

# CONTROL AUTOMATICO



## CAPITULO III

### MODELOS MATEMATICOS DE LOS SISTEMAS VARIABLES DE ESTADO

JUAN F. DEL POZO L.

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Las Variables de Estado de un Sistema Dinámico.
- ▶ Ecuación Diferencial del Vector de Estado.
- ▶ Modelos de Estado de Grafos de Flujo de Señal.
- ▶ Estabilidad de los Sistemas en el Dominio del Tiempo.
- ▶ La Respuesta en el Tiempo y la Matriz de Transición.
- ▶ Análisis de Modelos con Variables de Estado usando MATLAB.

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

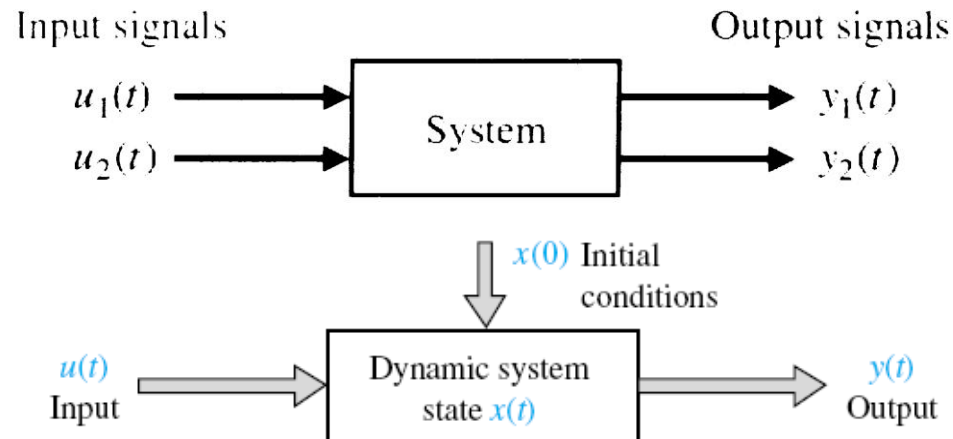
## ► INTRODUCCION

- Proporciona una manera de analizar los sistemas en el “*Dominio del Tiempo*”.
- Los sistemas físicos serán descritos por Ecuaciones Diferenciales Ordinarias.
- Utilizando un set no único de variables, conocidas como “Variables de Estado”, se puede obtener un conjunto de Ecuaciones diferenciales de Primer Orden.
- Se pueden incluir sistemas no lineales y variantes en el tiempo.
- Podemos tratar sistemas de múltiple entradas y múltiples salidas.
- Permite notación matricial y la aplicación de métodos computacionales para su solución y análisis.

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► VARIABLES DE ESTADO

- El estado de un sistema es un set de variables tal que su conocimiento, así como las funciones de entrada y las ecuaciones que describen su dinámica; permiten determinar su estado futuro y las salidas del sistema.
- Pueden haber varios conjuntos alternos de Variables de Estado.
- Una elección ampliamente usada, es un conjunto de Variables de Estado que puedan medirse fácilmente; es decir, que sean observables.



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► Sistema mecánico

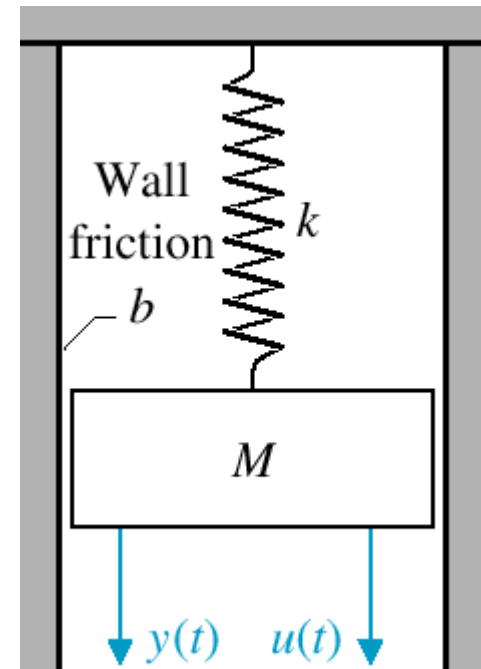
- M Masa
- k Resorte
- b Fricción

$$M \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t)$$

- Si defino el set de variables de estado:
  - $x_1$  Desplazamiento
  - $x_2$  Velocidad

$$x_1(t) = y(t)$$

$$x_2(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- Por lo tanto, el sistema puede ser descrito por un set de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{b}{M}x_2 - \frac{k}{M}x_1 + \frac{1}{M}u$$

- Usando notación matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{M} & -\frac{b}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{M} \end{bmatrix} u$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ El motor de corriente continua.
  - Las ecuaciones que describen al motor son:

$$\Phi(t) = K_f \cdot i_f$$

$$T_m(t) = K_1 \cdot \Phi(t) \cdot i_a(t)$$

$$v_f(t) = R_f \cdot i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt}$$

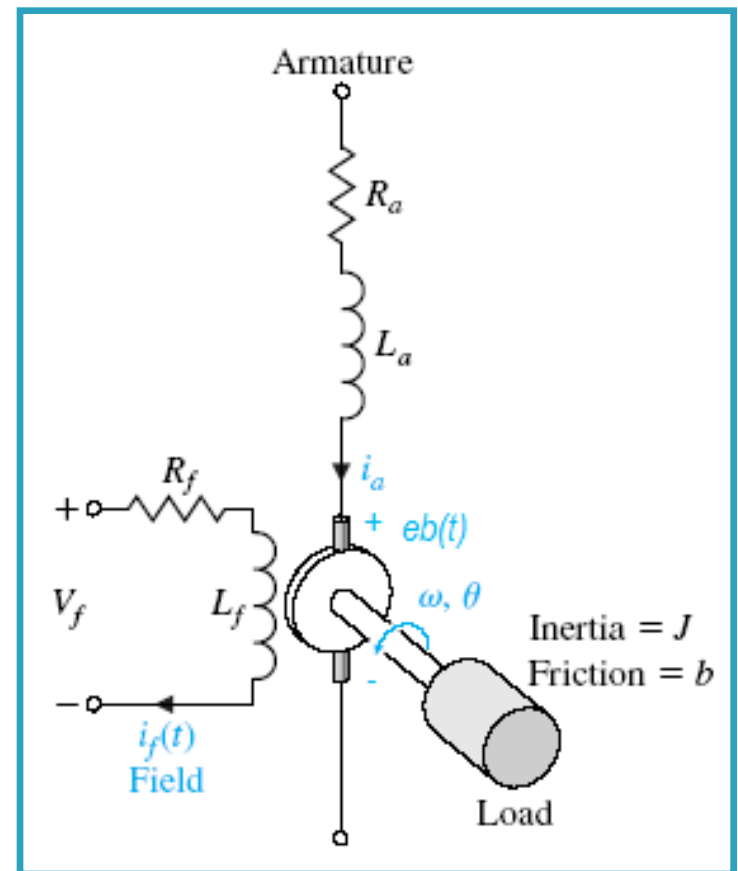
$$T_m(t) = T_L(t) + T_d(t)$$

$$T_L(t) = J \frac{d\omega(t)}{dt} + b \cdot \omega(t)$$

$$v_a(t) = R_a \cdot i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + V_b(t)$$

$$e_b(t) = K_b \cdot \omega(t)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega(t)$$



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► El motor de corriente continua.

- Debido a que el torque del motor es una ecuación no lineal, al linearizarla se generan dos situaciones:

- $T_m(t) = K_1 K_f i_f(t) \cdot i_a(t)$

- A) *Control de Campo.*

- *Corriente de campo controla el motor, la corriente de armadura se mantiene constante.*

- B) *Control de Armadura.*

- *Corriente de armadura controla el motor, la corriente de campo se mantiene constante.*



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► El motor de corriente continua.

### A) Control de Campo.

$$\frac{di_f(t)}{dt} = -\frac{R_f}{L_f} \cdot i_f(t) + \frac{1}{L_f} \cdot v_f(t)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{b}{J} \cdot \omega(t) + \frac{1}{J} \cdot T_L(t)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

$$T_L(t) = T_m(t) - T_d(t) = K_{mf} \cdot i_f(t) - T_d(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_f \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ \frac{K_{mf}}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_f \\ \omega \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_f} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_f + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} T_d$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► El motor de corriente continua.

### B) Control de Armadura.

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} \cdot i_a(t) + \frac{1}{L_a} \cdot v_a(t) - \frac{1}{L_a} \cdot v_b(t) \quad ; \quad v_b(t) = K_b \cdot \omega(t)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{b}{J} \cdot \omega(t) + \frac{1}{J} \cdot T_L(t)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

$$T_L(t) = T_m(t) - T_d(t) = K_{ma} \cdot i_a(t) - T_d(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ \frac{K_{ma}}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} v_a + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} T_d$$

# ► El motor de corriente continua.

## ◦ Caso general

- Se han linearizado las ecuaciones del voltaje Contra-electromotriz y el Torque motor

$$\frac{di_a(t)}{dt} = -\frac{R_a}{L_a} \cdot i_a(t) + \frac{1}{L_a} \cdot v_a(t) - \frac{1}{L_a} \cdot v_b(t) \quad ; \quad v_b(t) = K_f \cdot i_f(t) + K_b \cdot \omega(t)$$

$$\frac{di_f(t)}{dt} = -\frac{R_f}{L_f} \cdot i_f(t) + \frac{1}{L_f} \cdot v_f(t)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = -\frac{b}{J} \cdot \omega(t) + \frac{1}{J} \cdot (T_m(t) - T_d(t)) \quad ; \quad T_m(t) = K_{ma} \cdot i_a(t) + K_{mf} \cdot i_f(t)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = \omega(t)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{i}_f \\ \dot{\omega} \\ \dot{\Theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{K_f}{L_a} & -\frac{K_b}{L_a} & 0 \\ 0 & -\frac{R_f}{L_f} & 0 & 0 \\ \frac{K_{ma}}{J} & \frac{K_{mf}}{J} & -\frac{b}{J} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ i_f \\ \omega \\ \Theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{L_a} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_a \\ v_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{J} \\ 0 \end{bmatrix} T_d$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Ecuación Diferencial del Vector de Estados.
  - El estado de un sistema se describe por un conjunto de ecuaciones diferenciales de primer orden en función de las variables de estado ( $x_1, x_2, \dots, x_n$ ).
  - En notación matricial:
    - A            Matriz de Estado ( $n \times n$ )
    - B            Matriz de Entrada o Control ( $m \times n$ )
    - x            Vector Columna de estados de ( $n$ ) elementos
    - u            Vector Columna de entrada o control de ( $m$ ) elementos
  - Muchas veces las variables de estado no son las señales deseadas de salida del sistema.
  - Es necesario encontrar una relación lineal con las variables de estado y las señales de entrada.
  - En forma general:
    - C            Matriz de Salida ( $r \times n$ )
    - D            Matriz de Transmisión Directa ( $r \times m$ )
    - y            Vector Columna de salida de ( $r$ ) elementos

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Ecuación Diferencial del Vector de Estados.
- ▶ En notación matricial:

$$\dot{[x]} = [A][x] + [B][u]$$

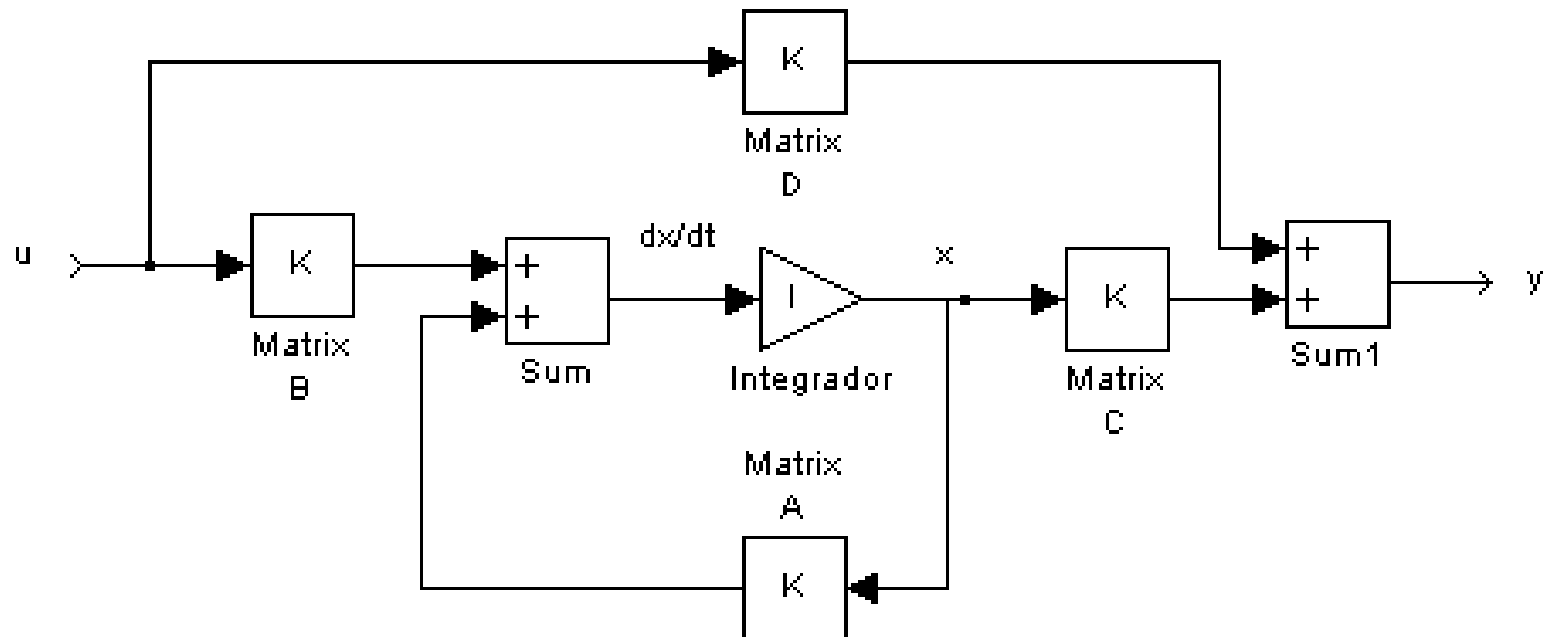
$$[y] = [C][x] + [D][u]$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ d_{n1} & d_{n2} & \dots & d_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Ecuación Diferencial del Vector de Estados.
  - Representación gráfica del sistema.



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados.
  - La solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados puede ser obtenida de la misma manera que en el caso de la ecuación diferencial de primer orden.

- Si:

$$\dot{[x]} = [A][x] + [B][u]$$

$$[x(0)] \text{ _"condiciones _iniciales"}$$

- La solución general tendrá la forma:

$$[x(t)] = e^{[A]t} [x(0)] + \int_0^t e^{[A(t-\tau)]} [B][u(\tau)] d\tau$$

- Obteniendo la transformada de Laplace y reordenando:

$$\begin{aligned} [X(s)] &= [sI - A]^{-1} [x(0)] + [sI - A]^{-1} [B][U(s)] \\ &= \Phi(s)[x(0)] + \Phi(s)[B][U(s)] \end{aligned}$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados
  - Denominemos como “*Matriz de Transición o Fundamental*” a la matriz:

$$[sI - A]^{-1} = [\Phi(s)] \rightarrow [\phi(t)] = e^{[A]t}$$

- Entonces, aplicando la transformada inversa de Laplace:

$$[x(t)] = \phi(t)[x(0)] + \int_0^t \phi(t - \tau)[B][u(\tau)]d\tau$$

- Para la solución del sistema no forzado:

$$\text{para: } [u(t)] = 0 \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11}(t) & \phi_{12}(t) & .. & \phi_{1n}(t) \\ \phi_{21}(t) & \phi_{22}(t) & .. & \phi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \phi_{n1}(t) & \phi_{n2}(t) & .. & \phi_{nn}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \\ \vdots \\ x_n(0) \end{bmatrix}$$



# Ejemplo:

- Obtener la “*Matriz de Transición o Fundamental*” a partir del Gráfico de Flujo de Señal de Estado.

- Tomemos el circuito RLC:

- $x_1$  Voltaje del Capacitor :  $v_c$
- $x_2$  Corriente del Inductor:  $i_L$
- $x_1(0) = v_c(0)$
- $x_2(0) = i_L(0)$

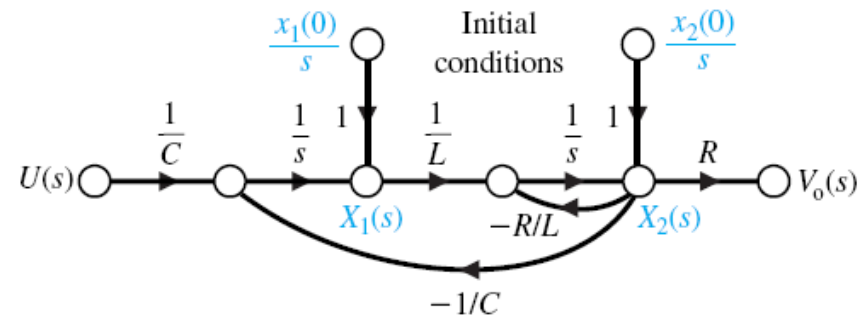
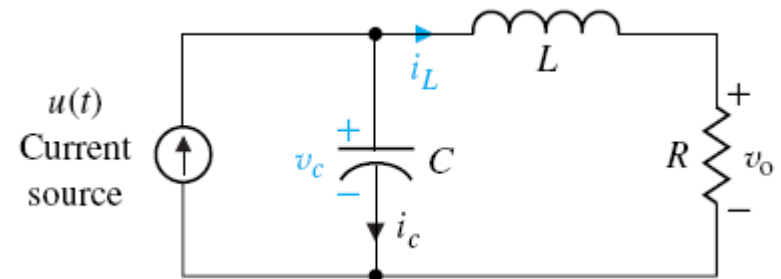
La Ecuación de Estados es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad v_o = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$R=3 \quad ; \quad L=1 \quad ; \quad C=0.5$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \quad ; \quad [B] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad ; \quad [C] = \begin{bmatrix} 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- Obteniendo el Gráfico de Flujo de Señal de Estado correspondiente:



## Ejemplo (continuación):

- Obtener la “*Matriz de Transición o Fundamental*” a partir del Gráfico de Flujo de Señal de Estado.

- Del circuito RLC tomamos:

$$[u(t)] = 0 \quad ; \quad [X(s)] = [\Phi(s)][x(0)] \quad ; \quad [\Phi(s)] = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) \end{bmatrix}$$

- Cada elemento de la Matriz de Transición se puede evaluar de:

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{X_i(s)}{x_j(0)} \bigg|_{xk \neq j=0}^{U(s)=0} \quad \text{Segun\_Mason:} \quad \frac{X_i(s)}{x_j(0)} = T_{ij} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n P_{ijk} \cdot \Delta_{ijk}$$

- Aplicando Mason en el Gráfico de Flujo de Señal de Estado tenemos:

$$\Phi_{ij}(s) = \frac{P_{ij}\Delta_{ij}(s)}{\Delta(s)} \bigg|_{xk \neq j=0}^{U(s)=0} \quad \rightarrow \quad \Delta(s) = 1 + \frac{3}{s} + \frac{2}{s^2}$$

$$P_{11}\Delta_{11}(s) = \frac{1}{s} \left( 1 + \frac{3}{s} \right) \quad ; \quad P_{12}\Delta_{12}(s) = \frac{2}{s^2} \quad ; \quad P_{21}\Delta_{21}(s) = \frac{1}{s^2} \quad ; \quad P_{22}\Delta_{22}(s) = \frac{1}{s}$$

- Los elementos de la Matriz de Transición:

$$\Phi_{11}(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2} \quad ; \quad \Phi_{12}(s) = \frac{-2}{s^2+3s+2}$$

$$\Phi_{21}(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} \quad ; \quad \Phi_{22}(s) = \frac{s}{s^2+3s+2}$$

## Ejemplo (continuación):

- ▶ Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados (continuación).
  - A) Solución de la “*Matriz de Transición o Fundamental*” utilizando MATLAB, en el dominio de la variable compleja “s”.
    - Usar las funciones:
      - inv(A)
      - sym:

Ao =

$$\begin{bmatrix} s & 2 \\ -1 & s+3 \end{bmatrix}$$

Phi =

$$\begin{bmatrix} (s+3)/(s^2+3s+2) & -2/(s^2+3s+2) \\ 1/(s^2+3s+2) & s/(s^2+3s+2) \end{bmatrix}$$

```
1 -      clc,clear
2      %   Figura 3.4
3      %   Matriz ded Transición 'Phi'
4      %   Forma numérica
5      %   Ao = [sI -A]
6      %   Phi = inv(Ao)
7 -      s=sym('s');
8 -      A=[0 -2;1 -3]
9 -      B=[2;0]
10 -     C=[0 3]
11 -     D=[0]
12 -     Ao=[s 0;0 s]-A
13 -     Phi=inv(Ao)
```

## Ejemplo (continuación):

### ► Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados (continuación).

- A) Solución de la “*Matriz de Transición o Fundamental*” utilizando MATLAB, en el dominio de la variable compleja “s”.

- Usar las funciones:

- `inv(A)`
- `sym:`

A =  
 $\begin{bmatrix} 0, -1/C \\ 1/L, -R/L \end{bmatrix}$

B =  
 $\begin{bmatrix} 1/C \\ 0 \end{bmatrix}$

C =  
 $\begin{bmatrix} 0, R \end{bmatrix}$

D =  
 $\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}$

Ao =  
 $\begin{bmatrix} s, 1/C \\ -1/L, s+R/L \end{bmatrix}$

Phi =  
 $\begin{bmatrix} (s*L+R)*C/(s^2*C*L+s*C*R+1), & -1/(s^2*C*L+s*C*R+1)*L \\ 1/(s^2*C*L+s*C*R+1)*C, & s/(s^2*C*L+s*C*R+1)*C*L \end{bmatrix}$

```
1 - clc,clear
2 - % Figura 3.4
3 - % Matriz ded Transición 'Phi'
4 - % Forma literal
5 - % Ao = [sI -A]
6 - % Phi = inv(Ao)
7 - s=sym('s');
8 - C=sym('C');
9 - L=sym('L');
10 - R=sym('R');
11 - A=[0 -1/C;1/L -R/L]
12 - B=[1/C;0]
13 - C=[0 R]
14 - D=[0]
15 - Ao=[s 0;0 s]-A
16 - Phi=inv(Ao)
```

## Ejemplo (continuación):

- ▶ Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados (continuación).
  - B) Solución de la “*Matriz de Transición o Fundamental*” utilizando MATLAB, en el dominio del tiempo .
    - Usar las funciones:
      - `expm(A)`
      - `syms`:

```
1 -   clc,clear
2     %   Figura 3.4
3     %   Matriz ded Transición 'Phi'
4     %   Forma numérica
5     %   Ao = [sI -A]
6     %   Phi = inv(Ao)
7 -   s=sym('s');
8 -   A=[0 -2;1 -3]
9 -   B=[2;0]
10 -  C=[0 3]
11 -  D=[0]
12     %   Solución en el tiempo
13 -   syms t;
14 -   Phi=expm(t*A)
```

Phi =

$$\begin{bmatrix} -\exp(-2*t)+2*\exp(-t), & -2*\exp(-t)+2*\exp(-2*t) \\ \exp(-t)-\exp(-2*t), & 2*\exp(-2*t)-\exp(-t) \end{bmatrix}$$

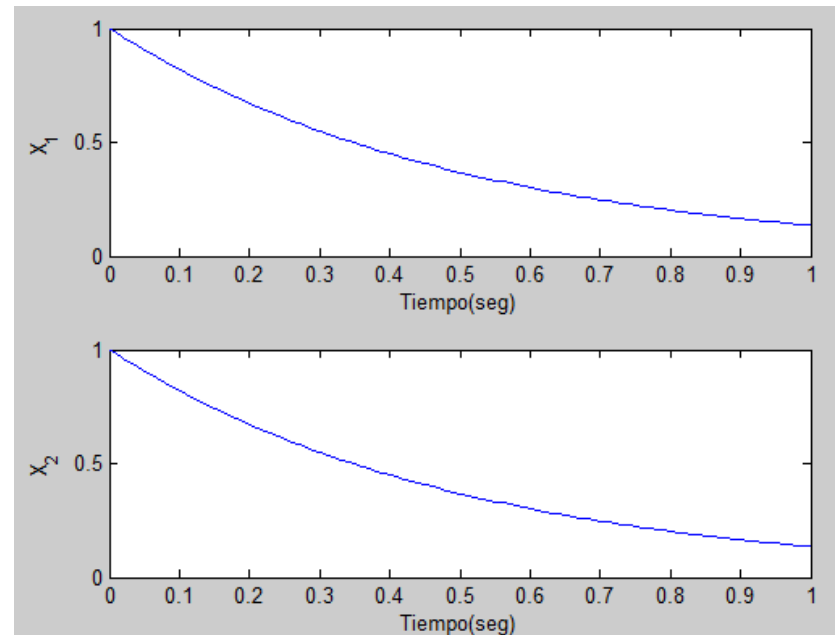
## Ejemplo (continuación):

### ► Solución de la Ecuación Diferencial del Vector de Estados (continuación).

- C) Cálculo de la respuesta en el tiempo para condiciones iniciales diferentes de cero y sin señal de entrada, utilizando MATLAB.

- Usar las funciones:
  - `ss(A,B,C,D)`,
  - `lsim`,
  - `plot`:

```
1 - clc,clear
2 - % Figura 3.4
3 - A=[0 -2;1 -3]
4 - B=[2;0]
5 - C=[0 3]
6 - D=[0]
7 - % Modelo con Variables de Estado
8 - % Solución en el tiempo
9 - % con condiciones iniciales
10 - % y entrada cero
11 - xo=[1 1];
12 - t=[0:0.01:1];
13 - u=0*t;
14 - sys=ss(A,B,C,D);
15 - [y,T,x]=lsim(sys,u,t,xo);
16 - subplot(211), plot(T,x(:,1))
17 - xlabel('Tiempo(seg)'), ylabel('X_1')
18 - subplot(212), plot(T,x(:,2))
19 - xlabel('Tiempo(seg)'), ylabel('X_2')
```



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.

- El Gráfico de Flujo de Señal de un sistema nos proporciona una alternativa para relacionar su Función de Transferencia con un set de Variables de Estado.
- En forma general, la Función de Transferencia de un sistema, para  $n \geq m$  :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \dots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_1s + a_0} \quad ; \quad m \leq n$$

- Comparando esta expresión con la fórmula de Mason:

$$G(s) = \frac{s^{-(n-m)} + b_{m-1}s^{-(n-m+1)} + \dots + b_1s^{-(n-1)} + b_0s^{-n}}{1 + a_{n-1}s^{-1} + \dots + a_1s^{-(n-1)} + a_0s^{-n}}$$

- Caso especial cuando todos los lazos de realimentación se tocan y los Trayectos Directos tocan los lazos.

$$G(s) = \frac{\sum_k P_k \Delta_k}{1 - \sum_q L_q} = \frac{\sum \text{Factores\_de\_Trayectos\_Directos}}{1 + \sum \text{Factores\_de\_Realimentación}}$$

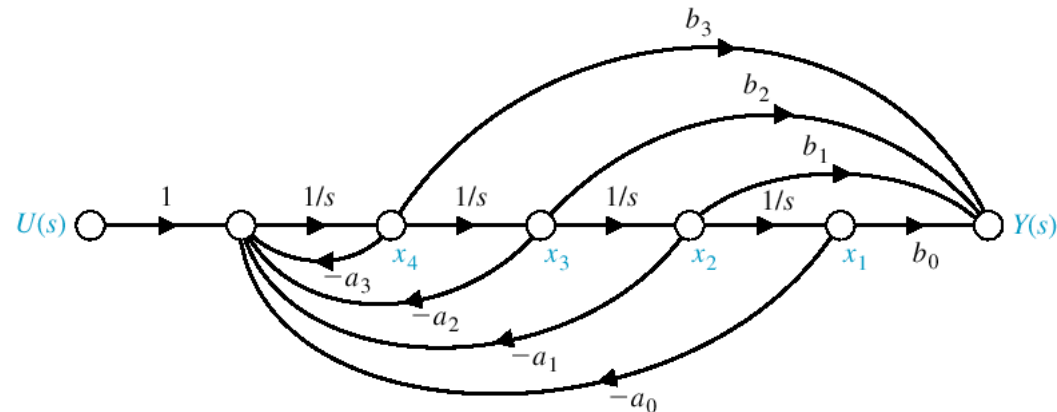
# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.
  - Consideremos el caso de un sistema representado por una función de transferencia de cuarto orden:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

$$G(s) = \frac{b_3 s^{-1} + b_2 s^{-2} + b_1 s^{-3} + b_0 s^{-4}}{1 + a_3 s^{-1} + a_2 s^{-2} + a_1 s^{-3} + a_0 s^{-4}}$$

- “Modelo de Variable de Fase” o “Modelo Canónico controlable”:

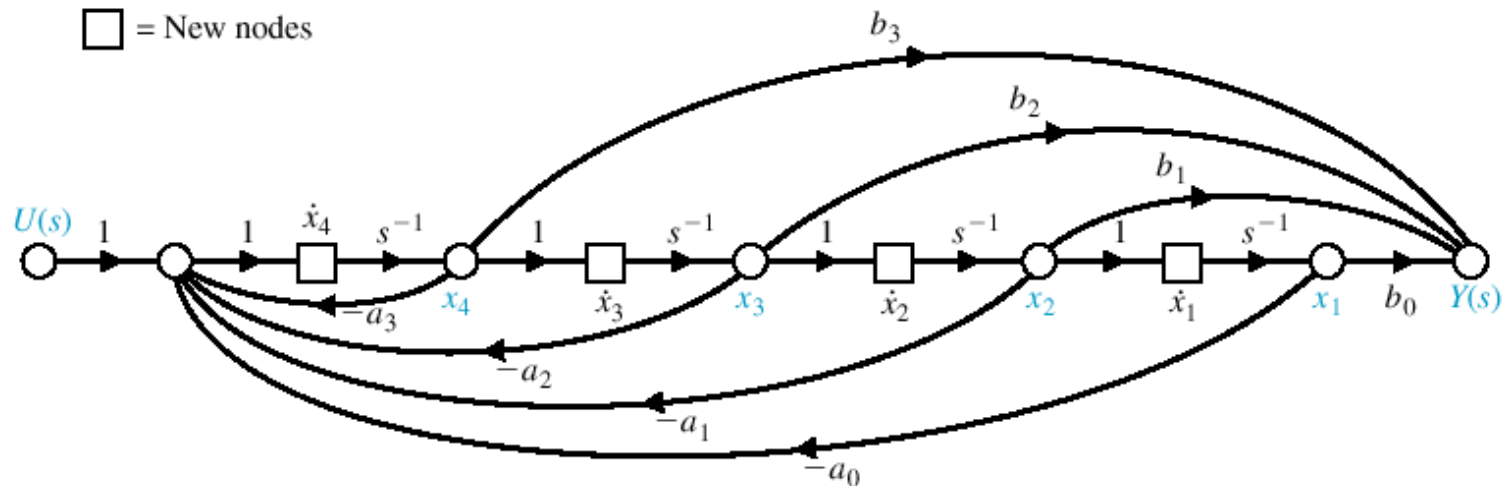


- En la figura se muestran las Variables de Estado que son la salida de cada elemento almacenador de energía; es decir los integradores:
  - $x_1, x_2, x_3, x_4$



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.
  - Introduciendo nuevos nodos en el gráfico con el fin de identificar las derivadas de las variables de estado:



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = x_4$$

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3 - a_3x_4 + u(t)$$

$$y(t) = b_0x_1 + b_1x_2 + b_2x_3 + b_3x_4$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.
  - Entonces, en forma matricial, tenemos su representación en la denominada *“Forma Canónica de Variable de Fase”* o *“Forma Canónica Controlable”* :

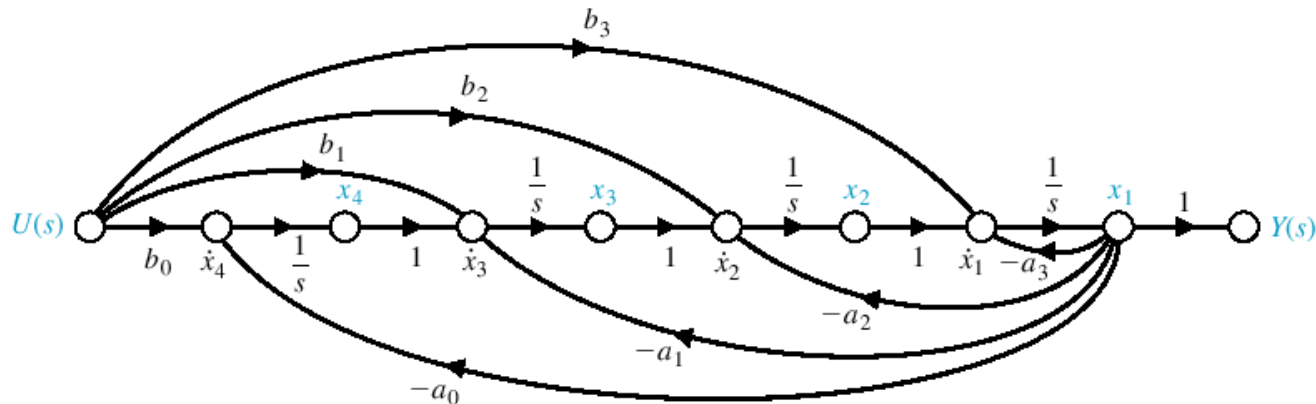
$$[\dot{x}] = [A][x] + [B]u \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

- Para la salida:

$$y = [C][x] \rightarrow y(t) = [b_0 \quad b_1 \quad b_2 \quad b_3] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.
  - La estructura del Gráfico de Flujo de Señal no es la única estructura posible, a continuación tenemos la siguiente alternativa:
  - *“Forma Canónica de Entrada de Prealimentación” o “Forma Canónica Observable”*:



$$\dot{x}_1 = -a_3x_1 + x_2 + b_3u$$

$$\dot{x}_2 = -a_2x_1 + x_3 + b_2u$$

$$\dot{x}_3 = -a_1x_1 + x_4 + b_1u$$

$$\dot{x}_4 = -a_0x_1 + b_0u$$

$$y(t) = x_1$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.
  - Entonces, en forma matricial, tenemos su representación en la denominada "*Forma Canónica de Entrada de Prealimentación*" o "*Forma Canónica Observable*":

$$[\dot{x}] = [A][x] + [B]u \rightarrow \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_3 & 1 & 0 & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_3 \\ b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

- Para la salida, corresponde a la primer variable de estado:

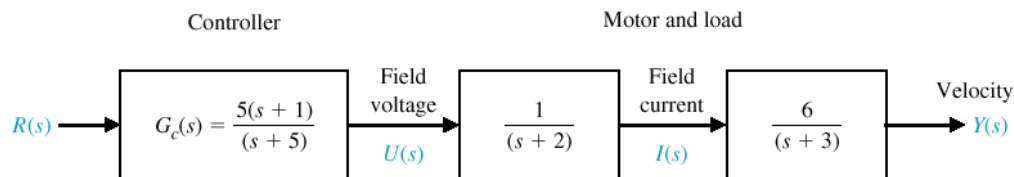
$$y = [C][x] \rightarrow y(t) = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.

- Muchas veces se desea una estructura del Gráfico de Flujo de Señal que nos permita visualizar en forma directa como Variables de Estado las variables físicas reales del sistema; por ejemplo, en el caso de un motor de corriente continua controlado por campo:

- $Y(s) = x_1$  Velocidad
- $I(s) = x_2$  Corriente de Campo
- $U(s)$  Voltaje de Campo



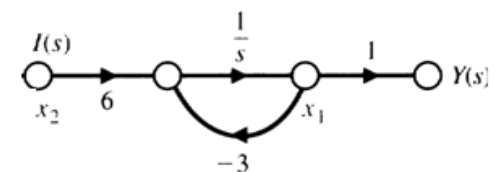
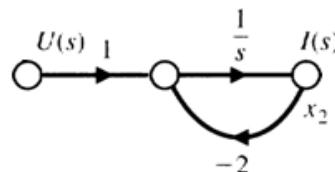
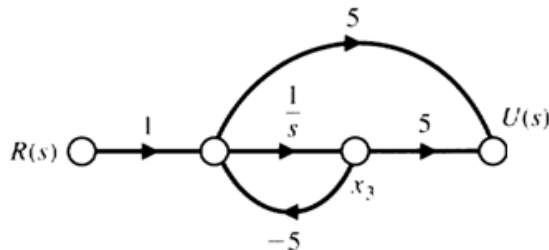
$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 6x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + u$$

$$\dot{x}_3 = -5x_3 + r \quad ; \quad u = 5x_3 + 5r$$

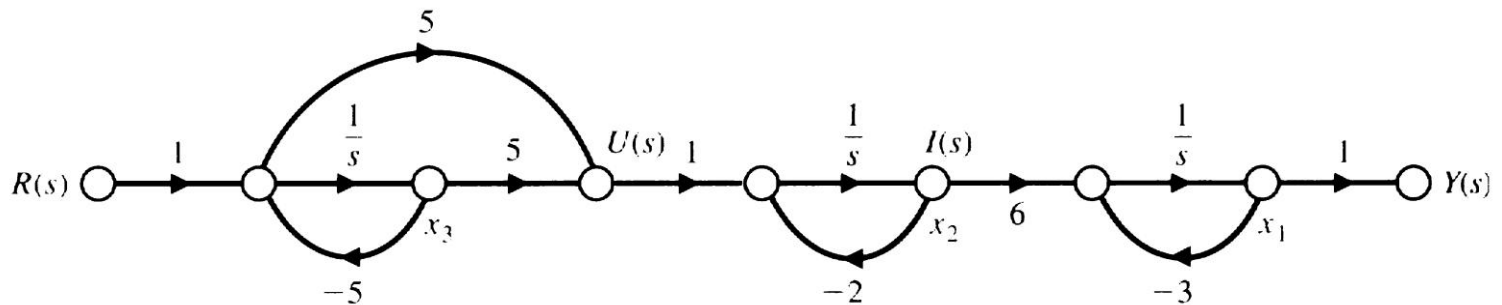
$$y(t) = x_1$$

- Gráfico de Flujo de Señal de cada bloque.



# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- Muchas veces se desea una estructura del Gráfico de Flujo de Señal que nos permita visualizar en forma directa como Variables de Estado las variables físicas reales del sistema; por ejemplo, en el caso de un motor de corriente continua controlado por campo:
  - $Y(s) = x_1$  Velocidad
  - $I(s) = x_2$  Corriente de Campo
  - $U(s) = 5R(s) - 5x_3$  Voltaje de Campo
  - Gráfico de Flujo de Señal de Estado Físico.



$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 6x_2$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 5x_3 + 5r$$

$$\dot{x}_3 = -5x_3 + r$$

$$y(t) = x_1$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.
  - Gráfico de Flujo de Señal de Estado Físico, continuación.
    - A partir de la Función de Transferencia:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{30(s+1)}{(s+5)(s+2)(s+3)}$$

- En forma matricial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 6 & 0 \\ 0 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► Modelo de Gráficos de Flujo de Señal de Estado.

### ◦ Gráfico de Flujo de Señal de Estado, continuación.

- Si representamos la Función de Transferencia mediante su Expansión en Fracciones Parciales:

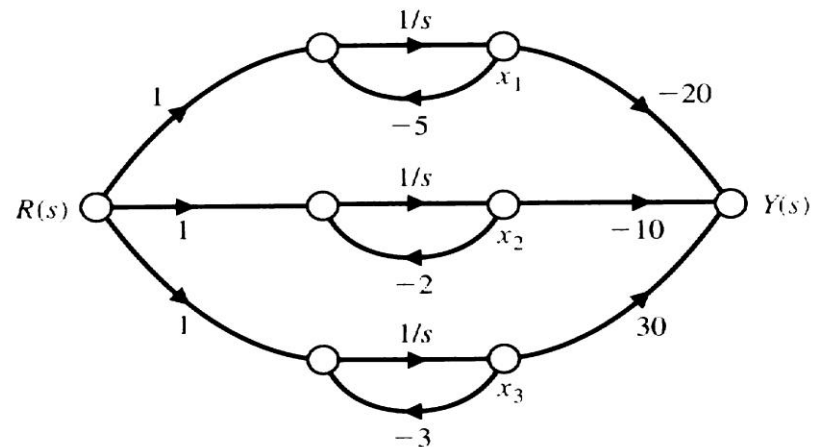
$$G(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{-20}{(s+5)} + \frac{-10}{(s+2)} + \frac{30}{(s+3)}$$

- En forma matricial resulta la Forma Diagonal o Canónica, también conocida como "**Forma Canónica de Jordan**".

- (Nota: las Variables de Estado no son las mismas que en el caso anterior):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad ; \quad y(t) = \begin{bmatrix} -20 & -10 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- El Gráfico de Flujo de Señal de Estado Desacoplado:





# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANFERENCIA A PARTIR DE LA ECUACION DE ESTADOS.

- Trataremos el caso de la obtención de la Función de Transferencia de un sistema con una sola señal de salida y una señal de entrada (SISO).
- En forma general, la Ecuación de Estados para un sistema SISO:

$$\frac{d}{dt}[x(t)] = [A][x(t)] + [B]u(t) \quad ; \quad y(t) = [C][x(t)]$$

- Obteniendo la Transformada de Laplace de la Ecuación de Estados:

$$s[X(s)] = [A][X(s)] + [B]U(s) \quad ; \quad Y(s) = [C][X(s)]$$

- Manipulando algebraicamente las ecuaciones:

$$[sI - A][X(s)] = [B]U(s)$$

$$[X(s)] = \frac{[B]}{[sI - A]}U(s) = [sI - A]^{-1}[B]U(s) = [\Phi][B]U(s)$$

- De donde finalmente obtenemos la Función de Transferencia.

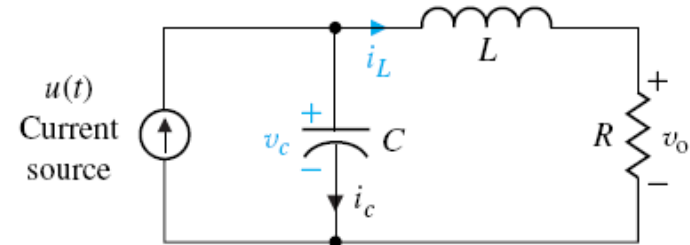
$$Y(s) = [C][\Phi][B]U(s) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = [C][\Phi][B]$$

► OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA A PARTIR DE LA ECUACION DE ESTADOS.

◦ EJEMPLO

- Obtención de la Función de Transferencia de un sistema RLC mostrado en la siguiente figura:

- $x_1$  Voltaje del Capacitor :  $v_c$
- $x_2$  Corriente del Inductor:  $i_L$
- $x_1(0) = v_c(0)$
- $x_2(0) = i_L(0)$



- La Ecuación de Estados para el sistema SISO, es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} u \quad ; \quad y = \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- De acuerdo con el procedimiento, debemos evaluar  $[sI - A]$  y su inversa:

$$[sI - A] = \begin{bmatrix} s & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad ; \quad [\Phi(s)] = [sI - A]^{-1} = \frac{Adj[sI - A]^T}{\Delta(s)} \quad ; \quad [\Phi(s)] = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix}$$

- ▶ OBTENCION DE LA FUNCION DE TRANSFERENCIA A PARTIR DE LA ECUACION DE ESTADOS.
  - EJEMPLO (continuación)
  - De donde finalmente obtenemos la Función de Transferencia.

$$G(s) = \frac{1}{\Delta(s)} \begin{bmatrix} 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{R}{L} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

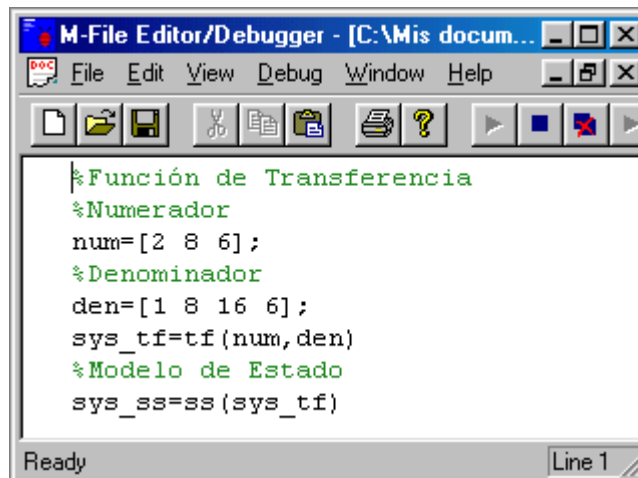
$$\Delta(s) = s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{R}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

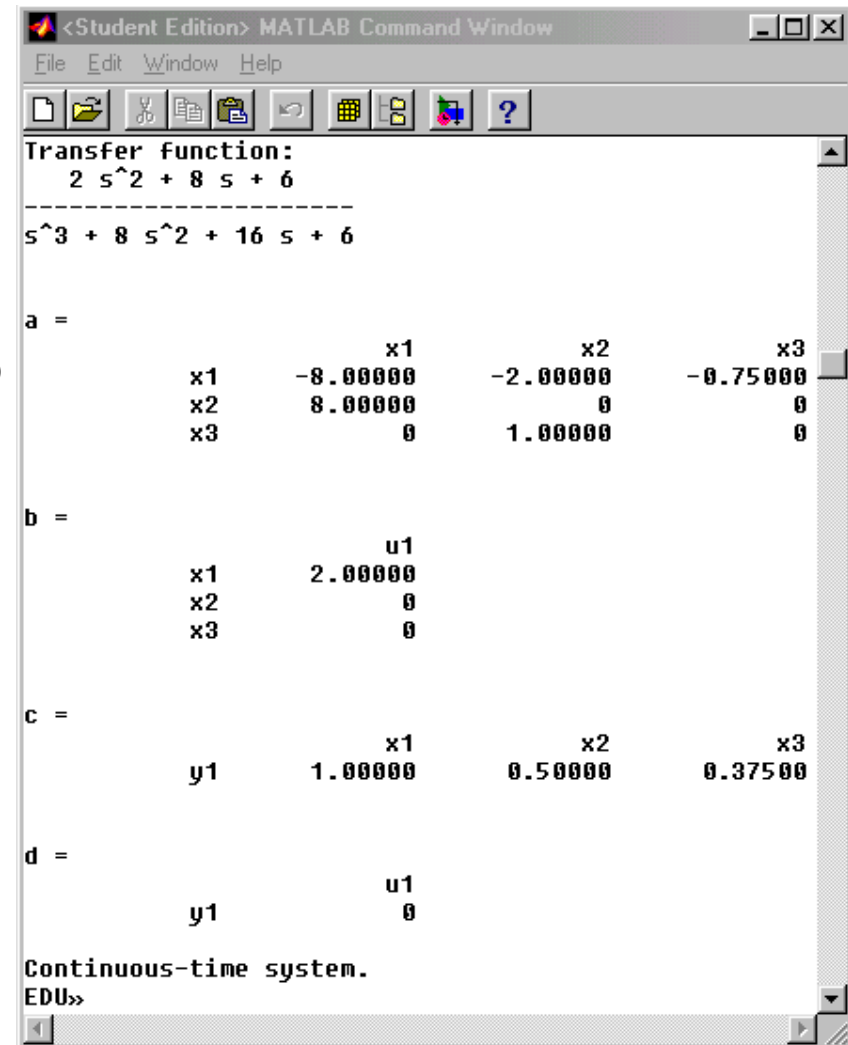
# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

## ► Análisis de los Modelos de Variables de Estado usando MATLAB

- Caso A)
- A partir de un sistema representado por su Función de Transferencia, obtener su Modelo de Estado.
- Utilizar la función:
  - `ss(A,B,C,D)`



```
M-File Editor/Debugger - [C:\Mis docum...
File Edit View Debug Window Help
%Función de Transferencia
%Numerador
num=[2 8 6];
%Denominador
den=[1 8 16 6];
sys_tf=tf(num,den)
%Modelo de Estado
sys_ss=ss(sys_tf)
```



```
<Student Edition> MATLAB Command Window
File Edit Window Help
Transfer function:
      2 s^2 + 8 s + 6
-----
      s^3 + 8 s^2 + 16 s + 6

a =
           x1           x2           x3
      x1   -8.00000   -2.00000   -0.75000
      x2    8.00000    0         0
      x3    0         1.00000    0

b =
           u1
      x1    2.00000
      x2    0
      x3    0

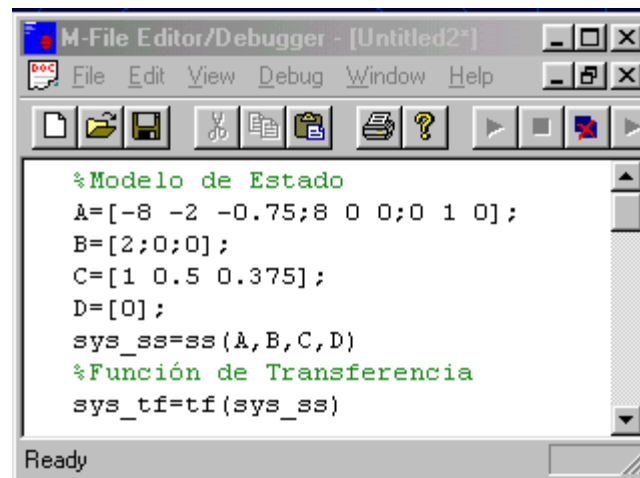
c =
           x1           x2           x3
      y1    1.00000    0.50000    0.37500

d =
           u1
      y1    0

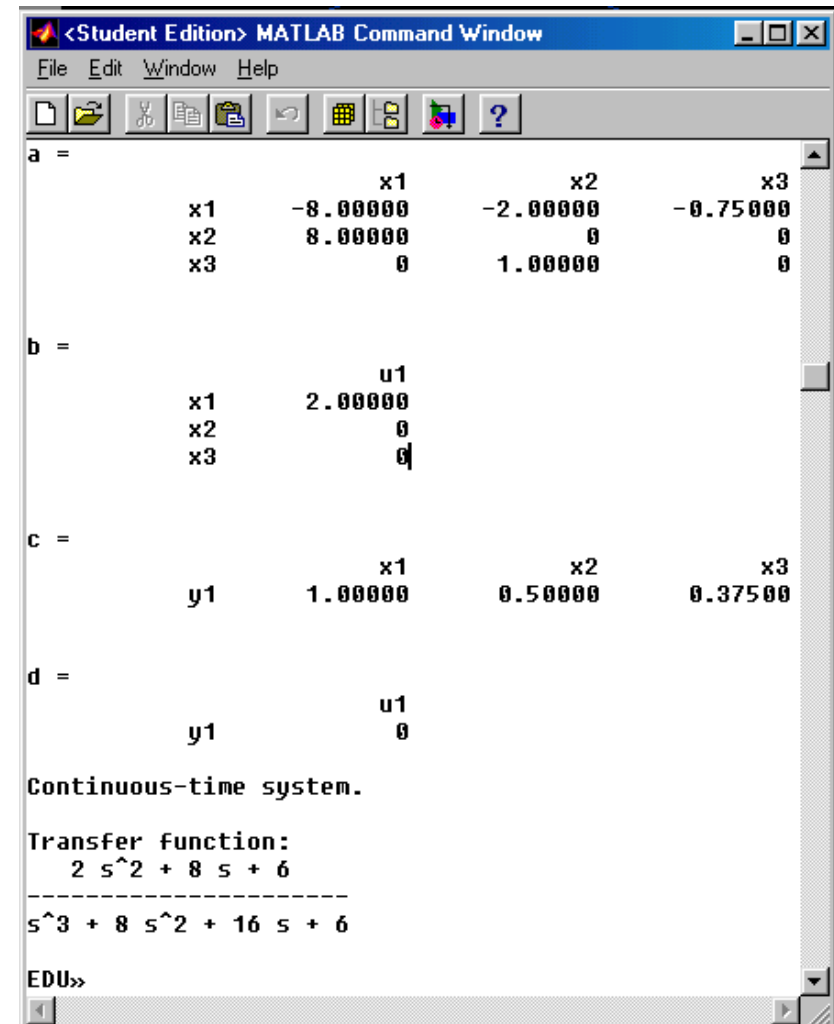
Continuous-time system.
EDU>>
```

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- Análisis de los Modelos de Variables de Estado usando MATLAB
- Caso B)
- A partir de un sistema representado por su Modelo de Estado, obtener su Función de Transferencia.
- Utilizar la función:
  - `tf(sys)`



```
%Modelo de Estado
A=[-8 -2 -0.75;8 0 0;0 1 0];
B=[2;0;0];
C=[1 0.5 0.375];
D=[0];
sys_ss=ss(A,B,C,D)
%Función de Transferencia
sys_tf=tf(sys_ss)
```



```
<Student Edition> MATLAB Command Window
File Edit Window Help
a =
      x1      x1      x2      x3
      x1    -8.00000    -2.00000   -0.75000
      x2     8.00000     0         0
      x3     0         1.00000     0

b =
      u1
      x1    2.00000
      x2     0
      x3     0

c =
      x1      x2      x3
      y1    1.00000    0.50000    0.37500

d =
      u1
      y1     0

Continuous-time system.

Transfer function:
      2 s^2 + 8 s + 6
-----
      s^3 + 8 s^2 + 16 s + 6

EDU>
```

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- Análisis de los Modelos de Variables de Estado usando MATLAB
  - Caso C)
  - Conversión entre diferentes modelos canónicos de Variables de Estado.
  - Utilizar las funciones:
    - `ssdata(sys)`
    - `ss2tf(sys)`
    - `canon(sys,type)`

```

1  % Conversión entre modelos
2  % de Variables de estado
3 - clc, clear
4  % Lazo Abierto
5 - G=zpk([-1 -3],[0 -2 -4],2)
6  % Lazo Cerrado
7 - T=tf(feedback(G,[1]))
8 - T_ss=ss(T)
9 - [A,B,C,D]=ssdata(T)
10 % TF a partir de SS
11 - [num,den]=ss2tf(A,B,C,D)
12 - T=tf(num,den)
13 % Modo Canónico Observable
14 - T_ss_obs=canon(T,'companion')
15 % Modo Canónico Controlable
16 - T_ss_cont=T_ss_obs.'
17 % Modo Canónico Diagonal
18 - T_ss_diag=canon(T,'modal')
    
```

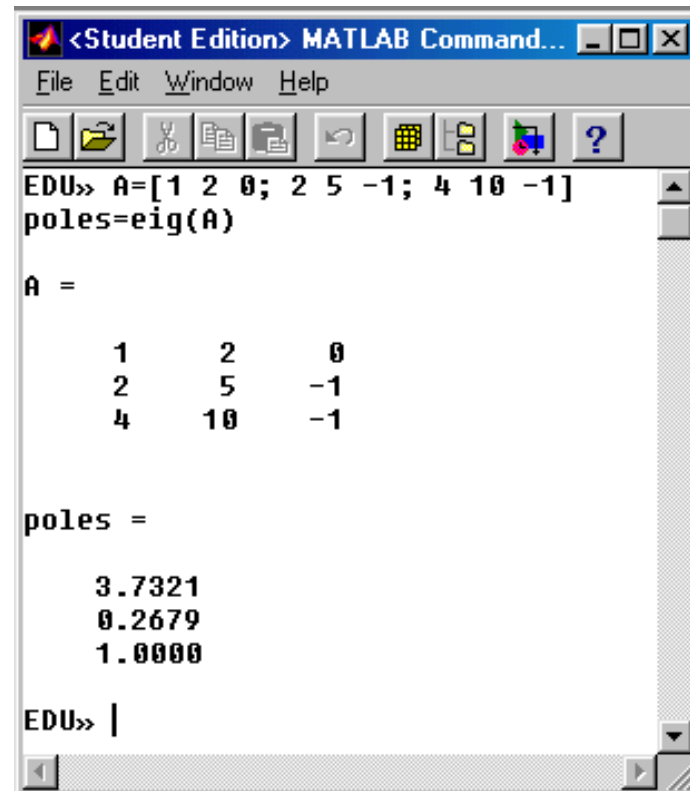
a = x1  x2  x3 x1  0  0  -6 x2  1  0  -16 x3  0  1  -8	b = u1 x1  1 x2  0 x3  0	c = x1  x2  x3 y1  2  -8  38	d = u1 y1  0
a = x1  x2  x3 x1  0  1  0 x2  0  0  1 x3  -6  -16  -8	b = u1 x1  2 x2  -8 x3  38	c = x1  x2  x3 y1  1  0  0	d = u1 y1  0
a = x1    x2    x3 x1  -5.086    0    0 x2    0  -2.428    0 x3    0    0  -0.4859	b = u1 x1  5.422 x2  4.666 x3  0.9969	c = x1    x2    x3 y1  0.2571  0.06781  0.2903	d = u1 y1  0

# MODELOS CON VARIABLES DE ESTADO

- ▶ **Estabilidad de los Sistemas Modelados según las Variables de Estado.**
  - La prueba de estabilidad debe ser realizada en la Ecuación Característica del sistema.
  - Para el caso de los sistemas modelados según las variables de estado, tenemos:
    - La Ecuación Diferencial Vectorial Homogénea corresponde:
$$\dot{[x(t)]} = [A][x(t)]$$
    - De la misma manera que para las ecuaciones diferenciales, la solución corresponde a una expresión exponencial que al adaptarla a la representación matricial quedaría:
$$\text{Si: } [x(t)] = [k]e^{\lambda t}$$
$$\lambda [x(t)]e^{\lambda t} = [A][k]e^{\lambda t} \quad ; \quad \lambda [x(t)] = [A][x(t)] \quad ; \quad [\lambda I - A][x(t)] = [0]$$
    - La solución de este conjunto de ecuaciones no es trivial si y solamente si su determinante es cero.
$$\det(\lambda I - A) = 0$$
    - La ecuación resultante en función de  $\lambda$  corresponde a la Ecuación Característica.

## ► Ejemplo

- Se observó la importancia que tiene el conocer las raíces de la Ecuación Característica y su desempeño en el comportamiento dinámico del sistema.
  - Determinación de los polos del “ $\det(\lambda I - A) = 0$ ” utilizando MATLAB.
  - Uso de la función:
    - `eig(A)`



```
<Student Edition> MATLAB Command...
File Edit Window Help
[Icons]
EDU>> A=[1 2 0; 2 5 -1; 4 10 -1]
poles=eig(A)

A =

     1     2     0
     2     5    -1
     4    10    -1

poles =

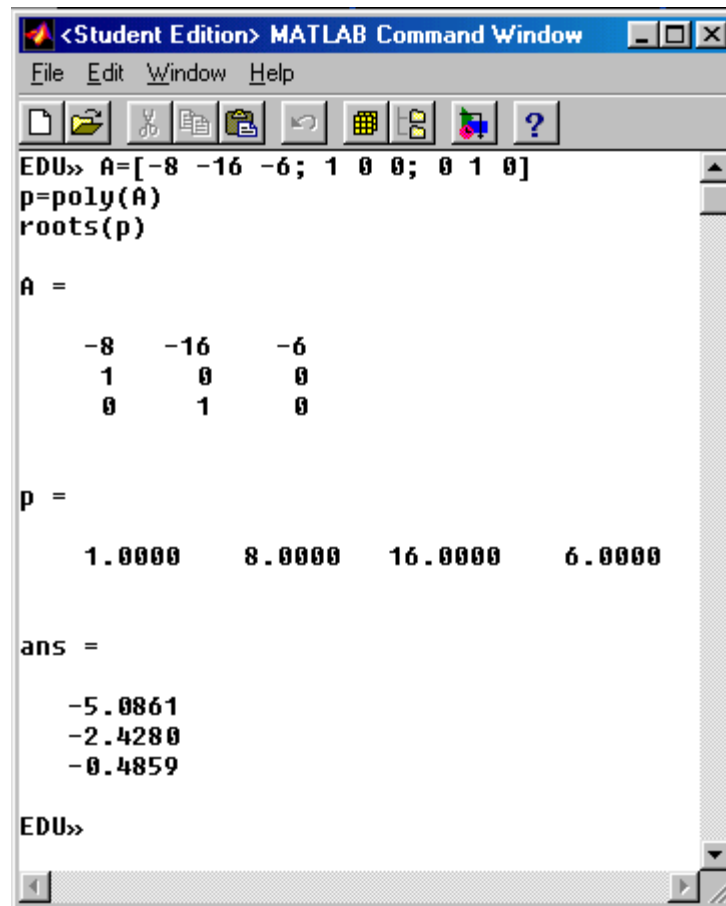
    3.7321
    0.2679
    1.0000

EDU>> |
```



## ► Ejemplo

- Se observó la importancia que tiene el conocer las raíces de la Ecuación Característica y su desempeño en el comportamiento dinámico del sistema.
  - Determinación de los polos del “ $\det(\lambda I - A) = 0$ ” utilizando MATLAB.
  - Uso de la función:
    - `poly(A)`
    - `roots(p)`



```
<Student Edition> MATLAB Command Window
File Edit Window Help
[Icons]
EDU>> A=[-8 -16 -6; 1 0 0; 0 1 0]
p=poly(A)
roots(p)

A =

    -8    -16     -6
     1     0     0
     0     1     0

p =

    1.0000    8.0000   16.0000    6.0000

ans =

   -5.0861
   -2.4280
   -0.4859

EDU>>
```