiquemos la definición, si no la recordás tené en cuenta que si $(A; \vee; \wedge)$ y $(B; \vee'; \wedge')$ son dos Álgebras de Boole.

Una función $f: A \rightarrow B$ es un **homomorfismo** si verifica las siguientes condiciones:

1. $a \in A: f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$
 2. $a \in A, \forall b \in A: f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$
 3. $a \in A, \forall b \in A: f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$
 4. $f(0_A) = 0_B$
 5. $f(1_A) = 1_B$
1. $\forall a \in D_6: f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$
 $\forall a \in \wp(A): f(\bar{a}) = \overline{f(a)}$

$$\begin{aligned} \text{En } D_6: \quad \bar{1} = 6 &\Rightarrow \bar{\bar{6}} = 1 \\ \bar{2} = 3 &\Rightarrow \bar{\bar{3}} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{En } \wp(A): \quad \bar{\emptyset} = A &\Rightarrow \bar{\bar{A}} = \emptyset \\ \bar{\{2\}} = \{3\} &\Rightarrow \bar{\bar{\{3\}}} = \{2\} \end{aligned}$$

2. $\forall a \in A, \forall b \in B: f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$
 $\text{En } D_6: a \vee b = \text{m.c.m.}\{a, b\} = [a, b]$
 $\text{En } \wp(A): f(a) \vee' f(b) = f(a) \cup f(b)$

Vamos a probar que $\forall a \in D_6, \forall b \in D_6: f([a, b]) = f(a) \cup f(b)$

$\forall a \in D_6: [a, a] = a \Rightarrow f([a, a]) = f(a) \cup f(a) = f(a)$ por idempotencia de la operación \cup

$\forall a \in D_6: [1, a] = a \Rightarrow f([1, a]) = f(a)$

$= \emptyset \cup f(a)$ por \emptyset es neutro para la operación \cup

$= f(1) \cup f(a)$ por definición de $f: f(1) = \emptyset$

$\forall a \in D_6: [a, 6] = a \Rightarrow f([a, 6]) = f(6) = A$ por definición de f .

$= f(a) \cup A$ por propiedad absorbente de \cup

$= f(a) \cup f(6)$ por definición de f .

Nos queda considerar para el caso $[2, 3]$

$[2, 3] = 6$

$f([2, 3]) = f(6) = \{2, 3\} = A$ y $f(2) \cup f(3) = \{2\} \cup \{3\} = \{2, 3\} = A$

Por lo que: $f([2, 3]) = f(2) \cup f(3)$

Se prueba de idéntica forma para el m.c.d., que indicamos (a, b)

Como ejercicio te pedimos que intentes probarlo.

Sintetizando:

- Repasamos el concepto de homomorfismo ya visto en *Álgebra y Geometría Analítica*
- Vimos que, según la clasificación de la función f , los homomorfismos pueden ser: isomorfismo, endomorfismo, epimorfismo o monomorfismo.
- Definimos los morfismos para Álgebra de Boole, tal que:
Sean $(A; \vee; \wedge)$ y $(B; \vee'; \wedge')$ dos Álgebras de Boole.
Una función $f: A \rightarrow B$ se dice homomorfismo si verifica las siguientes condiciones:

vi. $\forall a \in A: f(a) = f(a)$

vii. $\forall a \in A, \forall b \in A: f(a \vee b) = f(a) \vee' f(b)$

viii. $\forall a \in A, \forall b \in A: f(a \wedge b) = f(a) \wedge' f(b)$

ix. $f(0_A) = 0_B$

x. $f(1_A) = 1_B$

- *Analizamos distintos ejemplos*
- *Vimos que las Álgebras de Boole finitas siempre tienen átomos y las que tienen el mismo cardinal son siempre isomorfas y por lo tanto tienen el mismo diagrama de Hasse*
- *Enunciamos y analizamos la propiedad que muestra la razón por la que las Álgebras de Boole finitas tienen siempre 2^n elementos.*

Avancemos ahora con las funciones en Álgebra de Boole.

Funciones en un Álgebra de Boole.

Para representar el objeto más pequeño e indivisible en una computadora digital sólo hay dos posibilidades: usar el **0** o el **1**. Todos los programas y datos se reducen a combinaciones de bits. Los circuitos electrónicos permiten que estos recursos de almacenamiento se comuniquen entre sí. Un bit en una parte de un circuito se transmite a otra como voltaje; se necesitan dos niveles de voltaje.

En este punto de la unidad nos ocuparemos de los circuitos combinatorios. Los datos de salida de un circuito combinatorio están unívocamente determinados para toda combinación de datos de entrada. Un circuito combinatorio no tiene memoria, es decir que los datos de entrada anteriores y el estado del sistema no afectan los datos de salida de un circuito combinatorio.

Los circuitos combinatorios pueden construirse utilizando dispositivos de estado sólido, llamados compuertas, que son capaces de hacer cambios de nivel en el voltaje (bits).

Los circuitos se clasifican en combinatorios y secuenciales:

- Circuitos combinatorios: los datos de salida de un circuito combinatorio están unívocamente determinados para toda combinación de datos de entrada. Un circuito combinatorio no tiene memoria; los datos de entradas anteriores y el estado del sistema no afectan los datos de salida de un circuito combinatorio. Estos serán los circuitos que desarrollaremos en esta unidad.
- Circuitos secuenciales: son los circuitos que tienen como datos de salida una función que depende de los datos de entrada y del sistema. De estos circuitos nos ocuparemos en la unidad 7.

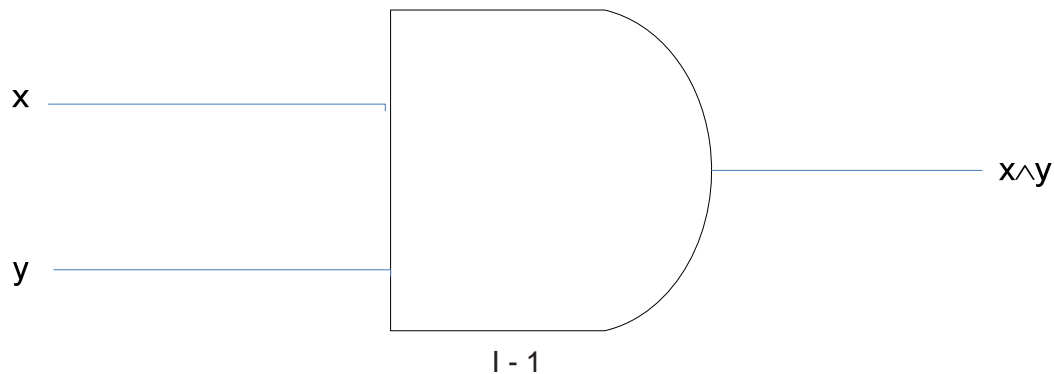
La importancia de las funciones booleanas radica en que pueden ser representadas esquemáticamente en un circuito para obtener la "salida" en función del valor de las variables de "entrada".

Veamos ahora las definiciones:

- Una compuerta **Y (AND)** acepta x_1 y x_2 como datos de entrada, en donde x_1 y x_2 son bits, y se produce un dato de salida que se denota $x_1 \wedge x_2$, en donde:

$$x_1 \wedge x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = 1 \wedge x_2 = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

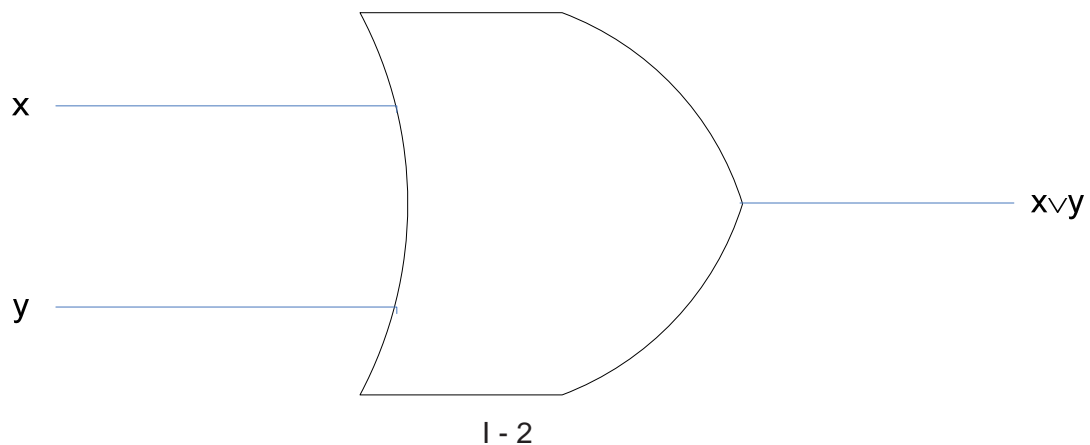
Una compuerta **Y** se simboliza como se indica a continuación:



- Una compuerta **O (OR)** acepta x_1 y x_2 como datos de entrada, en donde x_1 y x_2 son bits; se produce un dato de salida que se denota $x_1 \vee x_2$, en donde:

$$x_1 \vee x_2 = \begin{cases} 1 & \text{si } x_1 = 1 \vee x_2 = 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

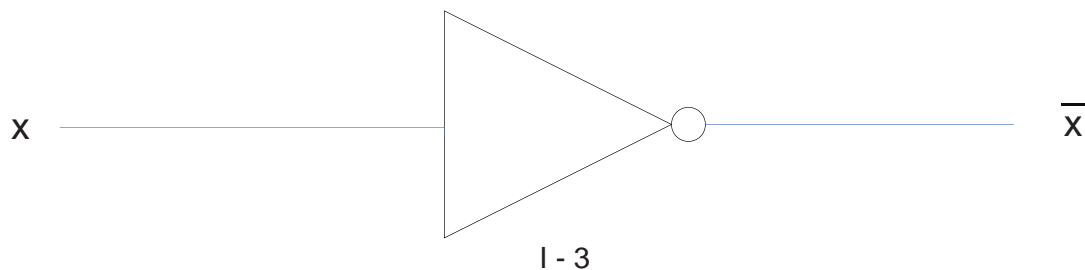
Una compuerta **O** se simboliza como se indica a continuación:



- Una compuerta **NO (NOT)** o inversor acepta x como dato de entrada, en donde x es un bit, y se produce un dato de salida que se denota \bar{x} , en donde:

$$\overline{x} = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Una compuerta **NO** se simboliza como se indica a continuación:



Veamos ahora la definición de **función booleana**

Si $(B; \vee; \wedge)$ es un Álgebra de Boole llamamos función booleana de **n**-variables a:
 $f : B^n \rightarrow B$

Algunas observaciones para tener en cuenta:

- i. $n \in \mathbb{N}$ y $B^n = B \times B \times \dots \times B$, **n** veces.
- ii. $a \in B^n \Leftrightarrow a = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ con $a_i \in B$, $\forall i = 1, n$.
- iii. $a \in B^n$ se dice **n**-upla.
 B^n está ordenado con el orden de la proposición 4 de redes, es decir,

$$(a_1; a_2; \dots; a_n) \preceq (b_1; b_2; \dots; b_n) \Leftrightarrow a_i \leq b_i, \forall i = 1, n.$$

- iv. $F_n = \{f: f \text{ es función booleana}\}$
- v. Si $(B; \vee; \wedge)$ es un Álgebra de Boole suele indicarse $(B; +; \cdot)$.

$$\text{Si } \left(\begin{array}{c|cc|cc} \vee & 0 & 1 & \wedge & 0 & 1 \\ \hline B=\{0,1\};0 & 0 & 1;0 & & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{ y } f: B^n \rightarrow B \text{ entonces } a_i = 0 \text{ ó } a_i = 1, \forall$$

$i = 1, n.$

$$\vee f(a_1; a_2; \dots; a_n) = 0 \text{ ó } f(a_1; a_2; \dots; a_n) = 1$$

vi. Si se trabaja con el álgebra de Boole del punto anterior y se quiere obtener el valor de $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ se usan las tabas de verdad vistas en lógica.

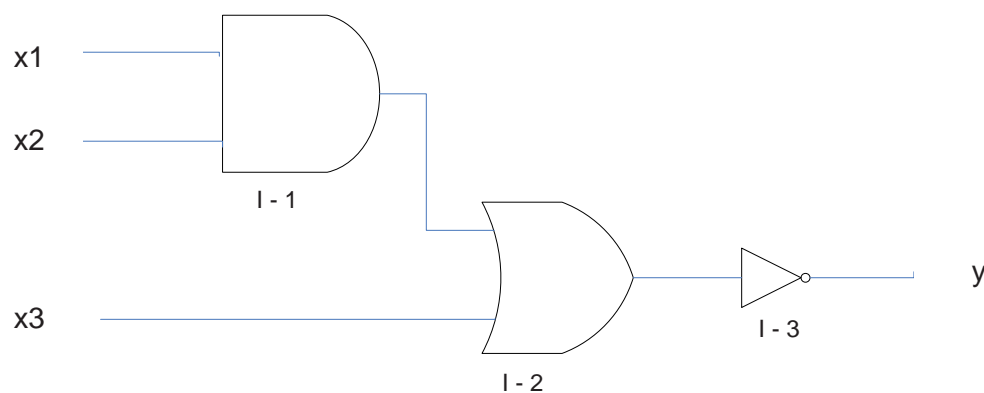
e

Por ejemplo:

$$f: B^3 \rightarrow B / f(x_1; x_2; x_3) = \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee x_3$$

La tabla de verdad correspondiente es:

x_1	x_2	x_3	$\overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee x_3$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0



Enumeramos todas las posibles combinaciones de los valores de los datos de entrada x_1, x_2, x_3 . Debemos tener en cuenta que es la misma forma de trabajar que con las tablas para lógica proposicional, que vimos en la primera unidad.

Veamos cómo se trabaja: para un conjunto de datos de entrada dado puede calcularse el valor del dato de salida y , trazando el flujo a través del circuito.

Por ejemplo, la quinta fila de la tabla anterior proporciona el valor de salida y para los valores:

$$x_1 = 1$$

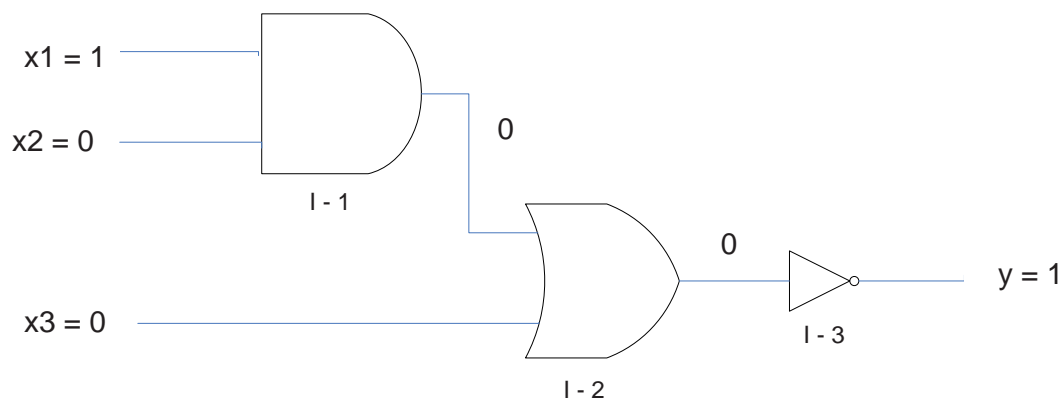
$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 0$$

Si $x_1 = 1$ y $x_2 = 0$, el dato de salida de la compuerta **Y** es **0**, tal como se muestra en la siguiente gráfica.

Ya que $x_3 = 0$, los datos de entrada de **O** son ambos **0**. Entonces el dato de salida de la compuerta **O** es **0**.

Como el dato de entrada de la conexión **NO** es **0**, se obtiene el dato de salida $y = 1$.



Veamos ahora el concepto de **expresión booleana** que es muy importante ya que cada función booleana proviene de alguna expresión booleana. En el último ejemplo:

$$f : B^3 \rightarrow B / f(x_1; x_2; x_3) = \overline{(x_1 \wedge x_2)} \vee x_3$$

Si observamos la tabla de la página anterior podemos ver que en cada fila, en la última columna, aparece el valor **0** o el valor **1**, ¿qué significa?, significa que la expresión booleana planteada nos ofrece una función booleana en cada "renglón de la tabla" y en el que se analizó, el caso **(1; 0; 0)** el valor de esa función es **1**

Daremos ahora la definición, en forma recursiva:

Una expresión booleana o polinomio booleano en n variables es $p(x_1; x_2; x_3; \dots; x_n)$. Se satisfacen las siguientes reglas:

- 1) x_1, x_2, \dots, x_n son expresiones booleanas.
- 2) $0, 1$ son expresiones booleanas.
- 3) Si $p(x_1; x_2; \dots; x_n)$ y $q(x_1; x_2; \dots; x_n)$ son expresiones booleanas entonces:

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) \vee q(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) \wedge q(x_1; x_2; \dots; x_n)$$

son expresiones booleanas.

- 4) Si $p(x_1; x_2; \dots; x_n)$ es una expresión booleana entonces $\overline{p(x_1; x_2; \dots; x_n)}$ es una expresión booleana.

- 5) Toda expresión booleana en las variables x_i con $i = 1, n$ se obtiene usando alguna de las reglas anteriores.

e

Veamos el siguiente ejemplo

$$f: \mathbb{Z}_2^3 \rightarrow \mathbb{Z}_2 / f(x_1; x_2; x_3) = x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)$$

La tabla de verdad correspondiente es:

x_1	x_2	x_3	$x_1 \wedge (\overline{x_2} \vee x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Daremos a continuación algunos conceptos que nos resultarán de mucha utilidad para trabajar con funciones booleanas.

- Dos expresiones booleanas son *equivalentes* si y sólo si sus funciones booleanas correspondientes son iguales.

e

Ejemplo:

Sean son equivalentes:

$$1. f(x_1; x_2) = \overline{(x_1 \wedge x_2)} = y_1$$

x_1	x_2	y_1
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

$$2. \quad f(x_1; x_2) = (\overline{x_1} \vee \overline{x_2}) = y_2$$

x_1	x_2	y_2
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Son equivalentes debido a que tienen las mismas tablas de verdad, pero hay que tener en cuenta que en las gráficas de los circuitos se ve que pueden no tener el mismo número de compuertas.

- Un *minitérmino* en las variables x_1, \dots, x_n es una expresión booleana de la forma:

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) = y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n \text{ en la cual cada } y_i \text{ es } x_i \text{ o bien } \overline{x_i}.$$

Tengamos en cuenta que:

Podemos decir que un minitérmino de n variables es una "conjunción" de n literales en el que todas las variables deben estar representadas.

Para aclarar, veamos el siguiente ejemplo

$$1) \quad p(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3 \text{ es un minitérmino de 3 variables.}$$

$$2) \quad p(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_1} \wedge x_2 \text{ no es un minitérmino de 3 variables}$$

- Una expresión booleana de n variables están **en forma normal disyuntiva** o **en forma canónica de minitérminos** si es de la forma siguiente:

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) = (y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n) \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n) \vee \dots \vee (y_1 \wedge y_2 \wedge \dots \wedge y_n) \text{ donde } y_i = x_i \text{ o } y_i = \overline{x_i} \quad \forall i = 1, n.$$

Es decir que la expresión booleana de n variables está dada en forma canónica de minitérminos si es una "suma booleana" de "conjunciones" donde en cada "conjunción" aparece cada una de las n variables o su complemento.

Supongamos ahora que estamos trabajando con una expresión booleana de **3** variables, ¿cuál es el número máximo de minitérminos que se pueden armar?, para eso conviene recordar que cada fila de la tabla de la expresión booleana es un minitérmino, y como hay **8** filas el número pedido para **3** variables es **8**, eso se puede generalizar si tenemos en cuenta que $8 = 2^3$, si el número de variables fuera **2**, tendríamos $4 = 2^2$, es decir **4** minitérminos, en general se tiene que el número máximo de minitérminos para **n** variables es 2^n . Podemos dar entonces la siguiente definición:

Una expresión booleana de **n** variables dada *en forma canónica de minitérminos* se dice completa si tiene elementos 2^n minitérminos

Algo para tener en cuenta

Si $p(x_1; x_2; \dots; x_n)$ está dada en forma canónica de minitérminos entonces la forma canónica completa de minitérminos es: $p(x_1; x_2; \dots; x_n) \vee \overline{p(x_1; x_2; \dots; x_n)}$

e

Veamos el siguiente ejemplo

Supongamos una función que está dada como la una expresión siguiente:

$$f(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) \text{ y se desea encontrar la forma normal disyuntiva de } f.$$

Recordemos que podemos usar todas las propiedades válidas en un Álgebra de Boole

Comenzamos distribuyendo x_3 :

$$(x_1 \vee x_2) \wedge x_3 = (x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3)$$

Aunque esto representa la expresión booleana como una combinación de términos de la forma $a \wedge b$, ésta no es la forma normal disyuntiva pues todos los símbolos x_1 , x_2 y x_3 no están contenidos en cada uno de los términos. Esto se soluciona fácilmente de la siguiente manera:

$$(x_1 \wedge x_3) \vee (x_2 \wedge x_3) = (x_1 \wedge x_3 \wedge 1) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge 1)$$

Ahora vamos a reemplazar el **1** (neutro para la \wedge) y usar la definición de complemento, en el primer término con x_2 y en el segundo término con $\overline{x_2}$:

$$= (x_1 \wedge x_3 \wedge (x_2 \vee \overline{x_2})) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge (x_1 \vee \overline{x_1}))$$

Distribuyendo:

$$= \left((x_1 \wedge x_3 \wedge x_2) \vee (x_1 \wedge x_3 \wedge \overline{x_2}) \right) \vee \left((x_2 \wedge x_3 \wedge x_1) \vee (x_2 \wedge x_3 \wedge \overline{x_1}) \right)$$

Conmutando y asociando convenientemente obtenemos:

$$= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)$$

El primer y tercer término son iguales por lo que utilizando idempotencia:

$$= (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \overline{x_2} \wedge x_3) \vee (\overline{x_1} \wedge x_2 \wedge x_3)$$

que corresponde a la forma normal disyuntiva de **f** (o forma canónica en minitérminos)

Dado que estamos trabajando en un Álgebra de Boole podemos encontrar el enunciado dual de minitérmino, lo llamamos maxitérmino y su definición es la que sigue:

Una expresión booleana de **n** variables es un *maxitérmino* si es de la forma siguiente:

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) = y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n \text{ donde } y_i = x_i \text{ o } y_i = \overline{x_i} \quad \forall i = 1, n.$$

Observemos que un maxitérmino de **n** variables es una disyunción o “suma booleana” de **n** literales.

Los siguientes ejemplos servirán para aclarar alguna duda:

1) $p(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3$ es un maxitérmino de **3** variables.

2) $p(x_1; x_2; x_3) = \overline{x_1} \vee x_2$ no es un maxitérmino de **3** variables.

Una expresión booleana de **n** variables está *en forma normal conjuntiva* o *en forma canónica de maxitérminos* si es de la siguiente forma:

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) = (y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n) \wedge (y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n) \wedge \dots \wedge (y_1 \vee y_2 \vee \dots \vee y_n)$$

donde $y_i = x_i$ o $y_i = \overline{x_i} \quad \forall i = 1, n.$

Una expresión booleana de n variables está dada en forma canónica de maxitérminos si es una *conjunción de sumas booleanas* donde en cada *suma* aparece cada una de las n variables o su complemento.

Como en el caso de la forma normal disyuntiva (o canónica en minitérminos), se tiene que:

Una expresión booleana en n variables dada en forma canónica de maxitérminos se dice completa si tiene 2^n maxitérminos.

e

El siguiente ejemplo aclarará algunas dudas que se puedan presentar

Supongamos una función que está dada como una expresión booleana como:

$$\text{Sea } p(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3)$$

Se desea dar su forma normal conjuntiva, observamos que ninguno de los paréntesis es un maxitérmino.

Agregamos el elemento neutro para \vee 0_B :

$$(x_1 \vee x_3) \wedge (x_2 \vee x_3) = (x_1 \vee x_3 \vee 0_B) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee 0_B)$$

$$0_B = x_1 \wedge \overline{x_1}$$

$$0_B = x_2 \wedge \overline{x_2}$$

Operando queda:

$$p(x_1; x_2; x_3) = (x_1 \vee x_3 \vee (x_2 \wedge \overline{x_2})) \wedge (x_2 \vee x_3 \vee (x_1 \wedge \overline{x_1}))$$

Distribuyendo:

$$= ((x_1 \vee x_3 \vee x_2) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2})) \wedge ((x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3))$$

El primer y tercer término son iguales por lo que utilizando idempotencia:

$$= (x_1 \vee x_3 \vee \overline{x_2}) \wedge (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)$$

que corresponde a la forma normal conjuntiva.

Concretando

Si $p(x_1; x_2; \dots; x_n)$ está dada en forma canónica de maxitérminos entonces la forma canónica completa de maxitérminos es: $p(x_1; x_2; \dots; x_n) \wedge \overline{p(x_1; x_2; \dots; x_n)}$

Tengamos en cuenta:

Si una expresión booleana de n variables está dada en forma canónica de minitérminos su dual está en forma canónica de maxitérminos.

Repasemos y sinteticemos lo estudiado:

- *Vimos las definiciones de compuertas Y (AND), O (OR) y NO (NOT) con sus representaciones.*
- *Definimos función booleana de n -variables y vimos un ejemplo.*
- *Analizamos con detalle cuando una expresión está dada en forma canónica de maxitérminos o de minitérminos.*



Antes de pasar a la Unidad 5, resolvé los ejercicios del trabajo práctico de funciones booleanas.