

Série n° 2

**Exercice 1** 1) Déterminer et représenter le domaine de définition  $D_f$  de la fonction suivante :

$$f(x, y) = \ln(1 - xy).$$

2)  $D_f$  est-il un ensemble ouvert, fermé ou compact dans  $\mathbb{R}^n$ ?

**Correction :** 1) Le domaine de définition de la fonction  $f$  est :

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy < 1\}.$$

Soit la fonction

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 1 - xy. \end{aligned}$$

► Comme  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  (fonction polynôme),  $]0, +\infty[$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $\mathcal{D}_f = \varphi^{-1}(]0, +\infty[)$ , alors  $\mathcal{D}_f$  est un ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

►  $\mathcal{D}_f$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet, la suite  $(1 - \frac{1}{n}, 1)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{D}_f$  telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{n}, 1) = (1, 1) \quad \text{et} \quad (1, 1) \notin \mathcal{D}_f.$$

►  $\mathcal{D}_f$  n'est pas compact dans  $\mathbb{R}^2$  puisqu'il n'est pas fermé.

Remarques : i) Notons que  $\mathcal{D}_f$  n'est pas borné dans  $\mathbb{R}^2$ . En effet, la suite  $(n, 0)_{n \geq 1}$  est une suite d'éléments de  $\mathcal{D}_f$  et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|(n, 0)\|_1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty.$$

ii) La fonction  $f$  est continue sur son domaine de définition. En effet on a :

- $f = \ln \circ \varphi$ ,
- $\varphi$  est continue sur  $\mathcal{D}_f$  (fonction polynôme),
- $\ln$  est continue sur  $]0, +\infty[$ ,
- $\varphi(x, y) > 0$  pour tout  $(x, y) \in \mathcal{D}_f$  (c-à-d  $\varphi(\mathcal{D}_f) \subset ]0, +\infty[$ ).

Donc  $f$  est continue sur  $\mathcal{D}_f$  (composée de deux fonctions continues).

**Exercice 2** Calculer les limites suivantes :

$$\begin{aligned} i) \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}, \quad ii) \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y \neq 0}} \frac{(1+x^2+y^2) \sin y}{y}, \quad iii) \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{y}} \sin y. \end{aligned}$$

**Correction :** ► i)  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} \quad (F.I : \frac{0}{0}) .$

On pose :  $f(x, y) = \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ . Alors on a :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{et} \quad (0, 0) \in \overline{\mathcal{D}_f}.$$

De plus on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x| \leq \|(x, y)\|_2 \quad \text{et} \quad |y| \leq \|(x, y)\|_2$$

car  $\|(x, y)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \geq \sqrt{x^2} = |x|$  et  $\|(x, y)\|_2 \geq \sqrt{y^2} = |y|$ . Donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x|^3 + |y|^3 \leq 2 \|(x, y)\|_2^3.$$

Par suite

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad 0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{|x|^3 + |y|^3}{x^2 + y^2} \leq \frac{2 \|(x, y)\|_2^3}{x^2 + y^2} = \frac{2 \|(x, y)\|_2^3}{\|(x, y)\|_2^2} = 2 \|(x, y)\|_2.$$

Comme  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \|(x, y)\|_2 = 0$ , on a d'après le théorème d'encadrement :  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = 0$ .

Autre méthode : On pose :

$$x = r \cos \theta \quad \text{et} \quad y = r \sin \theta \quad \text{où } r > 0 \quad \text{et} \quad \theta \in [0, 2\pi[. \quad (\text{Voir schéma})$$

Il est clair que  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$  si et seulement si  $r \rightarrow 0$ , puisque  $x^2 + y^2 = r^2$ . Par suite on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} = \lim_{r \rightarrow 0} r [\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)] = 0$$

d'après le théorème d'encadrement  $(-2r \leq r [\cos^3(\theta) + \sin^3(\theta)] \leq 2r)$ .

► ii)  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y \neq 0}} \frac{(1+x^2+y^2) \sin y}{y} \quad (F.I : \frac{0}{0}) .$

On pose :  $f(x, y) = \frac{(1+x^2+y^2) \sin y}{y}$ . Alors on a :

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq 0\} \quad \text{et} \quad (1, 0) \in \overline{\mathcal{D}_f}.$$

La fonction  $(x, y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  (fonction polynôme), donc

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (1 + x^2 + y^2) = f(1, 0) = 2. \quad (1)$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y \neq 0}} \frac{\sin y}{y} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{\sin y}{y} = 1. \quad (2)$$

**Attention** : la fonction  $(x, y) \mapsto \frac{\sin y}{y}$  est une fonction à deux variables. On dit que c'est une fonction

qui ne dépend pas de la variable  $x$ , ou encore c'est une fonction qui ne dépend que de la variable  $y$ .

On déduit alors de (1) et (2) que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y \neq 0}} \frac{(1+x^2+y^2) \sin y}{y} = \left[ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y \neq 0}} (1+x^2+y^2) \right] \times \left[ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,0) \\ y \neq 0}} \frac{\sin y}{y} \right] = 2.$$

► *iii)*  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{y}} \sin y \quad (F.I : \infty.0).$

On pose :  $f(x, y) = \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{y}} \sin y$ . Alors on a :

$$\mathcal{D}_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \quad \text{et} \quad (0, 0) \in \overline{\mathcal{D}_f}.$$

De la même manière que dans *ii)*, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y > 0}} \frac{\sqrt{y} \sin y}{y} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} \sqrt{1+x^2+y^2} = 1.$$

Par suite

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{y}} \sin y = \left[ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{1+x^2+y^2} \right] \times \left[ \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y > 0}} \frac{\sin y}{\sqrt{y}} \right] = 1 \times 0 = 0.$$

**Exercice 3** Etudier l'existence des limites suivantes :

$$\begin{aligned} i) \quad & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} & ii) \quad & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{\ln(x + e^y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} & iii) \quad & \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2 + y^2)^\sigma} \quad \text{où } \alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

**Correction :** *i)*  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \quad (F.I : \frac{0}{0}).$

► On pose :  $f(x, y) = \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}}$ . Alors on a :

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{et} \quad (0, 0) \in \overline{\mathcal{D}_f}.$$

D'autre part, on a pour tout  $x \neq 0$  :

$$\left| \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \right| = \frac{|\sin x|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \cdot |\sin y| \leq \frac{|x|}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} \leq \frac{|x|}{\sqrt{|x|}} \leq \sqrt{|x|}$$

puisque on a :  $|\sin x| \leq |x|$  et  $|\sin y| \leq 1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

Comme  $|f(0, y)| = 0$  pour tout  $y \neq 0$ , on a :

$$|f(x, y)| \leq \sqrt{|x|} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}.$$

Par suite on a :  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{\sin x \sin y}{\sqrt{|x|} + \sqrt{|y|}} = 0.$

$$ii) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad (F.I : \frac{0}{0}).$$

► On pose :  $f(x, y) = \frac{\ln(x+e^y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$ .

Alors  $x + e^y > 0$  dans un voisinage de  $(0, 0)$  puisque  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x + e^y) = 1$ . Donc  $f$  est définie dans un voisinage de  $(0, 0)$  sauf en  $(0, 0)$ .

De plus  $(0, 0) \in \overline{\mathcal{D}_f}$  puisque  $(\frac{1}{n}, 0) \rightarrow (0, 0)$  et  $(\frac{1}{n}, 0) \in \mathcal{D}_f$  pour tout  $n \geq 1$ .

D'autre part, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x=0 \text{ et } y \neq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{|y|} \quad \text{n'existe pas dans } \mathbb{R}.$$

Donc  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x, y)$  n'existe pas dans  $\mathbb{R}$ .

On peut aussi le prouver en remarquant que

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ x \neq 0 \text{ et } y=0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{|x|} \quad \text{n'existe pas dans } \mathbb{R}.$$

$$iii) \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\sigma} \quad \text{où } \alpha, \beta, \sigma \in \mathbb{R}.$$

On pose :  $f(x, y) = \frac{|x|^\alpha |y|^\beta}{(x^2+y^2)^\sigma}$ . Alors  $\mathcal{D}_f$  dépend des valeurs de  $\alpha, \beta$  et  $\sigma$  et on a :

$$\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{et} \quad (0, 0) \in \overline{\mathcal{D}_f}.$$

Une condition nécessaire et **non suffisante** pour l'existence de la limite est son existence suivant toutes les droites passant par  $(0, 0)$ .

On cherche d'abord la limite suivant la droite d'équation " $y = ax$ " avec  $a \neq 0$ . On a alors :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=ax \text{ et } x \neq 0}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{|a|^\beta}{(1+a^2)^\sigma} \frac{|x|^\alpha |x|^\beta}{x^{2\sigma}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|a|^\beta}{(1+a^2)^\sigma} |x|^{\alpha+\beta-2\sigma} = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha + \beta > 2\sigma \\ \frac{|a|^\beta}{(1+a^2)^\sigma} & \text{si } \alpha + \beta = 2\sigma \\ +\infty & \text{si } \alpha + \beta < 2\sigma. \end{cases}$$

On distingue alors les trois cas suivants :

Premier cas : On suppose que  $\alpha + \beta > 2\sigma$ . Alors on a :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad |x|^\alpha \leq \|(x, y)\|_2^\alpha \quad \text{et} \quad |y|^\beta \leq \|(x, y)\|_2^\beta.$$

D'où

$$0 \leq f(x, y) \leq \frac{\|(x, y)\|_2^{\alpha+\beta}}{\|(x, y)\|_2^{2\sigma}} = \|(x, y)\|_2^{\alpha+\beta-2\sigma} \quad \forall (x, y) \in \mathcal{D}_f.$$

Comme  $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} \|(x,y)\|_2^{\alpha+\beta-2\sigma} = 0$  alors on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \neq (0,0)}} f(x,y) = 0.$$

Deuxième cas : Si  $\alpha + \beta = 2\sigma$  on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=ax \text{ et } x \neq 0}} f(x,y) = \frac{|a|^\beta}{(1+a^2)^\sigma} \quad \forall a \in \mathbb{R}^*.$$

Cette limite dépend de  $a$ , donc  $f$  n'admet pas de limite en  $(0,0)$ .

Troisième cas : Si  $\alpha + \beta < 2\sigma$  on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ y=x \text{ et } x \neq 0}} f(x,y) = +\infty.$$

Donc  $f$  n'admet pas de limite en  $(0,0)$  dans  $\mathbb{R}$ .

En conclusion, la limite de  $f$  existe en  $(0,0)$  si et seulement si  $\alpha + \beta > 2\sigma$ . Dans ce cas cette limite est nulle.

**Remarque** : Si  $\alpha \leq 0$  (resp.  $\beta \leq 0$ ), la limite suivant la droite d'équation  $x = 0$  (resp.  $y = 0$ ) n'a pas de sens car aucun des points de ces deux droites n'appartient à  $\mathcal{D}_f$ .

**Exercice 4** Soit  $\mathbb{R}^n$  muni d'une norme  $\|\cdot\|$  et soit l'application  $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$  définie par :

$$f(x) = \|x\| \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Correction** : On sait, d'après l'inégalité triangulaire, que :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |||x|| - \|y||| < \|y - x\|.$$

Donc on a :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \quad |f(x) - f(y)| < \|y - x\|.$$

Par suite  $f$  est lipschitzienne et elle est alors uniformément continue sur  $\mathbb{R}^n$ . Il en résulte que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ .

**Exercice 5** Etudier la continuité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{si } x^2+y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{si } x^2+y^2 > 1. \end{cases}$$

**Correction** : Soient  $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$  et  $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 > 1\}$ . Soit le cercle  $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 = 1\}$ .

$V$  et  $W$  sont deux ouverts dans  $\mathbb{R}^2$  car l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) &\longmapsto x^2+y^2 \end{aligned}$$

est continue sur  $\mathbb{R}^2$ ,  $V = \varphi^{-1}(]-\infty, 1[)$  et  $W = \varphi^{-1}(]1, +\infty[)$ .

D'autre part, la restriction  $f|_{V \cup C}$  de  $f$  à  $V \cup C$  est continue sur  $V \cup C$ , car c'est la composée deux fonctions continues  $[(x, y) \mapsto 1 - x^2 - y^2 \text{ et } t \mapsto \sqrt{t}]$ . En particulier la restriction  $f|_V$  de  $f$  à  $V$  est continue sur l'ouvert  $V$ .

De même la restriction  $f|_W$  de  $f$  à  $W$  est continue sur  $W$  puisqu'elle est constante.

D'après la remarque (2.2.4) du cours,  $f$  est alors continue sur  $V$  et  $W$  car ils sont des ouverts de  $\mathbb{R}^2$ .

Par suite elle est continue sur l'ouvert  $V \cup W$ .

Etudions maintenant la continuité de  $f$  en tout point du cercle  $C$ .

Soit  $(a, b) \in C$ . Donc  $f(a, b) = 0$  et  $(a, b) \in \overline{(V \cup C)}$ .

D'autre part  $(a, b) \in \overline{W}$ . En effet si  $a \geq 0$  (resp.  $a < 0$ ), la suite  $(a + \frac{1}{n}, b)_{n \geq 1}$  [resp.  $(a - \frac{1}{n}, b)_{n \geq 1}$ ] converge vers  $(a, b)$  et ses termes sont tous dans  $W$ .

D'autre part on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in V \cup C}} f(x, y) = f(a, b) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (a,b) \\ (x,y) \in W}} f(x, y) = 0$$

puisque  $f|_{V \cup C}$  est continue sur  $V \cup C$  et  $f|_W$  est nulle sur  $W$ . Comme  $\mathbb{R}^2 = (V \cup C) \cup W$ , on a, d'après la remarque (2.1.10) du cours :  $\lim_{(x,y) \rightarrow (a,b)} f(x, y) = f(a, b) = 0$ .

Par suite  $f$  est continue sur  $C$ .

Il résulte de ce qui précède que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2 = V \cup W \cup C$ .

On peut aussi établir la continuité de  $f$  en un point  $(a, b)$  de  $C$  en remarquant que :

$$|f(x, y) - f(a, b)| = f(x, y) \leq \sqrt{|1 - x^2 - y^2|} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

et en utilisant le théorème d'encadrement.

**Exercice 6** Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^4}{x^2 + y^4} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

1) Pour tout  $a \in \mathbb{R}$ , on considère la droite  $\Delta_a = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax\}$ .

a) Montrer que  $\mathbb{R}^2 = \left( \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \Delta_a \right) \cup D_0$  où  $D_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$ .

b) Montrer que :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_0 \setminus \{(0,0)\}}} f(x, y) = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Delta_a \setminus \{(0,0)\}}} f(x, y) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

c) Conclure.

2) En considérant la suite  $(x_k, y_k) = (\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k})$ , montrer que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

**Correction :** a) Il est clair que  $\left( \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \Delta_a \right) \cup D_0 \subset \mathbb{R}^2$ .

Inversement, si  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  alors  $(x, y) \in \left( \bigcup_{a \in \mathbb{R}} \Delta_a \right) \cup D_0$  puisque

-si  $x = 0$  alors  $(x, y) \in D_0$ ,

-si  $x \neq 0$ , on a  $y = \left(\frac{y}{x}\right)x$  et par suite  $(x, y) \in \Delta_{\frac{y}{x}}$ .

b) Soit  $a \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Delta_a \setminus \{(0,0)\}}} f(x, y) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{a^4 x^4}{x^2 + a^4 x^4} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x \neq 0}} \frac{a^4 x^2}{1 + a^4 x^2} = 0.$$

D'autre part, on a :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_0 \setminus \{(0,0)\}}} f(x, y) = \lim_{\substack{y \rightarrow 0 \\ y \neq 0}} \frac{y^4}{y^4} = 1.$$

c) On a, d'après b) :

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in D_0 \setminus \{(0,0)\}}} f(x, y) = 1 \neq f(0, 0).$$

Donc  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$ .

2) Considérons la suite  $(x_k, y_k)_{k \geq 1} = \left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)_{k \geq 1}$ . On a :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = (0, 0) \quad \text{et} \quad \lim_{k \rightarrow 0} f\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right) = \lim_{k \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{1}{k}\right)^4}{\left(\frac{1}{k^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{k}\right)^4} = \frac{1}{2} \neq f(0, 0).$$

Donc  $f$  n'est pas continue au point  $(0, 0)$ .

Notons que la suite  $\left(\frac{1}{k^2}, \frac{1}{k}\right)_{k \in \mathbb{N}^*}$  tend vers  $(0, 0)$  suivant la courbe

$$\Gamma = \left\{ (x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2 \mid y = \sqrt{x} \right\}.$$

Remarquons aussi que la restriction de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  est continue puisque c'est une fraction rationnelle.

Comme  $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$  est un **ouvert** de  $\mathbb{R}^2$  alors  $f$  est continue sur cet ensemble.

**Exercice 7** (Contrôle de rattrapage, 12 – 13)

Soit la fonction  $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$  définie par :

$$f(x, y) = (\cos x, \sin x \cos y, \sin x \sin y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2) a) Vérifier que  $f(\mathbb{R}^2) \subset S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ , où  $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$  est la sphère unité de  $\mathbb{R}^3$  muni de la norme euclidienne.

b) Soit  $(r, s, t) \in S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ . Montrer qu'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $(r, s, t) = f(x, y)$ .

(On distinguera les cas  $r = 1$ ,  $r = -1$  et  $|r| \neq 1$ ).

3) Montrer que  $S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$  est connexe par arcs dans  $\mathbb{R}^3$ .

**Correction :** La fonction  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}^2$ . D'autre part, comme les projections

$$p_1 : (x, y) \longmapsto x \quad \text{et} \quad p_2 : (x, y) \longmapsto y$$

sont continues sur  $\mathbb{R}^2$ , les fonctions

$$(x, y) \longmapsto \cos x, \quad (x, y) \longmapsto \cos y, \quad (x, y) \longmapsto \sin x \quad \text{et} \quad (x, y) \longmapsto \sin y$$

sont continues sur  $\mathbb{R}^2$  comme composées de fonctions continues. Donc les trois fonctions composantes de  $f$  sont continues sur  $\mathbb{R}^2$  et par suite  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$ .

2) a) Montrons que  $f(\mathbb{R}^2) \subset S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ . On a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\begin{aligned} (\|f(x, y)\|_2)^2 &= (\cos x)^2 + (\sin x \cos y)^2 + (\sin x \sin y)^2 \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x \cos^2 y + \sin^2 x \sin^2 y \\ &= \cos^2 x + \sin^2 x (\cos^2 y + \sin^2 y) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1. \end{aligned}$$

Par suite on a :

$$f(x, y) = (\cos x, \sin x \cos y, \sin x \sin y) \in S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Il en résulte que  $f(\mathbb{R}^2) \subset S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ .

b) Soit  $(r, s, t) \in S(0_{\mathbb{R}^3}, 1)$ . Donc  $r^2 + s^2 + t^2 = 1$ .

Montrons qu'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que :  $f(x, y) = (r, s, t)$ .

- Si  $r = 1$ , alors  $s = t = 0$  et on a :  $(1, 0, 0) = f(0, 0)$ .
- Si  $r = -1$ , alors  $s = t = 0$  et on a :  $(-1, 0, 0) = f(\pi, 0)$ .
- Si  $|r| \neq 1$  alors  $r \in ]-1, 1[$  et il existe  $x \in ]0, \pi[$  unique tel que  $r = \cos x$  ( $x = \arccos r$ ).

Donc  $s^2 + t^2 = 1 - r^2 = 1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$ . Comme  $\sin x \neq 0$ , on a :

$$\left(\frac{s}{\sin x}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sin x}\right)^2 = 1.$$

Par suite il existe  $y \in \mathbb{R}$  tel que :

$$\frac{s}{\sin x} = \cos y \quad \text{et} \quad \frac{t}{\sin x} = \sin y.$$

Il résulte de ce qui précède qu'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que :

$$(r, s, t) = (\cos x, \sin x \cos y, \sin x \sin y) = f(x, y).$$

3) Comme  $\mathbb{R}^2$  est connexe par arcs (c'est un ensemble convexe) et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  alors

$S(0_{\mathbb{R}^3}, 1) = f(\mathbb{R}^2)$  est connexe par arcs comme image d'un connexe par arcs par une fonction continue.

**Exercice 8** Pour tout  $k \geq 1$ , soit  $F_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq \frac{1}{k}\}$ . Montrer que chaque  $F_k$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$  et que  $\cup_{k \geq 1} F_k$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Correction :** La fonction

$$\begin{aligned} p_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et l'ensemble  $[\frac{1}{k}, +\infty[$  est un fermé dans  $\mathbb{R}$ . Donc  $F_k = (p_1)^{-1}([\frac{1}{k}, +\infty[)$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .



Montrons que  $\cup_{k \geq 1} F_k$  n'est pas fermé. Remarquons d'abord que  $\cup_{k \geq 1} F_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ . D'autre part, la suite  $(\frac{1}{n}, 0)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est une suite de points de  $\cup_{k \geq 1} F_k$ , car on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\frac{1}{n}, 0) \in F_n.$$

Cependant  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{n}, 0) = (0, 0) \notin \cup_{k \geq 1} F_k$ . Donc la réunion n'est pas fermé.

**Exercice 9** Soit l'ensemble  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |xy| = 1\}$ .

1) Représenter  $A$  graphiquement.

2) Déterminer l'image de  $A$  par la projection  $p_1 : (x, y) \mapsto x$  puis en déduire que  $A$  n'est pas connexe par arcs.

3) Montrer que  $A$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

4) Montrer que  $A$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$ .

5)  $A$  est-il compact ? (Justifier votre réponse).

**Correction :** 1) Voir schéma.

2) Montrons que  $p_1(A) = \mathbb{R}^*$ . On a :

$$(x, y) \in A \implies x \neq 0 \implies p_1(x, y) = x \in \mathbb{R}^*.$$

Donc  $p_1(A) \subset \mathbb{R}^*$ .

Inversement si  $x \in \mathbb{R}^*$  alors  $(x, \frac{1}{x}) \in A$  et par suite  $x = p_1(x, \frac{1}{x}) \in p_1(A)$ . Donc  $\mathbb{R}^* \subset p_1(A)$ .

Il résulte de ce qui précède que  $p_1(A) = \mathbb{R}^*$ .

Supposons que  $A$  est connexe par arcs dans  $\mathbb{R}^2$ . Comme  $p_1$  est une application continue alors son image  $p_1(A) = \mathbb{R}^*$  est connexe par arcs (car l'image d'un connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs, d'après la proposition 2.3.9 du chapitre II).

Ceci est absurde. Donc  $A$  n'est pas connexe par arcs.

3) Montrons que  $A$  n'est pas ouvert dans  $\mathbb{R}^2$ . Ceci revient à montrer que  $A^c$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

Comme la suite  $(1, 1 - \frac{1}{n})_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge vers  $(1, 1)$ , ses termes sont tous dans  $A^c$  et  $(1, 1) \notin A^c$  alors  $A^c$  n'est pas fermé dans  $\mathbb{R}^2$ . Par suite  $A$  n'est pas un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

4) Montrons que  $A$  est fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .

La fonction  $\varphi : (x, y) \mapsto |xy|$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et  $A = \varphi^{-1}(\{1\})$ . Donc  $A$  est un fermé de  $\mathbb{R}^2$  comme image réciproque d'un fermé par une fonction continue.

5)  $A$  n'est pas compact car il n'est pas borné. En effet on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (n, \frac{1}{n}) \in A \quad \text{et} \quad \|(n, \frac{1}{n})\|_\infty = n.$$

Donc on a :  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|(n, \frac{1}{n})\|_\infty = +\infty$ . D'où la conclusion.

**Exercice 10** Soit  $f$  la fonction de  $\mathbb{R}^n$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1 + \|x\|} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ .

2) Calculer  $f(\mathbb{R}^n)$ .

3) Que peut-on en déduire sur l'image directe d'un ouvert ou d'un fermé par une application continue.

**Correction :**

1) La fonction  $x \mapsto \|x\|$  est continue et positive sur  $\mathbb{R}^n$  et la fonction  $t \mapsto \frac{1}{1+t}$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Donc la fonction  $f$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}^n$  comme composée de deux fonctions continues.

2) Montrons que  $f(\mathbb{R}^n) = ]0, 1]$ .

Il est clair que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad 0 < f(x) \leq 1.$$

Donc  $f(\mathbb{R}^n) \subset ]0, 1]$ . De plus  $f(\mathbb{R}^n)$  est connexe par arcs dans  $\mathbb{R}$  puisque  $\mathbb{R}^n$  est connexe par arcs et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ . Donc  $f(\mathbb{R}^n)$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Comme  $f(0) = 1$  et  $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  alors  $f(\mathbb{R}^n) = ]0, 1]$ .

On peut aussi montrer l'inclusion  $]0, 1] \subset f(\mathbb{R}^n)$  en considérant un vecteur unitaire quelconque  $u$  dans  $\mathbb{R}^n$  et en remarquant que :

$$\forall \alpha \in ]0, 1] \quad f\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}u\right) = \frac{1}{1+\frac{1-\alpha}{\alpha}} = \alpha.$$

3)  $\mathbb{R}^n$  est un ouvert et un fermé de  $\mathbb{R}^n$ , mais  $f(\mathbb{R}^n) = ]0, 1]$  n'est ni un ouvert ni un fermé de  $\mathbb{R}$ . Donc l'image d'un ouvert (resp. un fermé) par une fonction continue n'est pas forcément un ouvert (resp. un fermé).

**Exercice 11** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  tel que  $n \geq 2$ .

1) Montrer que pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$ , l'ensemble  $\mathbb{R}^n - \{a\}$  est connexe par arcs.

2) Montrer que la sphère unité  $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$  de  $\mathbb{R}^n$  est connexe par arcs.

Indication : considérer l'application

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

3) En déduire que si  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ , la sphère  $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - x_0\| = r\}$  est connexe par arcs.

**Correction :**

1) Soit  $a \in \mathbb{R}^n$ . Montrons que  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  est connexe par arcs.

Soit  $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  tels que  $x \neq y$ . (Donc  $x \neq a$  et  $y \neq a$ ).

Soit le segment de  $\mathbb{R}^n$  :  $[x, y] = \{(1 - \lambda)x + \lambda y \mid \lambda \in [0, 1]\}$ . On distingue les deux cas suivants :

Premier cas : Si  $a \notin [x, y]$  alors il est clair que  $[x, y] \subset \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$ .

Donc  $[x, y]$  est un arc qui joint  $x$  à  $y$ .

Rappelons que dans ce cas, le chemin joignant  $x$  à  $y$  associé à  $[x, y]$  est l'application continue

$$\begin{aligned}\gamma_1 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t &\longmapsto (1-t)x + ty.\end{aligned}$$

Il est clair que

$$[x, y] = \gamma_1([0, 1]), \quad \gamma_1(0) = x \quad \text{et} \quad \gamma_1(1) = y.$$

Deuxième cas : Supposons maintenant que  $a \in [x, y]$ . Soit  $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  tel que  $c \notin \mathcal{D}_{x,y}$  où

$$\mathcal{D}_{x,y} = \{(1-t)x + ty \in \mathbb{R}^n \mid t \in \mathbb{R}\}$$

est la droite passant par  $x$  et  $y$ . Comme  $a \neq x$ , on vérifie aisément que  $\mathcal{D}_{x,y} = \mathcal{D}_{a,x}$ .

D'autre part,  $a \notin [x, c]$ . Sinon, il existe  $t \in ]0, 1]$  tel que  $a = (1-t)x + tc$  puisque  $a \neq x$ . On a alors :

$$c = \frac{1}{t}a + \frac{t-1}{t}x \in \mathcal{D}_{a,x} = \mathcal{D}_{x,y} \quad (\text{car } \frac{1}{t} + \frac{t-1}{t} = 1).$$

Ceci est absurde et par suite  $a \notin [x, c]$ . On établit de manière similaire que  $a \notin [c, y]$ .

Par suite  $[x, c] \cup [c, y]$  est un arc dans  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  qui joint  $x$  à  $y$ .

Rappelons que dans ce cas, le chemin joignant  $x$  à  $y$  associé à  $[x, c] \cup [c, y]$  est l'application continue

$$\begin{aligned}\gamma_2 : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}^n \setminus \{a\} \\ t &\longmapsto \begin{cases} (1-2t)x + 2tc & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}] \\ (2-2t)c + (2t-1)y & \text{si } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}.\end{aligned}$$

Il est clair que

$$[x, c] \cup [c, y] = \gamma_2([0, 1]), \quad \gamma_2(0) = x \quad \text{et} \quad \gamma_2(1) = y.$$

Il résulte des deux cas précédents que  $\mathbb{R}^n \setminus \{a\}$  est connexe par arcs.

2) Considérons l'application

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto \frac{x}{\|x\|}.\end{aligned}$$

Montrons que :  $g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = S(0, 1)$ .

L'inclusion directe  $g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) \subset S(0, 1)$  est immédiate puisque

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \quad \|g(x)\| = \left\| \frac{x}{\|x\|} \right\| = 1.$$

Inversement, si  $x \in S(0, 1)$  alors  $x \neq 0$  et  $g(x) = x$ . Donc  $x \in g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  et par suite

$$S(0, 1) \subset g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}).$$

Il s'ensuit que  $g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = S(0, 1)$ .

D'autre part, les applications  $x \longmapsto x$  et  $x \longmapsto \|x\|$  sont trivialement continues sur  $\mathbb{R}^n$  et on a :

$$\|x\| \neq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Donc  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  (rapport de deux fonctions continues).

Comme  $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  est connexe par arcs, d'après 1), alors  $S(0, 1) = g(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$  est connexe par arcs.

3) Soient  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ . L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\longmapsto rx + x_0 \end{aligned}$$

est continue sur  $\mathbb{R}^n$  comme somme d'une application linéaire et d'une fonction constante (c'est une fonction affine).

D'autre part, on a :  $f(S(0, 1)) = S(x_0, r)$ . En effet on a, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  :

$$\begin{aligned} \bullet x \in S(0, 1) &\implies \|f(x) - x_0\| = \|rx\| = r\|x\| = r \\ &\implies f(x) \in S(x_0, r), \\ \bullet x \in S(x_0, r) &\implies \left\| \frac{1}{r}(x - x_0) \right\| = 1 \text{ et } x = f\left(\frac{1}{r}(x - x_0)\right) \in f(S(0, 1)). \end{aligned}$$

Par suite  $f(S(0, 1)) = S(x_0, r)$ . Comme  $S(0, 1)$  est connexe par arcs et  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^n$ , la sphère  $S(x_0, r)$  est connexe par arcs.

**Exercice 12** Montrer que les deux parties

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y = \frac{1}{x} \right\} \text{ et } B = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0 \text{ et } y = 0 \right\}$$

de  $\mathbb{R}^2$  sont homéomorphes.

**Correction :** Il suffit de montrer que  $A$  et  $B$  sont homéomorphes à  $]0, +\infty[$ .

Il est clair que l'application

$$\begin{aligned} f : ]0, +\infty[ &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto (x, 0) \end{aligned}$$

est une bijection. De plus elle est continue sur  $]0, +\infty[$  puisque ses composantes le sont. Sa réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : B &\longrightarrow ]0, +\infty[ \\ (x, 0) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est continue sur  $B$  car c'est la restriction de la projection  $p_1$  sur  $B$ . Par suite  $B$  et  $]0, +\infty[$  sont homéomorphes.

D'autre part, il est clair que l'application

$$\begin{aligned} g : ]0, +\infty[ &\longrightarrow A \\ x &\longmapsto \left(x, \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

est une bijection. De plus elle est continue sur  $]0, +\infty[$  puisque ses composantes le sont. Sa réciproque

$$\begin{aligned} g^{-1} : A &\longrightarrow ]0, +\infty[ \\ \left(x, \frac{1}{x}\right) &\longmapsto x \end{aligned}$$

est continue sur  $A$  car c'est la restriction de la projection  $p_1$  sur  $A$ . Par suite  $A$  et  $]0, +\infty[$  sont homéomorphes.

Il résulte de ce qui précède que  $A$  et  $B$  sont homéomorphes.

**Exercice 13** Soit l'application linéaire

$$\begin{aligned} L : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto (x + y, x - y). \end{aligned}$$

Déterminer la norme  $\|L\|$  de  $L$  pour chacune des trois normes usuelles de  $\mathbb{R}^2$ .

**Correction :**

► On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_1$ . Alors on a, d'après le cours :

$$\|L\| = \sup_{\|(x,y)\|_1=1} \|L(x,y)\|_1.$$

D'autre part, on a pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\|(x, y)\|_1 = |x| + |y| \quad \text{et} \quad \|L(x, y)\|_1 = \|(x + y, x - y)\|_1 = |x + y| + |x - y|.$$

De plus on vérifie aisément que

$$\|L(x, y)\|_1 = \|L(-x, y)\|_1 = \|L(x, -y)\|_1 = \|L(-x, -y)\|_1 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Il s'ensuit que

$$\|L\| = \sup_{\substack{x+y=1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} \|L(x, y)\|_1 = \sup_{0 \leq x \leq 1} [1 + |2x - 1|] = 1 + \sup_{0 \leq x \leq 1} |2x - 1| = 2.$$

► On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_2$ . Alors on a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\|L(x, y)\|_2 = \|(x + y, x - y)\|_2 = \sqrt{(x + y)^2 + (x - y)^2} = \sqrt{2} \|(x, y)\|_2.$$

Il en résulte que

$$\|L\| = \sup_{\|(x,y)\|_2=1} \|L(x,y)\|_2 = \sup_{\|(x,y)\|_2=1} \sqrt{2} \|(x,y)\|_2 = \sqrt{2}.$$

► On munit  $\mathbb{R}^2$  de la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . Alors on a, pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\|L(x, y)\|_\infty = \|(x + y, x - y)\|_\infty = \max(|x + y|, |x - y|).$$

Comme pour la norme  $\|\cdot\|_1$  on vérifie facilement que

$$\|L(x, y)\|_\infty = \|L(-x, y)\|_\infty = \|L(x, -y)\|_\infty = \|L(-x, -y)\|_\infty \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

On a alors

$$\|L\| = \sup_{\|(x,y)\|_\infty=1} \|L(x,y)\|_\infty = \sup_{\substack{\max(x,y)=1 \\ x \geq 0, y \geq 0}} [\max(x + y, |x - y|)] \leq 2.$$

D'autre part, on a :

$$\|(1, 1)\|_{\infty} = 1 \quad \text{et} \quad \|L(1, 1)\|_{\infty} = 2.$$

Donc  $\|L\| = 2$ .

Remarque : La norme d'une application linéaire dépend des normes choisies.

### Exercices de révision

**Exercice 14** Déterminer et représenter les domaines de définition des fonctions suivantes :

$$i) f(x, y) = \sqrt{\sin(x^2 + y^2)} \qquad iii) f(x, y, z) = \frac{x^2 \sqrt{y-2}}{\ln(z-3)}$$

$$ii) g(x, y) = \sqrt{y \cos x} \qquad vi) f(x, y, z) = \ln(xyz).$$

**Exercice 15** Etudier l'existence des limites suivantes au point  $(0, 0)$  :

$$\begin{aligned} i) f(x, y) &= \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} & ii) f(x, y) &= \frac{e^{xy} - 1}{x^2 + y^2} \\ iii) g(x, y) &= \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & iv) f(x, y) &= (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{x^2 + y^2}\right) \\ v) f(x, y) &= \frac{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}{y} \sin y & vi) f(x, y) &= \left(\sqrt{xy + 2}, \ln|x|\right). \end{aligned}$$

**Exercice 16** Soit l'ensemble

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 5 \text{ et } 1 \leq y \leq 2\}.$$

Montrer que  $A$  est un compact.

**Exercice 17** Soit la fonction  $x \mapsto f(x, y) = \frac{x^2 y}{x + y}$ .

- 1) Calculer la limite au point  $(0, 0)$  de  $f$  suivant la direction  $y = \alpha x$  ( $\alpha \neq -1$ ).
- 2) Tracer la courbe représentative  $(C)$  de la fonction  $x \mapsto \varphi(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$  sur  $] -1, 1[$  ainsi que sa tangente en 0.
- 3) Calculer la limite au point  $(0, 0)$  de  $f$  suivant la courbe  $(C)$ .
- 4) Conclure.

**Exercice 18** Etudier la continuité de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x^2 & \text{si } y \geq x^2 \\ 0 & \text{si } y < x^2. \end{cases}$$

**Exercice 19** Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^3 e^{-(x^2 + y^2)}}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) i) Vérifier que :  $|f(x, y)| \leq |f(0, y)| \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ .  
 ii) Montrer que  $f(\mathbb{R}^2)$  est un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ .
- 3) Montrer que  $f(\mathbb{R}^2) = \left[-\frac{1}{\sqrt{2e}}, \frac{1}{\sqrt{2e}}\right]$ .

**Exercice 20** Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une application réelle et soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par :

$$f(x, y) = \varphi(x) - y \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- 1) Montrer que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  si et seulement si  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) On suppose que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
 a) Montrer que les ensembles

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \varphi(x)\} \quad \text{et} \quad F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) \leq y\}$$

sont fermés dans  $\mathbb{R}^2$  et que l'ensemble

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi(x) < y\}$$

est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

b) Montrer que  $G$  est connexe par arcs.

(Considérer l'application  $\psi : x \mapsto (x, \varphi(x))$  définie sur  $\mathbb{R}$ .)

- 3) a) Soient  $X = (x, y)$  et  $X' = (x', y')$  deux points distincts de  $\mathbb{R}^2$ . Vérifier que :

$$[X, X'] = \{(tx + (1-t)x', ty + (1-t)y') \mid t \in [0, 1]\}.$$

b) On suppose maintenant que  $\varphi$  est convexe, c'est à dire

$$\varphi(tx + (1-t)y) \leq t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Montrer que  $F$  est connexe par arcs.

**Exercice 21** Soit l'ensemble

$$A = \{(t, \sin t) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}.$$

- 1) Montrer que l'ensemble  $A$  n'est ni ouvert ni fermé dans  $\mathbb{R}^2$ .
- 2) Déterminer l'adhérence  $\bar{A}$  de  $A$ . Justifier votre réponse.
- 3) Montrer que  $A$  est une partie connexe par arcs de  $\mathbb{R}^2$ .
- 4) Montrer que  $\bar{A}$  n'est pas connexe par arcs dans  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 22** On munit  $\mathbb{R}^n$  d'une norme  $\|\cdot\|$ .

- 1) Montrer que dans  $\mathbb{R}^n$ , toutes les boules ouvertes sont homéomorphes.
- 2) Montrer que toutes les boules fermées sont homéomorphes.
- 3) Montrer que la boule ouverte  $B(O, 1)$  et  $\mathbb{R}^n$  sont homéomorphes.